GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL IV.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMBRE 1898.

SUMARUL

1. Chestiuni de maximă și minimă . . . . *A. G. Ioachimescu*
2. Generalizarea problemei 79 . . . . . *I. Ionescu*
3. Construcțiunea expresiei $\frac{a^3}{b^3} = \frac{m}{n}$ . . . . *N. G. Muzicescu*
4. Bibbliografie.
5. Chestiuni de examen.
6. Probleme rezolvite: 77, 256, 257, 260, 268, 271, 289, 299, 330, 334, 342.
7. Probleme propuse: 365—374.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacţia „*Gazetei Matematice*“ se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ... *Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . *Inginer.*
Cristescu Vasile, ... *Inginer.*
Davidescu Emanoil, ... *Inginer.*
Erbiceanu Caton, ... *Inginer.*
Ioachimescu Andrei, ... *Inginer*, licenţiat în matematici.
Ionescu Bogdan, ... *Profesor*, licenţiat în matematici.
Ionescu Ion, ... *Inginer.*
Lupu Constantin, ... *Inginer.*
Nicolescu Nicolae, ... *Inginer.*
D-ra Pompilian Constanţa . *Directoară de Institut*, licenţiată în matematici.
Roco Mihail, ... *Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ... *Profesor*, licenţiat în matematici.
Zottu G. Ioan, ... *Inginer.*

Facem cunoscut cititorilor noştri că de acum înainte D-l **Erbiceanu Caton, Inginer,** *va face parte din Redacţiunea Gazetei Matematice.*

GAZETA MATEMATICA.

1626
1900

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ȘI SPECIALE

PENTRU UZUL

SCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL IV.

15 Septembre 1898—15 August 1899.

BUCURESTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII

19, Strada Regală, 19

1898

Intrat înainte de anul 1933
Biblioteca Universității Iași
12 FEB. 1935

Redacția „*Gazetei Matematice*“ se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, . . . *Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . *Inginer.*
Cristescu Vasile, ... *Inginer.*
Davidescu Emanoil, ... *Inginer.*
Erbiceanu Caton, ... *Inginer.*
Ioachimescu Andrei, ... *Inginer*, licențiat în matematici.
Ionescu Bogdan, ... *Profesor*, licențiat în matematici.
Ionescu Ion, ... *Inginer.*
Lupu Constantin, ... *Inginer.*
Nicolescu Nicolae, ... *Inginer.*
D-ra Pompilian Constanța . *Directoară de Institut*, licențiată în matematici.
Roco Mihail, ... *Inginer.*
Țițeica Gheorghe, ... *Profesor*, licențiat în matematici.
Zottu G. Ioan, ... *Inginer.*

*CHESTIUNI DE MAXIMA ȘI MINIMA.

Problema generală a determinării maximului sau minimului unei funcțiuni, de una sau mai multe variabile, se rezolvă cu ajutorul derivatelor. Algebra elementară dă metode pentru rezoluția acestei probleme, în anume cazuri particulare; iar cazul cel mai general, ce se consideră obicinuit, este acela al unei fracțiuni raționale, egală cu cîtul a două polinoame de gradul al doilea, în raport cu variabila. Eu îmi propun aci a da o metodă bazată pe simple considerațiuni de diviziune algebrică, care ar da mijlocul de a găsi în mod elementar, maximul sau minimul unei fracțiuni rațională *oare-care*, dacă se va ști rezolva o ecuațiune, care în general este de un grad mai mare ca al doilea. De și în genere nu vom ști rezolva ecuațiunea la care ajungem, totuși vom putea da soluția complectă a problemei, în anume cazuri, cînd metodele obicinuite nu reușesc.

1.— Fie: $$(1)\quad y=\frac{A}{B},$$

o fracțiune rațională, A și B fiind două polinoame în raport cu o variabilă x. Fie x_1 o valoare particulară dată lui x, să însemnăm cu aceleași litere cu indicele 1, valorile pe care le ia A, B, y cînd se înlocuește x prin x_1 adică:

$$(2)\quad y_1=\frac{A_1}{B_1}. \qquad B_1 \neq o.$$

Din (1) și (2) deducem:

$$(3)\quad y-y_1=\frac{A}{B}-\frac{A_1}{B_1}=\frac{AB_1-BA_1}{BB_1}.$$

Polinomul: AB_1-BA_1 este evident divizibil cu $x-x_1$, căci dacă înlocuim pe x cu x_1, avem:

$$A_1B_1-B_1A_1 \equiv o.$$

Fie C cîtul diviziunei lui AB_1-BA_1 cu $x-x_1$, adică:

$$AB_1-BA_1=(x-x_1)C,$$

substituind în (3) avem:

$$(3')\quad y-y_1=(x-x_1)\frac{C}{BB_1}.$$

Să considerăm diferența:

$$(5)\quad \frac{C}{B}-\frac{C_1}{B_1}=\frac{CB_1-BC_1}{BB_1},$$

C_1 reprezentînd rezultatul substituțiunei lui x_1, în locul lui x, în polinomul C. $CB_1 - BC_1$ este de asemenea divizibil cu $x - x_1$, și însemnînd cu C' cîtul corespunzător, avem:

$$(6) \quad CB_1 - BC_1 = (x - x_1)C',$$

deci

$$(5') \quad \frac{C}{B} = \frac{C_1}{B_1} + \frac{(x - x_1)C'}{BB_1}.$$

Substituind această valoare în (3'), avem:

$$(5'') \quad y - y_1 = (x - x_1)\frac{C_1}{B_1^2} + (x - x_1)^2 \frac{C'}{BB_1^2}.$$

Să rezolvim ecuațiunea (3'') în raport cu $x - x_1$, avem:

$$(7) \quad \frac{C'}{BB_1^2}(x - x_1) = -\frac{C_1}{2B_1^2} \pm \sqrt{\frac{C_1^2}{4B_1^4} + \frac{C'}{BB_1^2}(y - y_1)}.$$

Să presupunem că am luat pe x_1, care pînă aci a rămas arbitrar, ast-fel în cît să anuleze polinomul C_1, adică:

$$C_1 = o,$$

atunci relațiunea (7) se reduce la:

$$\frac{C'}{BB_1^2}(x - x_1) = \pm \sqrt{\frac{C'}{BB_1^2}(y - y_1)},$$

sau

$$x - x_1 = \pm \sqrt{\frac{BB_1^2}{C'}(y - y_1)}.$$

B și C' depind de x, să presupunem însă că nici unul nici altul nu se anulează pentru $x = x_1$, atunci pentru valori ale lui x ceva mai mici sau ceva mai mari ca x_1, raportul $\frac{B}{C'}$ va avea același semn [1]). Să presupunem s. ex. ca: $\frac{B}{C'} > o$, atunci pentru ca x să fie real trebue: $y - y_1 \geq o$ sau $y \geq y_1$. Prin urmare dintre toate valorile pe care le ia y, cînd dăm lui x valori ceva mai mici sau ceva mai mari ca x_1, cea mai mică valoare este y_1: deci y_1 este un minimum și acest minimum corespunde la valoarea lui $x = x_1$.

In același mod se găsește că dacă presupunem din contra $\frac{B}{C'} < o$, valoarea $y = y_1$ este un maximum corespunzător la $x = x_1$.

[1]) Se admite principiul continuității, care pentru cazul polinoamelor poate fi demonstrat foarte simplu și în mod cu totul elementar.

In cazul cînd C′ se anulează pentru $x=x_1$, nu mai putem conchide nimic, cum însă în general C′ nu se va anula pentru $x=x_1$, ajungem la concluzia următoare:

Valorile pentru care y este un maximum sau un minimum se găsesc printre acelea, care anulează polinomul C_1. *Dacă* $x=x_1$ *este una din rădăcinele ecuațiunei* $C_1=o$, *la această valoare va corespunde un minimum sau un maximum, dupe cum rezultatul substituțiunei lui* x_1 *în locul lui* x *în* C′: B *va fi pozitiv sau negativ.*

2.— Din cele ce preced rezultă că soluțiunea generală a determinării maximului sau minimului unei fracțiuni raționale în raport cu o variabilă, depinde de rezoluțiunea ecuațiunei $C_1=o$, și de determinarea semnului expresii $\frac{C'}{B}$. Vom putea deci să rezolvăm complect problema ori de cîte ori vom ști rezolva ecuațiunea $C_1=o$, căci determinarea polinoamelor C, C′ se poate face prin simple operațiuni de diviziune algebrică.

Să presupunem că polinomul A este de gradul m, iar polinomul B de gradul n, atunci AB_1-BA_1 va fi de gradul $m+n$ în raport cu x și x_1, iar C va fi de gradul $m+n-1$ în raport cu aceleași litere, deci C_1 va fi în genere de gradul $m+n-1$ în raport cu x_1. In cazul însă cînd $m=n$, atunci C_1 nu va fi de gradul $2n-1$, ci de gradul $2n-2$, căci termeni de gradul cel mai înalt se reduc.

In adevăr, fie:

$$A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$$
$$B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n,$$

avem:

$$AB_1-BA_1=(a_0b_1-b_0a_1)(x^n{x_1}^{n-1}-x^{n-1}{x_1}^n)+\ldots\ldots$$

iar

$$\frac{AB_1-BA_1}{x-x_1}=C=(a_0b_1-b_0a_1)x^{n-1}{x_1}^{n-1}+\ldots\ldots,$$

expresiune al cărui grad s'ar mai putea reduce, în cazul cînd între coeficienții celor două polinoame ar exista oare-care relații particulare.

