# GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL IV.

**NUMĂRUL 2. — OCTOMBRE 1898.**

## SUMARUL

1. Asupra unei probleme de analiză . . . . *P. I. Suchar*
2. Generalizarea problemei 79 . . . . . *I. Ionescu*
3. Bibliografie.
4. Chestiuni de examen.
5. Probleme rezolvite: 236, 261, 279, 320, 322.
6. Probleme propuse: 375—382.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacția „*Gazetei Matematice*“ se compune din următoarele persoane :

*Alexandrini Octav*, . . . *Inginer.*
*Constantinescu Tancred*, . . *Inginer.*
*Cristescu Vasile*, . . . *Inginer.*
*Davidescu Emanoil*, . . . . *Inginer.*
*Erbiceanu Caton*, . . . . . *Inginer.*
*Ioachimescu Andrei*, . . . . *Inginer*, licențiat în matematici.
*Ionescu Bogdan*, . . . . . *Profesor*, licențiat în matematici.
*Ionescu Ion*, . . . . . *Inginer.*
*Lupu Constantin*, . . . . . *Inginer.*
*Nicolescu Nicolae*, . . . . . *Inginer.*
*D-ra Pompilian Constanța* . *Directoară de Institut*, licențiată în matematici.
*Roco Mihail*, . . . . . *Inginer.*
*Țițeica Gheorghe*, . . . . . *Profesor*, licențiat în matematici.
*Zottu G. Ioan*, . . . . . *Inginer.*

# ASUPRA UNEI PROBLEME DE ANALIZA.

In „*Gazeta Matematică*“ No. 9 din Anul III sub titlul problemelor propuse la *Facultatea de Științe*, propusesem problema următoare:

*Să se determine două funcțiuni* $f(x)$ *și* $\varphi(y)$ *ast-fel ca expresiunea :*

$$(1) \qquad \frac{f(x)+\varphi(y)}{x^2-y^2},$$

*să fie o funcțiune de produsul* $xy$.

D-l *S. Nicolescu* și eu, am dat cîte o soluțiune a problemei, formînd ecuațiunea diferențială, la care satisfac funcțiunile necunoscute [1]), lipsa de spațiu m'a împedicat a da acestei chestiuni toate desvoltările, pe care le dasem la conferință, și asupra cărora revin aici. Aceste desvoltări se basează pe oare cari considerațiuni generale din *teoria funcțiunilor*.

Dupe enunciul problemei nu se face nici o ipoteză asupra naturei funcțiunilor $f(x)$ și $\varphi(y)$, singura condiție este ca ele să satisfacă ecuațiunea (1). Voiu face aici ipoteza următoare: cele două funcțiuni $f(x)$ și $\varphi(y)$ sînt uniforme în planul variabilelor $x$ și $y$, și nu au, atît la distanța finită cît și la infinit, alte puncte critice de cît poluri sau puncte singulare esențiale. Prin urmare în domeniul unui punct $a$ putem scrie:

$$(2) \qquad f(x)=\sum_{m=-\mu}^{m=+\mu'} A_m(x-a)^m \qquad \varphi(y)=\sum_{n=-\nu}^{n=+\nu'} B_n(y-a)^n;$$

în cazul cînd $\mu$ și $\nu$ sînt finiți, $a$ va fi un pol pentru funcțiunea corespunzătoare; daca $\mu$ și $\nu$ sînt infiniți $a$ va fi un punct critic esențial; iar daca $\mu=o$ sau $\nu=o$, $a$ va fi un punct ordinar. In domeniul punctului de la infinit vom avea seriile convergente:

$$(3) \qquad f(x)=\sum_{m=-\mu}^{m=+\mu'} A_m x^m; \qquad \varphi(y)=\sum_{n=-\nu}^{n=+\nu'} B_n y^n.$$

Aceste generalități reamintite, vom căuta a determina forma analitică a funcțiunilor necunoscute.

---

[1]) A se vedea „*Gazeta Matematică*“, Anul III, pag. 230.

Pentru a simplifica problema observăm că expresiunea (1) fiind o funcțiune de produsul $xy$ nu se schimbă cînd schimbăm pe $x$ și $y$ între ei, avem deci:

$$\frac{f(x)+\varphi(y)}{x^2-y^2} = -\frac{f(y)+\varphi(x)}{x^2-y^2}$$

sau

$$\frac{f(x)+\varphi(x)}{x^2-y^2} = -\frac{f(y)+\varphi(y)}{x^2-y^2}$$

prin urmare:

$$f(x)+\varphi(x) = -[f(y)+\varphi(y)],$$

și cum variabilele $x$ și $y$ sînt independente, trebue să avem:

$$f(x)+\varphi(x) = C$$
$$f(y)+\varphi(y) = -C,$$

de unde conchidem că constanta C, trebue să fie zero. Problema se simplifică ast-fel avînd numai o funcțiune necunoscută de determinat.