In cazul cînd expresiunea dată este întreagă, atunci $n=o$, iar C va fi de gradul $m-1$. Cum știm să rezolvăm în mod general

ecuațiunile de gradul întâiu și al doilea, rezultă că vom putea totdeauna găsi, maximul și minimul polinoamelor de gradul al doilea și al treilea. Voiu aplica metoda precedentă în cazul unui polinom de gradul al treilea.

3.— Fie deci:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Avem:

$$y-y_1=a(x^3-x_1^3)+b(x^2-x_1^2)+c(x-x_1)$$

deci:

$$C=\frac{y-y_1}{x-x_1}=a(x^2+xx_1+x_1^2)+b(x+x_1)+c$$

iar:

$$C_1=3ax_1^2+2bx_1+c.$$

Ecuațiunea $C_1=o$ fiind de gradul al doilea, va avea două rădăcini, zic că dacă aceste rădăcini sînt reale și inegale, la una din ele va corespunde un maximum pentru y, iar la cealalta un minimum.

Intr'adevăr fie α și β cele două rădăcini ale ecuațiunei $C_1=o$. Să formăm expresia $\frac{C'}{B}$. Avem în cazul acesta:

$$CB_1-BC_1=a(x^2+xx_1+x_1^2)+b(x+x_1)+c-(3ax_1^2+2bx_1+c)$$
$$=a(x^2-x_1^2)+ax_1(x-x_1)+b(x-x_1)$$

deci: $C'=a(x+x_1)+ax_1+b$

iar: $C'_1=3ax_1+b.$

Or din $C_1=o$ deducem: $3ax_1+b=-\frac{c+bx_1}{x_1}$,

deci: $$C'_1=-b-\frac{c}{x_1}.$$

Să substituim în locul lui x_1 pe rînd cele două rădăcini α și β ale ecuațiunei $C_1=o$ și să facem produsul rezultatelor obținute, avem:

$$\left(b+\frac{c}{\alpha}\right)\left(b+\frac{c}{\beta}\right)=b^2+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{c^2}{\alpha\beta},$$

or:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2b}{c} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{3a}{c},$$

deci:

$$\left(b+\frac{c}{\alpha}\right)\left(b+\frac{c}{\beta}\right)=b^2-2b^2+3ac=-(b^2-3ac)$$

Biblioteca

cantitate totdeauna negativă, dacă rădăcinele α și β sînt reale, căci în cazul acesta $b^2-3ac>o$; prin urmare rezultatele substituțiunii lui α și β în C', fiind de semne contrarii, o rădăcină va corespunde la un maximum a lui y, iar cealaltă rădăcină la un minimum.

La acest rezultat se poate ajunge și direct. Rădăcinele ecuațiunei $C_1=o$ fiind:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$

dacă substituim pe rînd aceste valori în C'_1, avem pentru cea d'întăi:

$$C'_1=-b-\frac{3ac}{-b+\sqrt{b^2-3ac}}=\frac{b^2-3ac-b\sqrt{b^2-3ac}}{-b+\sqrt{b^2-3ac}}=+\sqrt{b^2-3ac}.$$

Și pentru cea de a doua:

$$C'_1=-b-\frac{3ac}{-b-\sqrt{b^2-3ac}}=\frac{b^2-3ac+b\sqrt{b^2-3ac}}{-b-\sqrt{b^2-3ac}}=-\sqrt{b^2-3ac}.$$

Prin urmare valoarea $x=\alpha$ corespunde la un maxim, iar valoarea $x=\beta$ la un minimum.

4.— Să considerăm încă expresiunea:

$$y=x^m(a-x)^n,$$

m și n fiind două numere întregi pozitive. Avem:

$$y-y=x^m(a-x)^n-x_1{}^m(a-x_1)^n$$

de unde:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{x^m(a-x)^n-x_1{}^m(a-x_1)^n}{x-x_1}.$$

Pentru a obține cîtul procedăm în modul următor: dividem mai întăi pe $x^m(a-x)^n$ prin $x-x_1$, obținem ast-fel cîtul:

$$x^{m-1}(a-x)^n+x^{m-2}x_1(a-x)^n+.....+x_1{}^{m-1}(a-x)^n$$

și restul: $x_1{}^m(a-x)^n$, acest rest alăturat pe lîngă $-x_1{}^m(a-x_1)^n$, dupe ce am pus pe $x_1{}^m$ în factor comun, avem de divizat pe:

$$(a-x)^n-(a-x_1)^n$$

prin $x-x_1=-[(a-x)-(a-x_1)]$, cîtul se obține ușor, el este:

$$-[(a-x)^{n-1}+(a-x_1)(a-x)^{n-2}+....+(a-x_1)^{n-1}],$$

prin urmare:

$$C=(a-x)^n[x^{m-1}+x^{m-2}x_1+....+x_1^{m-1}]$$
$$-x_1^m[(a-x)^{n-1}+(a-x)^{n-2}(a-x_1)+....+(a-x_1)^{n-1}].$$

Făcînd pe $x=x_1$ obținem:

$$C_1=m(a-x_1)^n x_1^{m-1}-nx_1^m(a-x_1)^{n-1}=x_1^{m-1}(a-x_1)^{n-1}[m(a-x_1)-x_1 n].$$

Valorile pentru care C_1 se anulează sînt:

$$x_1=o,\ x_1=a,\ x_1=\frac{ma}{m+n}.$$

Dacă însă se consideră numai valorile variabili coprinse între o și a, sau ceia ce revine a zice, daca se caută a se descompune numărul pozitiv a în două părți tot *pozitive*, atunci nu avem de considerat de cît valoarea: $x_1=\frac{ma}{m+n}$, pentru care y va fi un maximum sau un minimum. Am putea forma cantitatea C', însă în cazul acesta este evident ca valoarea considerată a lui x, corespunde la un maximum pentru y.

Se regăsește ast-fel rezultatul, care obicinuit se stabilește pe alte căi.

A. G Ioachimescu

*GENERALIZAREA PROBLEMEI 79

In No. 7 din Anul I al *„Gazetei Matematice"* am propus următoarea problemă:

Să se demonstreze că diferența a două cuburi perfecte nu poate fi multiplu de 3 fără a fi și multiplu de 9.

Această problemă a fost rezolvită în No. 12 al aceluiași an, iar în No. 10 din Anul III D-l *A. Iliovici* a căutat să o generalizeze dîndu-i următorul enunciu:

a și b fiind două numere întregi, dacă diferența a^n-b^n este un multiplu de n, ea va fi și un multiplu de n^2.

Pentru a se demonstra aceasta s'a stabilit următoarea identitate:

$$(1)\ a^n-b^n=(a-b)\left[(a-b)^{n-1}+na^{n-2}b-\frac{n(n-3)}{1.2}a^{n-4}b^2(a-b)+....\right]$$

în care termenul de rang p din parenteză este:

$$n\frac{(n-p)(n-p-1).....(n-2p+3)}{1.2.3.....(p-1)}a^{n-2p+2}b^{p-1}(a-b)^{p-2},$$

iar ultimul termen fiind:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} nab^{\frac{n-1}{2}}(a-b)^{\frac{n-3}{2}} \quad \text{sau} \quad (-1)^{\frac{n-2}{2}} 2b \cdot {}^{\frac{n}{2}}(a-b)^{\frac{n-2}{2}}$$

după cum n este impar sau par. S'a arătat apoi că toți coeficienții sînt întregi. Restul demonstrațiunei însă prezintă două puncte slabe pe care îmi propun a le semnala.

a) Coeficienții nu sînt totdeauna divizibili cu n. In adevăr de și în expresiunea coeficienților intră n ca factor la numărător, dar e posibil ca unii din factorii lui n să fie necesari a se reduce cu factori de la numitorul coeficientului, așa că coeficientul poate să nu mai rămîe divizibil cu n.

b) Chiar dacă toți coeficienții ar fi divizibili cu n, pentru ca parenteza cea mare a egalității (1) să fie divizibilă cu n, nu e nevoe ca $(a-b)$ să se dividă cu n ci e destul ca $(a-b)^{n-1}$ să fie divizibil cu n. De aci reese că (a^n-b^n) se poate divide cu n, dar de aci nu se poate trage concluzia că pentru aceasta trebue ca $(a-b)$ să se dividă cu n, căci parenteza se poate divide cu n dacă $(a-b)$ nu se divide, și prin urmare (a^n-b^n) se poate divide cu n, dar nu cu n^2.

Pentru a clarifica acestea să luăm un exemplu. Fie $a=7, b=5$ și $n=8$. Cu aceste valori identitatea (1) ne dă:

$$7^8-5^8=(7-5)\,[(7-5)^7+8.7^6.5-20.7^4.5^2(7-5)+16.7^2.5^3.(7-5)^2-2.5^4(7-5)^3],$$

sau:

$$7^8-5^8=2\,(2^7+8.7^6.5-20.7^4.5^2.2+16.7^2.5^3.2^2.-2.5^4.2^3).$$

Din această desvoltare se vede: 1) că coeficienții —20 și —2 nu se divid cu 8, și 2) că $(7-5)^7=2^7$ se divide cu 8, cu toate că $(7-5)$ nu e divizibil cu 8. Toți termenii din parenteză sînt însă divizibili cu 8, și prin urmare și (7^8-5^8) se divide cu 8. Această diferență însă nu se devide cu $64=8^2$. In adevăr avem:

$$7^8-5^8=(7^4+5^4)(7^4-5^4)=3026\times 1776=2^3\times 167943.$$

Produsul e divizibil cu $8=2^3$, dar nu este cu $8^2=2^6$. Așa dar pentru $n=8$ teorema nu e adevărată. Putem arăta un exemplu din care să se vază că și pentru $n=9$, teorema nu este adevărată.

Avem:

$$4^9-1^9=272143=3^3\times 9709.$$

Se vede că această expresiune se divide cu $9=3^2$, dar nu cu $9^2=3^4$.