Ținînd seamă că:

$$f(x)+\varphi(x) = o$$

relațiunea (1) devine:

$$(4) \quad \frac{f(x)-f(y)}{x^2-y^2},$$

această funcțiune, pentru acelaș cuvînt, nu se alterează, dacă înlocuim pe $x$ prin $-x$ și pe $y$ prin $-y$, vom avea deci:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x^2-y^2} = \frac{f(-x)-f(-y)}{x^2-y^2}$$

sau

$$f(x)-f(-x) = f(y)-f(-y)$$

de unde conchidem că funcțiunea $f(x)$ este pară.

Zic că pentru această funcțiune, punctul de la infinit nu poate fi de cît un punct ordinar sau un pol de ordinul al doilea. In adevăr, dupe (3), $f(x)$ va fi reprezentat în domeniul punctului de la infinit prin seria:

$$(5) \quad f(x) = \sum_{m=-\mu}^{m=+\mu'} A_{2m} x_{2m},$$

am înlocuit pe $m$ prin $2m$ căci funcțiunea este pară.

Inlocuind în (4) pe $f(x)$ prin desvoltarea sa în domeniul punctului la infinit, vom avea:

$$\frac{\sum A_{2m} x^{2m} - \sum A_{2m} y^{2m}}{x^2 - y^2}$$

$m$ putînd avea toate valorile întregi pozitive sau negative, sau:

$$\frac{\sum A_{2m}(x^{2m} - y^{2m}) - \sum A_{-2m}(x^{2m} - y^{2m}) \frac{1}{x^{2m} y^{2m}}}{x^2 - y^2}$$

$m$ avînd numai valori întregi pozitive.

Observăm că toți termeni sînt divizibili cu $x^2 - y^2$, efectuînd această diviziune obținem:

$$\sum A_{2m}[x^{2(m-1)} + x^{2(m-2)} y^2 + \ldots + y^{2(m-1)}] - \sum A_{-2m}[x^{2(m-1)} + \ldots + y^{2(m-1)}] \frac{1}{x^{2m} y^{2m}}.$$

Această expresiune trebue să depindă numai de produsul $xy$, este dar necesar ca în prima serie toți coeficenți să fie nuli afară de cel d'întâiu $A_2$, care poate fi diferit de zero; de asemenea în cea de a doua serie numai $A_{-2}$ poate fi diferit de zero; căci în caz contrariu expresiunea nu ar mai fi o funcțiune numai de $xy$. In acest caz relațiunea (5) ne dă:

$$f(x) = A_2 x^2 + A_0 + \frac{A_{-2}}{x^2} \text{ cînd } A_2 \neq o$$

și

$$f(x) = + A_0 + \frac{A_{-2}}{x^2} \text{ cînd } A_2 = o,$$

adică punctul de la infinit este un pol de ordinul al doilea sau un punct ordinar.

Să presupunem cazul cînd $A_2 \neq o$. Dacă din $f(x)$ scadem pe $A_2 x^2$ diferența:

$$f(x) - A_2 x^2$$

este și ea o funcțiune uniformă pară ca și $f(x)$, însă punctul de la infinit nu va mai fi un punct critic pentru această funcțiune, pe care să o însemnăm cu $\psi(x)$, și care are aceleași puncte critice la distanța finită ca și $f(x)$. Introducînd această valoare a lui $f(x)$ în (4) obținem:

$$(6) \quad A_2 + \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x^2 - y^2}.$$

Zic acum că punctul $x = o$ va fi un pol de ordinul al doilea pentru $\psi(x)$ deci și pentru $f(x)$. In adevăr în domeniul acestui punct avem:

$$\psi(x)=\sum_{m=-\mu}^{m=+\mu'} B_{2m}\,x^{2m}.$$

Inlocuind această expresiune în (6) şi repetînd acelaş raţionament, conchidem că toţi coeficienţi trebue să fie nuli, afară de $B_{-2}$, iar $B_0$ şi $B_2$ pot fi sau nu fi nuli Ast-fel că în domeniul acestui punct vom avea:

$$\psi(x)=\frac{B_{-2}}{x^2}+\lambda(x)$$

$\lambda(x)$ fiind o funcţiune întreagă şi regulată pentru $x=o$. Deci:

$$f(x)=A_2x^2+\frac{B_{-2}}{x^2}+\lambda(x).$$

este o funcţiune uniformă, regulată şi finită atît pentru $x=o$ cît şi pentru $x=\infty$, fie $a_1, a_2, \ldots a_n$ diferitele sale puncte critice situate la distanţa finită, vom avea:

$$\lambda(x)=\sum_{k=1}^{k=n} G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)+G(x),$$

$G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)$ reprezentînd partea principală în domeniul punctului critic $a_k$, iar $G(x)$ o funcţiune olomorfă, care rămîne finată atît la distanţa finată cît şi la infinit, prin urmare $G(x)$ este o constantă, vom avea deci:

$$f(x)=A_2x^2+\frac{B_2}{x^2}+C+\sum G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)$$

înlocuind pe $f(x)$ cu această valoare în (5), avem:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x^2-y^2}=A_2-\frac{B_2}{x^2y^2}+\frac{\sum G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)-\sum G_k\left(\frac{1}{y-a_k}\right)}{x^2-y^2}.$$

Această expresiune trebuind să fie o funcţiune de produsul $xy$, şi cum prima parte este o asemenea funcţiune, trebue ca şi partea a doua să depindă de asemenea numai de produsul $xy$, ceia ce este imposibil, căci:

$$G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)=\sum\frac{A_{m,k}}{(x-a_k)^m}$$

grupîndu-le vedem că expresiunea aceia nu poate fi o funcţiune de $xy$, de unde conchidem că toţi coeficienţi $A_{m,k}$ trebue să fie

nuli, adică ca $\lambda(x)$ nu are nici un punct critic atît la distanța finită cît și la infinit, el se reduce deci la o constantă, și vom avea:

$$f(x)=A_2x^2+\frac{B_2}{x^2}+C.$$

P. I. Suchar

## *GENERALIZAREA PROBLEMEI 79

(Urmare)

4) *Dacă $n$ este patratul unui număr prim (afară de 4), $(a^n-b^n)$ se poate divide cu $n$ fără a se divide cu $n^2$.*

Fie $n=\alpha^2$. Avem:

$$a^n-b^n=a^{\alpha^2}-b^{\alpha^2}=a^{\alpha\alpha}-b^{\alpha\alpha}=(a^\alpha)^\alpha-(b^\alpha)^\alpha.$$

Dacă $(a^n-b^n)$ se divide cu $n$, el se divide și cu $\alpha$ care e factor al lui $n$. Deci $[(a^\alpha)^\alpha-(b^\alpha)^\alpha]$ se divide cu $\alpha$, și cum $\alpha$ este număr prim, după observarea de la No. 2, se impune ca și $(a^\alpha-b^\alpha)$ să se dividă cu $\alpha$; însă $\alpha$ fiind prim după aceiași observare, rezultă că aceasta nu poate avea loc de cît dacă $(a-b)$ se divide cu $\alpha$. Fie $a-b=m\alpha$.

Vom avea:

$$(3) \qquad a=b+m\alpha,$$

de unde ridicînd la puterea $n=\alpha^2$, și adunînd la un loc multiplii de $n^2$, avem:

$$(4) \quad a^n-b^n=mb^{n-1}\alpha n+\frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}m^2.n+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b^{n-3}m^3\alpha n+\mathfrak{M}n^2.$$

Dacă $\alpha$ e un număr prim altul ca 2 și 3, atunci $n$ nu se divide nici cu 2 nici cu 3, și prin urmare atunci termenul al doilea și al treilea au pe $n^2$ ca factor. Așa dar în membrul II toți termenii, afară de primul se divid cu $n^2$. Primul termen însă e multiplu de $n$, așa că $(a^n-b^n)$ se divide cu $n$. Pentru ca $(a^n-b^n)$ să se dividă cu $n^2=\alpha^4$, ar trebui deci ca $mb^{n-1}$ să se dividă cu $\alpha$, și cum $\alpha$ e prim, ar trebui deci ca ori $m$ ori $b$ să fie multiplu de $\alpha$. Dacă $m=k\alpha$, atunci relația (3) ne dă $a-b=k\alpha^2$, și atunci e evident după teorema (1), că $(a^n-b^n)$ se va divide cu $\alpha^4=n^2$. Dacă $b=l\alpha$, atunci relația (3) ne dă $a=(m+l)\alpha$, iar $(a^n-b^n)$ devine $\alpha^n[(m+l)^n-l^n]$,