Din cele ce preced reese că teorema generală anunciată nu este adevărată pentru toate valorile întregi ale lui n. S'ar putea însă pune chestiunea de a găsi pentru ce anume valori ale lui n teorema există și pentru cari valori teorema nu există. In cele ce urmează îmi propun a rezolva această problemă, dînd enunciul general al problemei 79. Pentru aceasta voiu separa demonstrațiunea în mai multe părți, din care voiu deduce concluziunea generală.

1) *Dacă* $(a-b)$ *e multiplu de* n, *atunci* (a^n-b^n) *e multiplu de* n^2.

Această teoremă e cunoscută. Ea reese imediat din identitatea (1) de mai sus. In adevăr, toți termenii din parenteza cea mare au pe $(a-b)$ ca factor, afară de al doilea, care se divide cu n. Deci dacă $a-b=\mathfrak{M}n$ atunci, și factorul întâiu și al doilea din membrul al doilea al identității (1) se divid cu n, și prin urmare produsul lor, adică (a^n-b^n) se va divide cu n^2. Aceasta se poate proba însă și direct. Fie:

$$a-b=kn, \quad \text{de unde} \quad a=b+kn.$$

care ne dă:

$$a^n=b^n+n.b^{n-1}kn+\frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}k^2n^2+\ldots\ldots,$$

$$(2)\quad a^n-b^n=b^{n-1}k.n^2+\frac{n(n-1)}{1.2.}b^{n-2}k^2n^2+\ldots\ldots=\mathfrak{M}n^2$$

2) *Dacă* n *este un număr prim, atunci* (a^n-b^n) *nu se poate divide cu* n *fără a se divide cu* n^2.

In acest caz toți coeficienții sînt *întregi și divizibili cu* n. In adevăr din identitatea (1) se vede că numărul total al termenilor din parenteză este $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ sau $\frac{n}{2}+1$ după cum n e impar sau par.

Deci rangul p al unui termen nu poate fi mai mare ca aceste numere, iar $(p-1)$ nu poate fi mai mare ca $\frac{n}{2}$. Ast-fel fiind nici unul din factorii de la numitorii diferiților coeficienți nu poate împărți pe n, care e prim prin ipoteză, căci toți acei factori sînt mai mici ca n. Așa dar coeficienții sînt toți divizibili cu n. Așa

dar, dacă $(a^n—b^n)$ se divide cu n, trebue, sau ca $(a—b)$ să se dividă cu n, în care caz teorema precedentă $(a^n—b^n)$ se divide cu n^2; sau ca parenteză să se dividă cu n.

Pentru aceasta însă, cum termenul al doilea are pe n ca factor iar toți coeficienții sînt divizibili cu n, rezultă că și $(a—b)^{n-1}$ trebue să se dividă cu n. Dar n fiind *număr prim*, el nu poate divide pe $(a—b)^{n-1}$ fără a divide pe $(a—b)$; ast-fel că cădem iarăși în cazul teoremei precedente. Așa dar dacă n e prim, $(a^n—b^n)$ nu se poate divide cu n fără a se divide cu n^2, și *în acest caz se impune ca și* $(a—b)$ *să se dividă cu* n.

3) *Dacă* n *este un produs de factori primi la puterea întâia, atunci* $(a^n—b^n)$ *nu se poate divide cu* n *fără a se divide și cu* n^2.

Fie $n=\alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots$, în care $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt numere prime diferite. Să punem $\beta\gamma\delta\ldots\ldots=p$, și prin urmare vom avea $n=\alpha p$. Avem ast-fel:

$$a^n—b^n=a^{\alpha p}—b^{\alpha p}=(a^p)^\alpha—(b^p)^\alpha.$$

Dar $(a^n—b^n)$ divizîndu-se cu n, se va divide și cu α care e un divizor al lui n. Așa dar $[(a^p)^\alpha—(b^p)^\alpha]$ se divide cu α, și cum α este un număr prim, după teroarea precedentă el se va divide și cu α^2. Așa dar $a^n—b^n=\mathfrak{M}\alpha^2$. In același mod se poate demonstra că $(a^n—b^n)$ se divide cu $\beta^2, \gamma^2, \delta^2\ldots\ldots$ Cum însă numerile $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots\ldots$ sînt prime și prin urmare prime între ele două cîte două, și puterile lor $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2\ldots\ldots$ vor fi prime între ele două cîte două. Așa dar $(a^n—b^n)$, care se divide cu fie-care din aceste patrate în parte se va divide și cu produsul lor $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2\ldots\ldots=n^2$. c.c.e.d.d.

In acest caz nu mai e nevoie ca $(a—b)$ să fie multiplu de n. Așa de exemplu avem:

$$10^6—2^6=999936=6^2\times 27776,$$

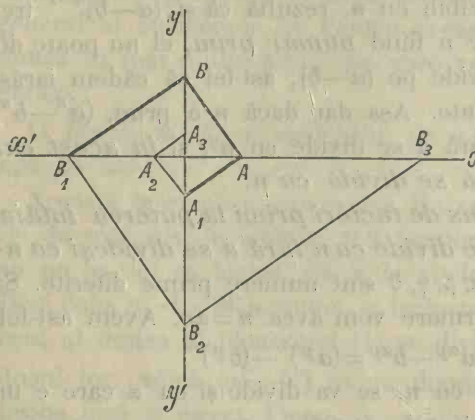
unde $10—2=8$ nu se divide cu 6.

(Va urma) I. Ionescu.

*CONSTRUCȚIUNEA EXPRESIEI $\frac{a^3}{b^3}=\frac{m}{n}$.

In numărul din Decembre 1897 al *„Gazetei Matematice“* D-l Bogdan Ionescu a dat sub titlul: *O construcțiune geometrică* un mijloc de a determina două lungimi al căror raport să fie egal cu raportul a două cuburi de laturi date. Construcțiunea D-lui

Ionescu e destul de complicată și exige întrebuințarea compasului. Voi da o construcțiune care pe lîngă că se poate face numai cu ajutorul riglei și a echerului, dar e susceptibilă de o generalizare oare-care.



Consider două axe rectangulare $x'x$ și $y'y$. Fie O punctul lor de întretăere. Iau pe $x'x$ plecînd de la punctul O o lungime $OA=a$ și $y'y$ o lungime $OB=b$, a și b fiind laturile date ale cuburilor. Ridic în A și B perpendiculare pe AB, care întîlnesc respectiv $y'y$ în A_1 și $x'x$ în B_1. Zic că lungimile OA_1 și OB_1 sînt lungimile căutate. In adevăr triunghiurile dreptunghie BAA_1 și ABB_1, ne dau:

$$\overline{OA}^2=\overline{OB}.\overline{OA_1}; \quad \overline{OB}^2=\overline{OA}.\overline{OB_1}.$$

Impărțind una prin alta aceste egalități și înmulțind apoi cu:

$$\frac{OA}{OB}, \text{ găsim } \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}=\frac{\overline{OA}^3}{\overline{OB}^3}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Ducem apoi din A_1 și B_1 paralele la AB, care întîlnesc respectiv $x'x$ în A_2 și $y'y$ în B_2. Triunghiurile dreptunghice AA_1A_2 și BB_1B_2, ne dau:

$$\overline{OA_1}^2=OA.OA_2; \quad \overline{OB_1}^2=OB.OB_2.$$

Impărțind una prin alta aceste egalități și înmulțind cu:

$$\frac{OB}{OA}=\frac{b}{a} \text{ observînd că } \frac{\overline{OA_1}^2}{\overline{OB_1}^2}=\frac{a^6}{b^6}, \text{ avem:}$$

$$\frac{OA_2}{OB_2}=\frac{a^5}{b^5}.$$

Ridicînd în A_2 și B_2 perpendiculare respectiv pe A_1A_2 și B_1B_2, vom căpăta două lungimi OA_3 și OB_3, așa că:

$$\frac{OA_3}{OB_3}=\frac{a^7}{b^7}.$$

Continuînd în același mod, putem construi două lungimi m și n, așa că:

$$\frac{m}{n} = \frac{a^{2p+1}}{b^{2p+1}},$$

a și b fiind două lungimi. Construcția cere și un spațiu mai restrîns, căci pe cînd una din lungimi crește, cealaltă descrește.

N. G. Muzicescu.

BIBLIOGRAFIE

Curs de Algebră Elementară de D-l **Al. Manicatide**, licențiat în matematici, profesor la Școala Normală și Liceul din Galați (301 pag. în 8°, prețul 4 l. 50).

D-l Manicatide a reușit să reunească, într'un volum relativ restrîns, tot ceia ce exige programul actual de învățămînt al algebrii, în clasele IV-a și V-a de liceu. Toate chestiunile sînt tratate în mod complect, fără a intra însă în desvoltări inutile, nici în acele detalii în demonstrațiuni, care mai adesea ori mai mult încurcă de cât luminează. Și eu sînt de părerea autorului, că demonstrațiile mai concise sînt preferabile, ele lasă cîmp liber profesorului de a le da desvoltarea, care o va crede mai nemerită; iar elevilor nu le încătușează judecata, de a urma cuvînt cu cuvînt, de a învăța de cele mai multe ori pe dinafară, un anume raționament.