expresiune care se divide cu $\alpha^4$ dacă $n > 4$, condiţie îndeplinită după enunciu. Dacă însă nici $b$, nici $m$ nu sînt multipli de $\alpha$, atunci $(a^n - b^n)$ se divide cu $n = \alpha^2$, dar nu se divide cu $n^2 = \alpha^4$. Este evident că putem alege în relaţia (3) pe $m$ şi $b$ aşa ca ei să nu fie multipli de $\alpha$. Fie de exemplu $\alpha = 5$, care dă $n = 25$. Putem lua $m = 1$ şi $b = 1$ şi avem atunci $a = 6$. Obţinem ast-fel diferenţa $6^{25} - 1^{25}$ care se divide cu 25, dar nu se divide cu $25^2 = 625$. Dacă luăm $\alpha = 7$, $m = 2$, $b = 3$, găsim $a = 17$, şi obţinem diferenţa $17^{49} - 3^{49}$ care se divide cu 49, dar nu se divide cu $49^2 = 2401$.

Să examinăm acum cazurile cînd $\alpha = 3$, sau $\alpha = 2$. Dacă în (4) facem pe $\alpha = 3$ obţinem:

$$a^9 - b^9 = mb.^8 27 + \frac{9 \times 8}{1 \times 2} b^7 m^2.9 + \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} b^6 m^3.27 + \text{M}81.$$

sau, observînd că termenii ai doilea şi treilea din membrul II sînt multipli de 81, avem:

$$a^9 - b^9 = 27mb^8 + \text{M}81.$$

Aşa dar, şi aci, dacă $m$ sau $b$ nu sînt divizibili cu 3, atunci $(a^9 - b^9)$ se divide cu 9, dar nu se divide cu 81. Fie de exemplu $b = 1$, $m = 1$, care dă $a = 4$, şi obţinem diferenţa $4^9 - 1^9$, care se divide cu 9 dar nu se divide cu 81, după cum am verificat deja.

Dacă în (4) facem $\alpha = 2$, vom avea:

$$a^4 - b^4 = m.b.^3 8 + \frac{4 \times 3}{1 \times 2} b^2.m^2.4 + \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} bm^3.8 + \text{M}16,$$

care se poate scrie:

$$a^4 - b^4 = 8mb(b^2 + 3bm + 4m^2) + \text{M}16.$$

Dacă $m$ sau $b$ sînt pari, atunci $(a^4 - b^4)$ e divizibil cu 16. Dacă $m$ şi $b$ sînt impari, atunci parenteza e pară ca suma a două numere impare cu unul par, şi prin urmare iarăşi $(a^4 - b^4)$ se divide cu 4. Aşa dar în toate cazurile $(a^4 - b^4)$ nu se poate divide cu 4, fără a se divide cu 16. *Teorema generală este deci adevărată pentru* $n = 4$. Prin un raţionament analog cu cel de la cazul precedent, se deduce imediat că *teorema este adevărată pentru* $n = 4\alpha\beta\gamma\ldots$, unde $\alpha\beta\gamma\ldots$ *sînt numere prime diferite de* 2.

5) *Dacă* $n$ *este o putere, mai mare ca a doua, a unui număr prim atunci* $(a^n - b^n)$ *se poate divide cu* $n$, *dar nu cu* $n^2$.

Fie $n = \alpha^i$, în care $\alpha$ e un număr prim iar $i > 2$. Avem:

$$a^n - b^n = a^{\alpha i} - b^{\alpha i} = (a^{\alpha i-1})^\alpha - (b^{\alpha i-1})^\alpha$$

Prin un raţionament analog cu cel de la No. 4 se găseşte că dacă $(a^n - b^n)$ se divide cu $n$, atunci $(\alpha^{\alpha i-1} - b^{\alpha i-1})$ se divide cu $\alpha$; că daca aceasta se divide cu $\alpha$, atunci $(\alpha^{\alpha i-2} - b^{\alpha i-2})$ se divide cu $\alpha$, etc..., şi în cele din urmă că $(a-b)$ se divide cu $\alpha$, ceia ce ne conduce la relaţia (3). Ridicînd această relaţiune la puterea $n$ avem ca şi la neegalitatea (4):

$$(5)\quad a^n - b^n = nb^{n-1}m\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}m^2\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b^{n-3}m^3\alpha^3 + ..$$