In cartea D-lui Manicatide expunerea este clară, simplă, demonstrațiile ușoare și deduse în mod natural, căutînd a le apropia cît mai mult de demonstrațiile corespunzătoare din aritmetică; ast-fel cum trebue să fie într'un manual de școală. De asemenea D-l Manicatide nu a perdut din vedere că Algebra este mai ales utilă ca instrument de calcul, și că învățătura ei nu ar fi de mare folos, dacă elevii nu ar ajunge să aplice cu siguranță și ușurință regulele și teoremele stabilite. De aceia fie-care capitol este urmat de numeroase exerciții și probleme, pornind treptat de la cele mai simple spre a ajunge la unele care sînt relativ foarte dificile. Sistemul de a se da după fie care chestiune și rezultatul este foarte nemerit, el fiind singurul mijloc ca elevii să se controleze singuri, și să ajungă să aibă încredere în lucrarea lor.

La rezoluțiunea ecuațiunilor de gradul 1, autorul insistă cu drept cuvînt asupra metodei de eliminare prin reducere. Cred chiar că rezoluția ecuațiunelor de gradul 1 cu două necunoscute, ar trebui să se înceapă cu această metodă, care este cea mai simplă de aplicat și cea mai ușor de înțeles. Faptul, că în toate cărțile de Algebră se începe cu metoda substituții, fac pe elevi să creadă, că aceasta este adevărata metodă de rezoluție.

Eată acum și alte cîte-va observații.

Mai întâi o chestiune de principiu. Dupe părerea mea, ar trebui chiar după difiniținea expresiunilor echivalente, să se distingă cele două feluri de egalități: *identități* și *ecuațiuni* și prin numeroase exemple să se convingă elevi de deosebirea fundamentală ce există între ele. Noțiunea de identitate algebrică este indispensabil a fi dată înaintea operațiunilor algebrice, care în fond

nu sînt de cît transformări de expresiuni algebrice în altele identice, puse sub o altă formă. Din cauza lipsei acestei noțiuni, elevii nu pot prinde de la început spiritul multor demonstrațiuni s. ex. teorema relativă la restul diviziuni unui polinom prin $x-a$; spiritul începătorilor încearcă un fel de jenă de a admite că avem dreptul să înlocuim pe x cu a, sau cu ori ce vom voi:

Semnalez încă următoarele puncte asupra cărora cred că ar fi trebuit să insiste mai mult, din cauza importanței lor sau fiind puncte delicate.

La înmulțire trebuea să se semnaleze că *se admite*, pentru a nu intra în prea multe detalii, ca regulele stabilite pentru numerile întregi sau fracționare se aplică și la numerile incomensurabile, mai ales că se face uz de aceasta la teoria radicalilor.

De asemenea cred că trebuia să se insiste mai mult asupra fracțiunelor cu numitorul zero, asupra exponenților fracționari, exemple mai numeroase de ecuațiuni rezolvate, numere imaginare.

In privința logaritmelor cred preferabil a se menține în Algebra elementară definițiunea prin progresiuni.

In rezumat cursul de Algebră al D-lui Manicatide, este o carte care va aduce reale servicii elevilor, și urăm autorului să scoată în curînd o nouă ediție, după noile programe.

A. G. I.

Aritmetica Comercială de Dl. **Gh. G. Gheorghiu** profesor la Școala Comercială de gr. I, Iași (313 pag. în 8° mic, 3. l. 50)

Este o carte care corespunde în adevăr titlului său, întru atît cît o știință poate fi desemnată după specia aplicațiunelor ce se are în vedere.

Coprinde 5 părți Primele trei sînt consacrate chestiunelor generale de Aritmetică practică, avînd în plus în cartea treia, cite-va reguli și definițiuni ce se întîlnesc mai special în afacerile negustorești cum e s ex regula de atît la %, reducerile și primele ce se obișnuesc în comerciu etc. Asupra acestor trei părți observăm că expunerea este clară, detaliate, întrebuințînd limbagiul cel mai apropiat, din care cauză a sacrificat pe alocuri precizia și rigoarea în definițiuni. De asemenea voind a expune chestiunile complect, mai fie care regulă e urmată de o mulțime de observațiuni, care dacă li s'ar pretinde elevilor, le ar îngreuia prea mult memoria, fără mult folos imediat.

Cărțile IV-a și a V-a sînt cele mai interesante și constituesc partea propriu zis comercială. Autorul a reușit în cartea IV să dea o expunere simplă, foarte clară și foarte complectă a tuturor chestiunelor ce se pot propune asupra calculului metalelor prețioase; iar în Cartea V-a, același lucru pentru schimburi și arbitrage, efecte publice și private. Aceste chestiuni interesează nu numai pe comerciant, dar pe ori-cine se ocupă cu afacerile economice (și cine nu se ocupă azi de ele?), ele formează o parte din cultura generală. Pentru toți aceia care aud și întrebuințează pe fie care zi o mulțime de termeni, a căror semnificare precisă nu o cunosc, care citesc cota unei burse fără o pricepe complect, le recomandăm cartea D-lui Gheorghiu, de unde în cîte va ore, poate să-și formeze o idee clară și precisă de toate aceste chestiuni

Ceea ce caracterizează încă Aritmetica D-lui Gheorghiu sînt numeroasele aplicaţiuni ce însoţesc fie-care chestiune, aplicaţiuni ale căror date nu sînt luate la întîmplare, sau de prin cărţi streine; dar adunate în mod conştiincios şi raportate în special la problemele asupra operaţiunelor comerciale, ce se efectuează pe pieţele din România.

A. G. I.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURS GENERAL [1])

Clasa V

Se dă ecuaţiunea:

$$8x^2-(m-1)x+m-7=0,$$

şi se cere să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile x' şi x'' să fie: 1°) Reale şi egale; 2°) egale şi de semne contrarii; 3°) inverse una alteia; 4°) una din rădăcini egală cu zero.

Clasa VI

Să se demonstre egalităţile:

$$(1)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$(2)\qquad \operatorname{tg} 5x=\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x+\sin 9x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x+\cos 9x}$$

Clasa VII

Să se studieze variaţiunea duratei zilei şi nopţei, la diferite epoci ale anului şi în diferite puncte dupe suprafaţa pămîntului.

(25 Iunie 1898).

SCOALA DE OFICIERI

(Examenul de admitere).

Geometrie descriptivă

1) Să se găsească urmele unui plan, determinat prin două drepte ce se întîlnesc.

2) Să se determine intersecţia unei drepte cu un plan.

Mecanică

1) Să se compue două forţe paralele şi de acelaş sens.

2) Mişcarea rectilinie; uniformă şi variată. Formulele corespunzătoare.

(11 August 1898, 3—6).

---

[1]) De anul trecut s'a înfiinţat un concurs general între elevi cursului superior din toate liceele din ţară. In anul scolar 1896—97, nu s'a propus la acest concurs chestiuni de matematici. Anul acesta concursul a avut loc la 25 Iunie, iar rezultatul se va da în curînd.

SCOALA SPECIALA DE ARTILERIE ȘI GENIU

(Examenul de admitere).

Algebră

1) Pentru ce valori ale lui p ecuațiunea:

$$x^2-(p-1)x+36=o$$

are rădăcinele sale: 1) egale; 2) egale și de semne contrarii.

2) Să se rezolve inegalitatea:

$$x > \frac{1}{2a-x}.$$

Geometrie

Se dă un patrat ABCD. Din D ca centru cu DA ca rază se descrie arcul AC. Pe AD ca diametru se descrie în interiorul patratului semicirconferința AMD. Pe arcul AC se ia un punct P de unde se duce perpendiculara PR pe AB, dreapta PD întilnește semicirconferința AMD în Q. Să se arate că:

$$PR=PQ.$$

Trigonometrie

Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu cunoscînd:

1) O latură b și diferența $a-c=d$.

2) Ipotenuza a și diferența $a-c=d$.

Notă. In numărul viitor vom publica soluțiunile date de D-l *G. Giușcă*, care a reușit întăiul la acest examen.

SCOALA PROFESIONALA DE TELEGRAFIE

(Examenul de admitere).

1) Să se calculeze:

$$\sqrt{5}-\sqrt[3]{6},$$

cu o aproximație de 0,001.

2) Să se împartă o capacitate de un litru, în trei părți proporționale cu numerile:

$$12,62;\ 5+\frac{6}{7};\ 0,12+\frac{3}{4}.$$

(20 August, 8—12).

PROBLEME REZOLVITE [1]

Problema 77. — *Să se compare cele două procedeuri de construcțiune date problemei 3 (rezolvită în numărul 3 An. I al „Gazetei Matematice)". Să se arate care din acele procedeuri e mai simplu și mai exact.* (I. Ionescu.)

[1]) Problema 273 a fost rezolvită și de D-nii: *L. Hermann* și *C. Vintilă.*

Soluțiune dată de D-l Th. M. Vladimirescu.

Aplicăm procedeul dat în *Geometrografia* de *I. Ionescu,* strîngînd toate construcțiunile în tabloul acesta.