Zicem acum că putem alege pe $m$ în aşa mod în cît toţi termenii din membrul II începînd de la al treilea înainte să fie multipli de $n^2 = (\alpha^i)^2 = \alpha^{2i}$. In adevăr dacă luăm:

$$(6)\quad m = k\alpha^{i-2},$$

atunci în termenul al treilea exponentul lui $\alpha$ va fi $3(i-2)+3 i = 2i+(i-3)$. Acest exponent este totdeauna mai mare ca $2i$ (exponentul puterei la care trebue ridicat $\alpha$ pentru a avea $n^2$), dacă $i$ e mai mare ca 3, şi e egal cu $2i$ dacă $n=3$. Aşa dar, dacă înlocuim pe $m$ cu valoarea sa în (5) şi grupăm la un loc termenii cari au pe $n^2$ ca factor avem:

$$a^n - b^n = kb^{n-1}n\alpha^{i-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}k^2\alpha^{2i-2} + \mathfrak{M}n^2.$$

Dacă $\alpha$ nu e egal cu 2, atunci $n$ e prim cu 2, şi termenul al doilea se divide cu $n^2$, căci coeficientul lui se divide cu $n$, iar $\alpha^{2i-2}$ se divide cu $n$, de oare-ce exponentul $2i-2 = i+(i-2)$ e mai mare ca $i$, dacă $i \geq 3$. Pentru ca primul termen să se dividă cu $n^2$ ar trebui ca $k$ sau $b$ să se dividă cu $\alpha$. Dacă această condiţiune nu este îndeplinită, atunci $(a^n - b^n)$ se divide cu $n$, dar nu se divide cu $n^2$. Aşa de exemplu, dacă $\alpha=3$, $i=3$, $k=2$, $b=4$, găsim $n=27$, $m=6$, $a=22$ şi obţinem diferenţa $22^{27} - 4^{27}$ care se divide cu 27 dar nu se divide cu $27^2 = 729$.

Să presupunem acum că $\alpha=2$. Inlocuind în egalitatea precedentă avem, înlocuind şi $n$ cu $2^i$:

$$a^n - b^n = kb^{n-1}.2^{2i-1} + k^2b^{n-2}.2^{3i-3} + \mathfrak{M}n^2.$$

Am arătat însă mai sus că $(3i-3)$ e mai mare ca $2i$ dacă $i > 3$. Aşa dar al doilea termen e totdeauna divizibil cu $2^{2i} = n^2$; şi prin urmare, dacă $k$ sau $b$ sînt impari, atunci primul termen nu se divide cu $n^2$ şi deci $(a^n - b^n)$ se divide cu $n$ dar nu cu $n^2$. Ast-

fel dacă luăm $i=3$, $b=5$, $k=1$, avem $n=8$, $m=2$, $a=9$ și obținem diferența $9^8-5^8$ care se divide cu 8, dar nu se divide cu $64=8^2$.

Așa dar, din cele ce preced, rezultă că pentru ori-ce putere a unui număr prim, superioară patratului, teorema generală nu este adevărată.

6) *Dacă $a^n-b^n$ se divide cu $n$, dar nu cu $n^2$, și daca $n$ este o putere oare-care a unui număr prim, afară de 4, atunci $a^{kn}-b^{kn}$ se poate divide cu $kn$ dar nu cu $k^2n^2$, cînd $k$ e un număr oare-care prim cu $n$.*

Din cele spuse la No. 4 și 5 rezultă că dacă luăm pentru $n$ o putere oare-care a unui număr prim, afară de 4, și dacă luăm pe $b$ *prim* cu $n$, atunci putem forma diferența $(a^n-b^n)$ care să se dividă cu $n$ dar nu cu $n^2$. Putem deci pune:

$$(7) \qquad a^n-b^n=mn^2+tn,$$

unde $t<n$. Această egalitate ne arată că $(a^n-b^n)$ se divide cu $n$ dar nu cu $n^2$. Trecînd pe $b^n$ în membrul II și ridicînd la puterea $k$ avem:

$$a^{nk}=b^{nk}+k.b^{n(k-1)}(mn^2+tn)+\frac{k(k-1)}{1.2}b^{n(k-2)}(mn^2+tn)^2+.....$$

sau grupînd la un loc termenii cari au pe $n^2$ ca factor avem:

$$a^{nk}-b^{nk}=ktb^{n(k-1)}n+\mathfrak{M}n^2.$$

Să presupunem că $(a^{nk}-b^{nk})$ este divizibil prin $k^2$. Dacă însă $k$ este luat prim cu $n$, atunci diferența $(a^{nk}-b^{nk})$ nu se divide cu $n^2$, căci pentru aceasta ar trebui ca termenul $ktb^{n(k-1)}$ să se dividă cu $n$. Aceasta însă e imposibil, dacă $k$ și $b$ sînt primi cu $n$, căci $t$ nu se poate divide cu $n$, de oare-ce el este restul unei diviziuni prin $n$. Așa dar $(a^{nk}-b^{nk})$, de și se divide cu $kn$, dar nu se divide însă cu $k^2n^2$.