Indicarea cestiunei și soluțiunei	Operațiuni					Coeficienți			Formula
	R	P	L	D	A	C	N	M	
Fie I *centrul cercului înscris în triunghiu* ABC *și* A′, B′, C′ *punctele unde dreptele* IA, IB, IC *întîlnesc cercul înscris. Cunoscîndu-se punctele* A′, B′, C′ *se cere a se construi triunghiul* ABC *corespunzător.*									
1) *Procedeul D-lui* V. Ionescu.									
a) Ducem prin I o coardă *ab* perpendiculară pe IA′	4	1		2	1				
b) Luăm arcele C′*a*′ și B′*b*′ respectiv egale cu arcele C′*a* și B′*b*		4			2				
c) Împărțim arcul *a*′*b*′ în două părți egale și obținem punctul de tangență α	2	2		1	2				
d) Luăm arcul C′β egal cu arcul C′α		2			1				
e) Ridicăm în α o perpendiculară pe Iα, care e tangentă în α.	4	1		2	1				
f) Unim C cu β și obținem A . . .	2			1					
g) Unim A cu B și obținem a treia latură a triunghiului căutat	2			1					
	14	10		7	7	38	24	14	$R_{14}P_{10}D_7A_7$
2) *Procedeul D-lui* G. Popovici.									
a) Construim unghiul A′IA$_1$ egal cu $(\omega - 90^\circ)$	6	7		3	4				
b) Ridicăm în I o perpendiculară pe IA$_1$ și obținem punctul de tangență β.	4	1		2	1				
c) Ridicăm în β o perpendiculară pe Iβ	4	1		2	1				
d) Luăm arcul C′α egal cu arcul C′β.		2			1				
e) Unim C cu α și obținem punctul B.	2			1					
f) Unim punctele găsite deja A și B și obținem a treia latură a triunghiului căutat	2			1					
	18	11		9	7	45	29	16	$R_{18}P_{11}D_9A_7$

Din *tabelele* acestea conchidem, că procedeul de construcțiune al D-lui *Victor Ionescu* este *mai simplu* și *mai exact,* de cît procedeul D-lui *G. Popovici;* căci pentru *primul* avem: C=38, N=24, M=14, iar pentru *al doilea* avem: C=45, N=29, M=16.

Pentru simplicitate am suprimat construcțiunea cercului ce trebue să ducem prin A′,B′,C′, și trasarea dreptelor IA′, IB′, IC′, *de*

cari are nevoe ambele procedeuri, cari construcţii măresc coeficienţi la ambele procedeuri cu un acelaşi număr.

Soluţiune dată de D-l G. G. Urechiă.

Indicarea cestiunei şi soluţiunei	Operaţiuni					Coeficienţi			Formula
	R	P	L	D	A	C	N	M	
Procedeul D-lui V. Ionescu									
Descrim cîte un arc din punctele date A', B', C'		3			3				
Aflăm centrul I al circonferenţei unind intersecţiile arcelor descrise sus . . .	4			2					
Descrim circonferenţa IA'		2			1				
Intersecţiunile acestei circonferinţe cu arcul descris din B' le putem lua ca punctele *b* şi *c*. Din A' cu Ac ca rază tăem circonferinţa în *d* . . .		2			1				
Din C' cu raza C'*d* tăem circonferinţa în *a*		2			1				
Aflăm mijlocul α al cercului. *ab* . .	2	2		1	2				
Aflăm pe β descriind din C' un arc cu raza αC'. Asemenea pe γ, din B' cu B'α ca rază.		4			2				
In β ridicăm o perpendiculară pe rază, servindu-ne de cercul descris din C' cu raza Cβ.	6			3					
Ducem 1C' şi obţinem C, pe care îl unim cu α	4			2					
Ducem 1B' şi obţinem B, pe care îl unim cu γ	4			2					
	20	15		10	10	55	35	20	$R_{20}P_{15}D_{10}A_{10}$
Procedeul D-lui G. Popovici.									
Descrim ca şi sus circonferenţa IA' .	4	5		2	4				
Ducem dreptele IA', IB', IC' . . .	6			3					
Ducem raza IS perpendiculară pe IB'.									
Arcul B'S măsoară unghiul $\frac{A}{2}$	2	2		1	2				
Din A_1 diametral opus lui A' luăm $A_1M=A_1N=C'S$.		3			1				
Luăm arcul B'S şi îl purtăm din M şi N dincolo de A_1. Obţinem γ şi β		4			2				
Ducem în β o perpendiculară pe rază, ca mai sus	6			3					
Unim A cu β şi apoi C cu B . . .	4			2					
	22	14		11	9	56	36	20	$R_{22}P_{14}D_{11}A_9$

Prima soluţiune este deci mai simplă şi mai exactă ca a doua, numărul liniilor fiind acelaşi.

Această problemă a mai fost rezolvită şi de D-l *N. G. Muzicescu* (Iaşi).

Notă. Ambele procedeuri se mai pot simplifica. Așa dacă presupunem la primul procedeu că punctele b și c se confundă cu B' ajungem la următoarea construcție. Descrim cercul IA'. Din C' cu raza C'B' și din A' cu raza A'B' descrim arce cari ne dau pe a și d. Luăm mijlocu α al lui ad și din B' cu $a\alpha$ ca rază găsim pe β și γ. Ridicăm în β o perpendiculară și găsim 2 vîrfuri ale triunghiului pe liniile IB' și IC' pe cari le unim cu α și γ. Cu modul acesta formula construcțiunei este: R_2, P_{14}, D_{10}, A_5 care dă C=53, N=34, M=19.

La al doilea procedeu se poate face o reducțiune observînd că dacă din A_1, diametral opus cu A se descrie o circonferență cu raza egală cu coarda B'C', obținem punctele de tangentă. Formula devine ast-fel R_2, P_4, D_{10}, A_5, care dă C=43, N=28, M=15. Construcția aceasta însă se depărtează mult de cea dată de D-l *G. Popovici.* I. I.

Problema 256. — *Dreapta care unește punctele unde două diametre conjugate ale unei elipse întîlnesc cercul circumscris dreptunghiului construit pe axe, este tangentă la elipsă. Proprietatea analoagă la hiperbolă.* (C. Lupu.)

Soluțiune dată de D-l G. C. Dobrovici (Lic. Bărlad).

Se știe că cercul considerat este locul vîrfurilor tutulor dreptunghiurilor circumscrise elipsei; de altă parte, diagonalele unui asemenea dreptunghiu formează un sistem de diametre conjugate ale elipsei, după însăși definiția a acestor diametre. Prin urmare, toate diametrele conjugate terminate pe cercul în cestiune vor fi diagonalele unui dreptunghiu ale cărui laturi sînt tangente elipsei.

Soluțiune dată de D-l C. A. Iliovici (Student, Iași) și *C. Țițirigă* (Sc. Sp. de Art. și Geniu).

Fie $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=o$ și $x^2+y^2-(a^2+b^2)=o$ ecuațiunile elipsei și cercului considerat, iar $y=mx+n$ aceia a unei drepte D. Dreptele duse din centru la punctele unde D taie cercul vor fi representate de ecuațiunea:

$$x^2+y^2-(a^2+b^2)\frac{(y-mx)^2}{n^2}=o$$

sau

$$\left\{n^2-(a^2+b^2)\right\}\frac{y^2}{x^2}+2m(a^2+b^2)\frac{y}{x}+\left\{n^2-(a^2+b^2)m^2\right\}=o.$$

Cînd aceste drepte sînt diametre conjugate, avem:

$$\frac{n^2-(a^2+b^2)m^2}{n^2-(a^2+b^2)}=-\frac{b^2}{a^2} \quad \text{sau} \quad n=\pm\sqrt{b^2+a^2m^2},$$

atunci D are drept ecuațiune:

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2 m^2},$$

adică chiar ecuațiunea tangentei la elipsă în funcțiune de coeficientul unghiular.

D-l *C. Țițirigă* s'a servit de coordonate tangențiale, în fond soluția D-sale nu diferă mult de cea precedentă.

***Problema 257.** — *Dintr'un punct fix* O *al unei drepte date* AB, *se ia pe această dreaptă distanțele* OA′ *și* OB′, *respectiv egale cu rădăcinile ecuațiunei:*

$$2mx^2 - 2(a+b)x + mab = o.$$

Să se determine m *astfel ca punctele* A′ *și* B′ *să fie conjugate armonic în raport cu punctele* A *și* B. **(C. Țițirigă.)**

Soluțiune dată de D-nii: N. G. Muzicescu (Student, Iași) *și I. Sichitiu* (Școala Sp. de Art. și G.).

Dacă patru puncte A, B, A′, B′ formează o diviziune armonică, A fiind conjugat cu B și A′ cu B′, și dacă se ține seama și de semnele segmentelor trebue să avem în mărime și semn.

$$(1) \quad \frac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}} = -\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}}.$$

Or dacă se socotesc distanțele AA′, BA′ de la același punct de origină O, și se ține seama și de semnele segmentelor, avem ori care ar fi poziținea lui O:

$$\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} \qquad \overline{AB'} = \overline{OB'} - \overline{OA}$$

$$\overline{BA'} = \overline{OA'} - \overline{OB} \qquad \overline{BB'} = \overline{OB'} - \overline{OB}.$$

Substituind aceste valori în (1), avem:

$$\frac{\overline{OA'} - \overline{OA}}{\overline{OA'} - \overline{OB}} = -\frac{\overline{OB'} - \overline{OA}}{\overline{OB'} - \overline{OB}},$$

de unde deducem:

$$(2) \quad 2(\overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OA'} \times \overline{OB'}) = (\overline{OA} + \overline{OB})(\overline{OA'} + \overline{OB'}).$$

Relațiune care reprezintă condițiunea, ca cele patru puncte A, B, A′, B′ să formeze o diviziune armonică, și aceasta *ori care ar fi poziținea punctului* O [1]).

[1]) De și aceste detaliuri sînt cunoscute și se găsesc tratate în multe cărți de geometrie, am crezut necesar a le reproduce aci, ele fiind indispensabile pentru rezoluțiunea problemei în mod general; altfel ar trebui distinse atîtea cazuri cîte poziținni ar putea ocupa punctul O în raport cu A, B, A′, B′.

A. G. I.

In cazul problemei actuale $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ sînt două lungimi cunoscute α și β, $\overline{OA'}$ și $\overline{OB'}$ reprezintă rădăcinele ecuațiunei date, deci:

$$\overline{OA'} \times \overline{OB'} = \frac{ab}{2}$$

$$\overline{OA'} + \overline{OB'} = \frac{a+b}{m},$$

substituind aceste valori în (2) avem:

$$2\alpha\beta + ab = \frac{a+b}{m}(\alpha+\beta),$$

de unde:

$$m = \frac{(a+b)(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta+ab}.$$

Au mai rezolvit această problemă D-nii: *V. V. Cambureanu, G. C. Dobrovici, B. Paraschivescu* și *J. Wittner.*

Observație de D-l N. G. Muzicescu. Dacă se consideră două ecuațiuni de gradul al doilea:

$$x^2+px+q=o \quad \text{și} \quad x^2+p'x+q'=o,$$

și dacă se ia pe o dreapta dată, plecînd de la un punct fix O, lungimele OA, OB, OA', OB' respectiv egale cu rădăcinile celor două ecuațiuni; pentru ca cele patru puncte A, B, A', B', să formez o diviziune armonică, trebue să avem:

$$(3) \quad 2(q+q')=pp',$$

relațiunea care se deduce înlocuind în (2) pe: $\overline{OA} \times \overline{OB}$ cu q, $\overline{OA'} \times \overline{OB'}$ cu q', $\overline{OA} + \overline{OB}$ prin $-p$ și $\overline{OA'} + \overline{OB'}$ prin $-p'$.

Daca trei din coeficienți p, p', q și q' sînt cunoscute relația (3) permite a determina valoarea celui de al patrulea.

* **Problema 260.**— *Să se găsească un număr prim egal cu suma a două numere prime consecutive.* (I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: V. V. Cambureanu, G. C. Dobrovici (Bărlad); *L. Hermann* (București); *A. Iliovici, N. G. Muzicescu* (Studenți, Iași); *C. Ionescu* (Iași); *C. Țițirigă, G. G. Urechiă* (Elevi ai Scoalei Speciale de Artilerie și Geniu) *M. Mateescu* (București) și *G. Iliovici* (Iași).

Numerile prime mai mari ca 2 fiind impare, suma a ori-căror două din ele va fi un număr par, altul de cît 2, și prin urmare nu poate fi un număr prim. De aci rezultă că trebue a ne limita numai la numerile prime 1, 2, 3. Avem:

$$1+2=3, \qquad 2+3=5.$$

Numerele prime 3 și 5 urmînd numerilor prime 2 și 3, ambele egalități precedente răspund enunciului. Problema are deci două soluțiuni.

***Problema 268.** — *Să se elimine α între ecuațiunile:*

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = tg\alpha - cotg\alpha$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = tg\alpha + cotg\alpha.$$

(A. G. Ioachimescu.)

Soluțiunea dată de D-nii: *V. V. Cambureanu; G. C. Dobrovici*, (liceul Codreanu, Bîrlad); *A. Iliovici; E. Nițescu* (Iași); *M. Mateescu, C. S. Stănulescu* (Sc. de P. și S.); *C. Țițirigă, G. G. Urechiă* (Sc. Sp. de Art. și Geniu); *I. Nicolaescu* (Craiova); *L. Hermann*.

Dacă ridicăm la pătrat cele două egalități, le adunăm și scădem succesiv, obținem:

$$(1)\quad x^2+y^2 = 2(tg^2\alpha + \cotg^2\alpha) = \frac{2(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 4$$

$$(2)\quad (x^2-y^2)\cos 2\alpha + 4xy\sin\alpha\cos\alpha = 4.$$

Din (1) deducem:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2+4}}.$$

Substituind în (2) avem:

$$(x^2-y^2)\sqrt{1-\frac{8}{x^2+y^2+4}} + \frac{4\sqrt{2}xy}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = 4$$

sau

$$(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2-4} + 2xy\sqrt{2} = 4\sqrt{x^2+y^2+4}.$$

***Problema 271.** — *Să se rezolve sistemul:*

$$x^4\sqrt{x} + \sqrt[3]{y^2} = a$$
$$x\left(x^3\sqrt{x} + y\sqrt[6]{x^3y^2}\right) + y^2\left(x^3 + y\sqrt{y}\right) = b.$$

(C. Țițirigă.)

Soluțiune dată de D-nii: N. Alexandrescu (Elev Lic. Bărlad); *V. V. Cambureanu* (ib.); *G. C. Dobrovici* (ib.); *G. Iliovici* (Elev Lic. Național, Iași); *L. Hermann* (Lic. M. B. București); *M. Mateescu* (Elev Sc. de P. și S.); *G. Mihăilescu* (Student, București); *N. G. Muzicescu* (Student, Iași); *I. Nicolaescu* (Elev Lic. Craiova);

Emil Nițescu (Lic. Național, Iași); *B. Paraschivescu* (Sc. de P. și S.); *A. I. Pinchis* (Lic. Național, Iași); *I. Sichitiu* (Sc. Sp. de A. și G.); *G. G. Urechiă* (ib.); *C. Vintilă* (Lic. M. B. București); *J. Witmer* (Sc. de P. și S.)

Punînd:

$$(1)\quad \begin{cases} x\sqrt{x}=u \\ \sqrt[3]{y^2}=v \end{cases}$$

ecuațiunile propuse devin:

$$u+v=a$$
$$u^5+u^3v^2+u^2v^3+v^5=b$$

sau

$$(2)\quad \begin{cases} u+v=a \\ (u^3+v^3)(u^2+v^2)=b. \end{cases}$$

Or:

$$u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=a[(u+v)^2-3uv]=a(a^2-3uv)$$
$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=a^2-2uv.$$

Substituind în (2), aceste ecuațiuni devin:

$$u+v=a$$
$$a(a^2-3uv)(a^2-2uv)=b.$$

Cea de a doua ecuațiune rezolvată în raport cu uv ne dă:

$$uv=\frac{5a^3\pm\sqrt{a^6+24ab}}{12a}.$$

Cunoscînd suma și produsul necunoscutelor u și v acestea vor fi date prin ecuațiunile:

$$z^2-az+\frac{5a^3\pm\sqrt{a^6+24ab}}{12a}=0$$

care dă:

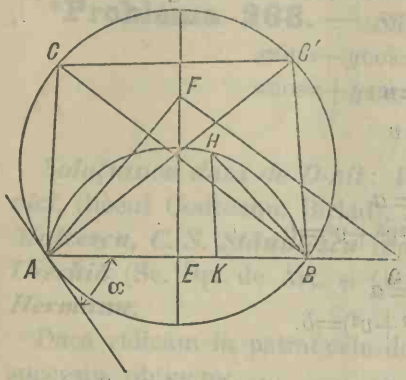
$$\begin{matrix} u=x\sqrt{x} \\ v=\sqrt[3]{y^2} \end{matrix}=\begin{cases} \dfrac{6a^2\pm\sqrt{36a^4-6a^3\mp12\sqrt{a^6+24ab}}}{12a}. \end{cases}$$

Insemnînd cu A și B două din determinațiunile membrului al doilea, vom avea:

$$x=\sqrt[3]{A^2}$$
$$y=\sqrt{B^3}.$$

***Problema 289.**— *Să se construiască un triunghiu, cunoscînd un unghiu latura opusă, și suprafața, care este echivalentă cu un patrat de latură dată.* **(P. I. Suchar.)**

Soluțiune dată de D-nii: N. G. Muzicescu (Iași); *I. Penescu* (București); *C. Țițirigă* (ib.) și *T. M. Vladimirescu* (R.-Vîlcei).



Fie AB latura dată, cunoscînd unghiul opus acestei laturi, rezultă ca cel de al treilea vîrf al triunghiului se va găsi pe segmentul capabil de unghiul dat α și descris pe AB. Suprafața triunghiului trebuind să fie echivalentă cu un patrat de latură dată a, rezultă ca înălțimea triunghiului căutat va fi dată de relația:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\times h = a^2.$$

Pentru *a construi* lungimea h, pe o perpendiculară ridicată pe mijlocul lui AB luăm lungimea $\overline{EF}=a$, unim A cu F și în F ridicăm pe AF perpendiculara FG segmentul de dreapta EG, va fi egal cu înălțimea căutată h. In adevăr în triunghiu dreptunghiu AFG avem:

$$\overline{EF}^2=a^2=AE\times EG=\frac{AB}{2}\times EG$$

deci:

$$EG=h,$$

h fiind cunoscut nu avem de cît să ducem o paralelă la AB și la distanța h. Această paralelă va tăia circonferința în punctele C și C_1, unul sau altul va reprezenta cel de al treilea vîrf al triunghiului căutat.

Pentru ca problema să fie posibilă, trebue să avem:

$$h \leq \overline{BD}$$

sau

$$\frac{2a^2}{\overline{AB}} \leq \frac{\overline{AB}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

sau

$$4a^2 \leq \overline{AB}^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Soluțiune dată de D-ra Maria G. Rugescu (Studentă, Iași) *și de D-nii: G. C. Dobrovici* (Bîrlad); *L. Hermann* (București); *Sp. Popovici* (Iași); *I. Schitiu* (Sc. Sp. de Art. și Geniu); *Gh. Gh. Urechiă* (ib.); *J. Wittner* (Sc. de P. și S.)

Aceste soluțiuni diferă de cea precedentă, numai prin modul de construcție al înălțimii triunghiului. Se descrie pe AB ca diame-

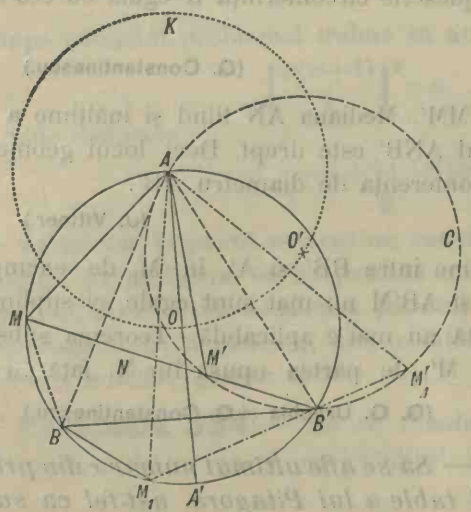
tru o jumătate de circonferință, din punctul B se ea lungimea $BM=a$ și din M se scoboară perpendiculara MN pe AB, segmentul de dreapta BN, reprezintă jumătatea înălțimei căutate; căci avem în triunghiul AMB:

$$\overline{AM}^2=AB\times MN \quad \text{deci} \quad MN=\frac{a^2}{AB}=\frac{1}{2}h.$$

Au mai rezolvit această chestiune, fără a da construcția geometrică a înălțimii, D-nii: *N. Alexandrescu, V. V. Cambureanu, G. Constantinescu, G. C. Măinescu, E. Nițescu, I. Nicolescu, A. I. Pinchis* și *C. Vintilă*.

***Problema 299.**— *Într'un cerc* O *se dă diametrul* AA', *perpendicular pe coarda* BB' *și un punct* M *pe circonferință. Unim* B *cu* M *și pe* B'M *luăm* B'M'=BM. 1) *Să se demonstreze că triunghiul* MAM' *este isoscel;* 2) *Să se găsească condiția pentru ca acest triunghiu să fie echilateral.* (L. Hermann.)

Soluțiune dată de D-ra Maria G. Rugescu (Studentă, Iași), *și de D-nii: N. Alexandrescu, V. V. Cambureanu* și *G. C. Dobrovici* (Bârlad); *N. G. Muzicescu, E. G. Nițescu* și *A. I. Pinchis* (Iași); *G. Constantinescu, I. Nicolaescu* și *G. C. Măinescu* (Craiova); *J. Wittner* (Focșani); *Gh. Michăilescu* (Huși); *I. Pitulescu* (Turnu-Severin); *St. N. Corbeanu* (Călărași); *G. G. Urechiă* și *G. Manoliu* (Elevi ai Șc. Sp. de Artilerie și Geniu, București).



1) Ducem dreptele AB, AB'. Triunghiurile B'M'A și BMA sînt egale căci au AB=AB', ca oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei, BM = B'M' prin construcție și $\sphericalangle AB'M'=\sphericalangle ABM$, ca având aceiași măsură. Rezultă dar că AM=AM' și prin urmare triunghiul AMM' e isoscel.

2) Ca triunghiul AMB' să fie echilateral e de ajuns ca el să aibă un unghiu de 60°, căci el e deja isoscel.

Insă pentru ca $\sphericalangle AMM'$ să fie de 60^0 trebue ca AB' să fie latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Dar AB fiind egal cu AB', rezultă că și aceasta e latura triunghiului echilateral înscris. Reese de aci că și BB' trebue să fie latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Aceasta e condițiunea căutată.

Observațiuni. 1) Să presupunem că punctul M se mișcă pe circonferință, și să căutăm locul punctului M'. Unghiul AMM' e constant ca având de măsură $\frac{1}{2}$ arc. AB'. Deci și egalul său $AM'M$ e constant, și prin urmare și suplimentul său $AM'B'$ este constant. Deci locul lui M' este o circonferință trecînd prin A și B'. Dar și arcul AB' e capabil de suplimentul lui AMB'. Deci locul punctului M' e o circonferință egală cu cea dată și având pe AB' ca coardă comună.

(G. Constantinescu, J. Wittner și G. C. Dobrovici.)

2) Locul punctului M', cînd M e mobil, fiind o circonferință C egală cu cea dată, coarda comună AB' este perpendiculară pe linia centrelor OO' și o întîlnește în mijlocul ei. Deci $AO=AO'$. Prin urmare dacă coarda BB' se deplasează paralel cu ea însăși, centru O' al cercului C descrie circonferința K egală cu cea dată și având centrul în A.

(G. Constantinescu.)

3) Fie N mijlocul lui MM'. Mediana AN fiind și înălțime a triunghiului AMM', unghiul ANB' este drept. Deci locul geometric al punctului N este circonferența de diametru AB'.

(J. Vittner.)

4) Dacă punctul M vine între BB' și A', în M_1 de exemplu, atunci unghiurile ABM și $AB'M$ nu mai sunt egale, ci suplimentare, și demonstrația dată nu mai e aplicabilă. Teorema subsistă însă dacă luăm punctul M'_1 de partea opusă lui M_1 față cu B'.

(G. G. Urechiă și G. Constantinescu.)

***Problema 330.**— *Să se afle ultimul număr x din prima linie orizontală a unei table a lui Pitagora, ast-fel ca suma numerilor înscrisă în această tablă să fie egală cu un număr*

dat a. Care sînt condițiile de posibilitate ale problemei. Aplicate în cazul cînd $a=225$. **(V. V. Cambureanu.)**

Soluție data de D-nii: N. Alexandrescu (Lic. Codreanu, Bârlad); *G. Anastasescu* (Sc. fiilor de militari, Craiova); *Petre Dumitrescu* (ib); *N. G. Muzicescu* (Student, Iași); *G. C. Măinescu* (Lic. Carol, Craiova); *I. Nicolaescu* (ib.); *Emil Nițescu* (Lic. Național, Iași); *A. I. Pinchis* (ib.); *N. Sichitiu* (Sc. fiilor de m. Craiova); *C. Țițirigă* (Sc. Sp. de Art. și Geniu); *G. G. Urechiă* (ib.); *J. Wittner* (Sc. de P. și Sos.); *G. Constantinescu, G. C. Dobrovici, Th. M. Vladimirescu, L. Hermann.*

Insemnînd cu S suma numerilor din prima linie, avem pentru sumele numerilor înscrise în primele x linii:

Prima linie: $1+2+3+...+x=\frac{x(x+1)}{2}=S,$

A doua » $2+4+6+...+2x=2S,$

A treia » $3+6+9+...+3x=3S,$

. . . . . .

ax^2 » $x+2x+3x+...+x^2=xS.$

Suma totală va fi deci:

$$S+2S+3S+...+xS=S^2=\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2.$$

Dupe enunciul problemei trebue să avem:

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2=a,$$

de unde deducem:

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+8\sqrt{a}}}{2},$$

căci soluțiunea negativă evident nu convine chestiunei.

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca a să fie un patrat perfect b^2, apoi $1+8b$ asemenea patratul perfect al unui număr, care neapărat va fi fără soț, deci x întreg.

Pentru $a=225$, găsim: $x=5$.

***Problema 334.**— *Să se rezolveze ecuația:*

$$ax^4+[a(b-4)+1]x^3+[b-4-a(4b+32)]x^2-(32ab+4b+32)x-32b=o,$$

(G. G. Urechiă.)

Soluțiune dată de D-nii: V. V. Cambureanu (Bârlad), *L. Her-*

man (București), *N. G. Musicescu* (Student, Iași), *I. Nicolaescu* (Elev al Liceului Carol I, Craiova), *E. G. Nițescu* și *A. I. Pinchis* (Elevi ai Liceului Național din Iași), *C. Țițirigă* (Elev al Școalei Speciale de Artilerie și Geniu), *C. Vintilă* (București); *J. Witner* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *N. Sichitiu* (Sc. M. Craiova); *St. N. Corbeanu* (Călărași).

Din ecuația dată deducem prin transformări succesive:

$$ax^4+a(b-4)x^3+x^3+(b-4)x^2-a(4b+32)x^2-32abx-(4b+32)x-32b=0,$$
$$(ax+1)x^3+(ax+1)(b-4)x^2-(ax+1)(4b+32)x-(ax+1)32b=0,$$
$$(ax+1)[x^3+(b-4)x^2-(4b+32)x-32b)]=0,$$
$$(ax+1)(x^3+bx^2-4x^2-4bx-32x-32b)=0,$$
$$(ax+1)[(x+b)x^2-4(x+b)x^2-(x+b)32]=0,$$
$$(ax+1)(x+b)(x^2-4x-32)=0,$$

care se desface în următoarele trei ecuațiuni:

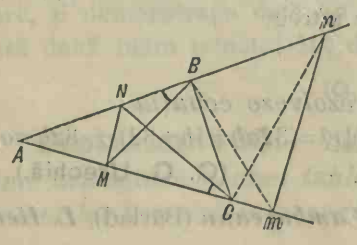
$$ax+1=0, \qquad x+b=0, \qquad x^2-4x-32=(x+4)(x-8)=0,$$

ale căror rădăcini sînt:

$$x'=-\frac{1}{a}, \qquad x''=-b, \qquad x'''=-4, \qquad x''''=8.$$

* **Problema 342.**— *Pe latura* BA *a unui triunghiu* BAC, *ducem perpendiculara* BC, *care tae latura* AC *în* C. *Luăm pe prelungirile lui* AC *și* AB *punctele* M *și* N *așa ca* $\measuredangle$ ABM = $\measuredangle$ ACN. *Să se arate că triunghiul* AMN *este dreptunghiu.* **(I. Ionescu.)**

Soluțiune dată de D-nii: St. N. Corbeanu (Călărași); *N. G. Musicescu* (Student, Iași); *G. Alexandrescu* (Elev al Liceului din Bârlad); *M. P. Niculescu* (Elev Școala Militară, Craiova); *I. Nicolaescu* (Elev al Liceului Carol I, Craiova); *E. Nițescu* și *A. I. Pinchis* (Elevi ai Liceului Național, Iași); *J. Vittner* (Elev al Sc. de Poduri și Șosele); *L. Hermann* (București); *Gr. Michăilescu* (Huși); *G. Giușcă* (Sc. Sp. de Art. și Geniu); *P. Pompilian.*



Unghiurile NBM și NCM fiind egale, punctele B și C sînt pe un același arc de cerc trecînd prin M și N. Patrulaterul BCMN e deci inscriptibil și prin urmare unghiurile opuse NMC, NBC sînt suplimentare. Dar $\measuredangle$NBC = 1^{dr} căci BC a fost dus per-

pendicular pe AB. Deci și $\sphericalangle NMC = 1^{dr}$, și triunghiul AMN este dreptunghiu în M.

Soluțiune dată de D nii: *C. Țițirigă* (Elev al Școalei Speciale de Artilerie și Geniu); *V. V. Cambureanu* (Bârlad) și *J. Wittner*.

Unghiurile ABM, ACN fiind egale, dreptele BN și CN sînt antiparalele în raport cu laturile AC, AB. Deci și dreptele BC, MN antiparalele și prin urmare $\sphericalangle NMC = \sphericalangle CBN = 1^{dr}$. c.c.e.d d.

PROBLEME PROPUSE

*365. Produsul a două numere consecutive sporit cu dublul patratului celui mai mic, este egal cu diferența a două cuburi, micșorată cu diferența a două patrate. (ST. N. CORBEANU.)

*366. Dîndu-se ecuațiunile:

$$(1+\lambda)x^2-(5\lambda+1)x+3\lambda=o$$
$$(2\lambda-1)x^2+(1-9\lambda)x-3\lambda=o.$$

Să se determine λ astfel:

1) Cele două ecuațiuni să aibă o rădăcină comună.

2) Rădăcinele unei ecuațiuni să fie egale cu un același multiplu de rădăcinele celeilalte. (C. ȚIȚIRIGĂ.)

*367. Se dă un unghiu DAE înscris într'o circonferință. Se duc tangentele în D și E și se prelungesc pînă la întîlnirea lor în B și C cu tangenta în A. Prin centrul O al circonferinței se duce o secantă arbitrară, care întîlnește laturile AD și AE ale unghiului, respectiv în punctele F și G. Se cere locul punctului M de întîlnire al dreptelor BF și GC. (N. G. MUZICESCU).

*368. Cînd într'un triunghiu se dă relația:

$$\alpha\beta = p(p-b),$$

acel triunghiu este isoscel.

(α și β reprezintă razele cercurilor exînscrise corespunzătoare laturilor a și b). (I. NICOLAESCU.)

*369. Să se construiască un triunghiu avînd vîrful, punctul de întîlnire al medianelor și punctul de întîlnire al înălțimelor în trei puncte date. (J. WITTNER.)

*370. Din vîrfurile A, B și C ale unui triunghiu se duc respectiv înălțimea, mediana și bisectrița. Se formează ast-fel, prin întretăerea acestor trei drepte, un triunghiu DEF. Să se găsească suprafața acestui triunghiu în funcțiune de elementele triunghiului ABC. (L. HERMANN.)

*371. Fie P un polinom în raport cu o literă x, P_a rezultatul obținut cînd se înlocuește litera x cu litera a; fie Q cîtul diviziunei lui $P—P_a$ prin $x—a$. Operînd asupra polinomului Q în acelaș mod ca asupra polinomului P, vom obține un nou polinom Q′ și așa mai departe. Să se calculeze polinoamele Q, Q′... cînd se ia: $P=x^6$ și să se arate că polinomul P poate fi pus sub forma:

$$P=x^6=a^6+A_1(x—a)+A_2(x—a)^2+....+A_6(x—a)^6$$

$A_1, A_2.....A_6$ fiind niște coeficienți independenți de x.

(A. G. IOACHIMESCU.)

*372. Să se arate prin exemple, că întrebuințînd de 5 ori oricare cifră și semnele algebrice, se pot face expresiuni a căror valoare să fie 14, iar întrebuințîndu-se de 6 ori ori-care cifră și semnele algebrice, se pot face expresiuni a căror valoare să fie 15 [1]). (I. IONESCU.)

373. Să se determine limita expresiunei:

$$y=[1+\log(1—x)+\sin x]^{\frac{1}{x}} \quad \text{pentru } lim.\, x=o.$$

(BOGDAN IONESCU.)

374. O dreaptă AB, de lungime constantă l, se mișcă ast-fel ca extremitățile sale alunecă pe două drepte rectangulare Ox și Oy, viteza punctului A fiind la fie-care moment: $K:\overline{OA}$. Se cere: 1) A găsi centrul instantaneu de rotație și locul acestui punct; 2) M fiind punctul de contact al lui $\overline{AB}$ cu înfășurata sa (C), să se determine mișcarea relativă a lui M pe $\overline{AB}$; 3) Viteza și acceleraținea lui M pe curba C, precum și timpul ce 'l pune M pentru a percurge arcul acestei curbe coprins în unghiul $x\,Oy$.

(P. I. SUCHAR.)

[1]) La această problemă se primesce și soluțiuni parțiale.

Articolele și problemele însemnate cu *, se referă la matematicele elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articolele trimese de D-nii: **I. Longinescu** și **G. G. Urechiă.**

2) Probleme propuse de D-nii: **Al. Buga, Gr. N. Makarie, N. G. Muzicescu, E. Nițescu** și **C. Țițirigă.**

3) Probleme rezolvite de D-nii: **N. Alexandrescu** (283, 312, 14, 22, 24, 26, 28, 35, 37, 43, 44, 47, 50, 51, 52, 54, 55, 62); **V. G. Angelescu** (351); **M. Bacan** (318); **V. V. Cambureanu** (247, 71, 79, 97, 312, 14, 16, 17, 18, 21, 22, 24, 26, 28, 29, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 47, 51, 52, 53, 55); **G. Constandinescu** (317, 21, 22, 26, 28, 33, 35, 37); **St. N. Corbeanu** (299, 302, 40, 43, 44, 59, 62); **G. C. Dobrovici** (261, 83, 97, 302, 12, 14, 17, 21, 24, 25, 26, 28, 36); **P. Dumitrescu** (318); **N. G. Georgescu** (333, 44, 52, 55); **G. Giușcă** (318, 28, 33, 52, 53, 55, 59); **T. Grigorescu** (334); **L. Hermann** (247 65, 83, 302, 06, 11, 14, 17, 18, 21, 22, 24, 26, 28, 29, 33, 55, 40, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 55, 59); **A. Iliovici** (261, 80, 84, 94, 302, 07, 14); **G. Iliovici** (261); **C. Ionescu** (Ploești) (351); **C. Ionescu** (Galați) (323, 61); **I. M. Ionescu** (283); **Virg. Ionescu** (323); **I. Kanner** (318); **C. Lăzărescu** (321, 22); **G. C. Măinescu** (317, 21, 22, 24, 38, 53); **A. Makarovici** (321, 29, 33); **G. Manoliu** (312); **I. Moscuna** (247, 74, 80); **N. G. Muzicescu** (247, 79, 80, 83, 97, 302, 06, 07, 12, 14, 17, 18, 21, 22, 24, 26, 33, 35, 37, 38, 40, 41, 45, 47, 59, 60, 61); **G. Mihăilescu** (299); **I. Nicolaescu** (297, 302, 14, 16, 17, 18, 21, 22, 24, 28, 29, 35, 38, 39, 40, 43, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 55); **M. P. Nicolescu** (317, 47); **E. Nițescu** (279, 83, 306, 10, 14, 16, 21, 22, 23, 24, 29, 33, 35, 37, 39, 43, 45, 47, 51, 52, 53, 54); **N. Patriciu** (333); **A. I. Pinchis** (279, 83, 306, 14, 21, 22, 24, 28, 29, 35, 43, 47, 51, 53, 59); **I. Pitești eanu** (284); **P. Pompilian** (333, 47, 52); **C. Popovici** (293, 305, 07, 16); **Sp. Popovici** (314); **D-ra M. Rugescu** (302, 07, 12, 14, 22, 41); **I. Sichitiu** (283, 97); **N. Sichitiu** (317, 22, 28, 33); **G. G. V. Stănescu** (306, 07); **C. Țițirigă** (236, 77, 83, 84, 94, 97, 302, 03, 08, 14, 15, 18, 19, 21, 24, 27, 331, 33, 35, 40, 41, 47, 48, 50, 51, 52, 54, 56); **G. G. Urechiă** (258, 74, 77, 83, 84, 302, 03, 06, 07, 12, 14, 19, 26, 333, 40, 41, 48); **C. Vintilă** (283, 88, 322, 33, 52); **Th. M. Vladimirescu** (311); **J. Wittner** (314, 18, 22, 24, 29, 31, 33, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 47).

Probleme nerezolvite: 22, 106, 110, 113, 118, 127, 171, 172, 176, 204, 206, 249, 253, 275, 282, 295, 304, 320, 332, 346, 349, 357, 358, 363, 364.

Notă. — De și 97% din răspunsurile primite la circulara noastră din numărul trecut, relativă la sporirea formatului și abonamentului, au fost favorabile acestei sporiri; însă neprimind un răspuns, într'un sens sau în altul, de la *majoritatea* abonaților noștri, menținem și pentru anul acesta, același preț pentru abonament.

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco: D-lui V. Cristescu, inginer, serviciul liniei Cernavoda-Constanța, la Cernavoda; sau D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Sub-Directorul Fabricei de Tutun, Belvedere, București; sau D-lui Bogdan Ionescu, Profesor la Gimnaziu, Rîmnicu-Vîlcei; sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19, București; sau D-lui N. Nicolescu, Inginer, Strada Mihai-Vodă 9, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Anul I, II și III al Gazetei matematice formează trei volume broșate de 288, 296 și 300 pagini și se vinde cu prețul de 10 lei fie-care volum.

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele, schimbările de adrese și reclamațiunile trebuesc trimese D-lui **I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19, București.**