7) *Dacă $n$ se divide cu 8 sau cu patratul altui număr prim, atunci $(a^n-b^n)$ se poate divide cu $n$ fără a se divide cu $n^2$.*

Fie $n=2^p\alpha^q\beta^r\gamma^s...$, în care $\alpha, \beta, \gamma,...$ sînt numere prime, iar $p,q,r,s...$ numere mai mari sau cel puțin egale cu 1, cu condiție însă ca unul cel puțin din numerile $q, r, s$ să fie cel puțin egal cu 2, dacă $p$ nu e mai mare sau egal cu 3. Fie de exemplu $q>2$. Am văzut la No. 4 sau 5 că pentru numărul $\alpha^q$ teorema generală nu e adevărată. Dacă înmulțim pe $\alpha^q$ cu numărul $2^p\beta^r\gamma^s.....$ care e prim

cu $\alpha^q$, atunci după No. 6, teorema nu e adevărată nici pentru produsul obținut, adică pentru numărul $n$.

8) Din cele spuse pînă aci rezultă că teorema generală este adevărată numai dacă $n$ e un număr prim, un produs de numere prime la puterea întăia, sau produsul lui 4 prin mai multe numere prime, diferite de 2; și că pentru ori-ce alt număr, putem găsi valori pentru $a$ și $b$ așa că $(a^n - b^n)$ să se dividă cu $n$ fără a se divide cu $n^2$. Așa dar putem da următoarea generalizare problemei 79:

*Diferența puterilor asemeăea a două numere întregi nu se poate divide cu exponentul acelei puteri, fără a se divide cu patratul exponentului, dacă exponentul descompus în factori primi conține pe 2 cel mult la puterea a doua, iar pe ceilalți la puterea întăia numai. Pentru ori-ce alte valori ale exponentului e posibil ca diferența să se dividă cu exponentul fără a se divide cu patratul exponentului.*

Așa teorema generală e adevărată pentru $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20$.

**I. Ionescu.**

## BIBLIOGRAFIE

**Curs de Geometrie Analitică,** Partea I, **Secțiuni conice** de D-l **Constantin Climescu,** Profesor la Facultatea de Științe din Iași, Membru Corespondent al Academiei Romîne, Iași, 1898 (344 pag. în 8, prețul 6 lei).

Lipsa unor tratate mai complecte de matematici superioare în limba romînă este deja simțită la noi. De și se crede, și chiar se susține de mulți, că științele matamatice se pot învăța tot atît de bine după cărți streine ca și după cele scrise în limba patriei, totuși cei ce au avut ocaziunea să pregătească mai în de aproape pe alții sau să prepare singuri o anumită parte a științelor matematice, au remarcat, pe lîngă dificultățile ce rezultă în cele mai multe cazuri din cunoștința insuficientă a limbei în care era scris uvragiul, încă altele destul de serioase provenind, fie din faptul că redacțiunea sau notațiunile nu erau făcute în modul obișnuit la noi, fie mai ales din cauză că acel uvragiu presupunea cunoștințe inferioare altele, și în general mai multe, de cît cele ce se predau în școlile noastre. Cursul de Geometrie Analitică ce D-l *Const. Climescu* a început a publica, și din care prima parte a apărut deja, implinește una din lipsurile de care vorbirăm.

Uvragiul este împărțit în trei părți conținînd fie-care mai multe capitole, și anume:

a) *Preliminare* coprinzînd coordonate, proecțiuni, transformarea coordonatelor, distanța a două puncte, clasificarea curbelor, omogenitate și construcția formulelor.

In această parte remarcăm nemerita idee a D-lui *C. Climescu* de a reaminti studiul proecțiunilor, care la noi e cam neglijat în școalele secondare. De și în multe cursuri de trigonometrie formulele pentru adunarea arcelor se stabilesc prin mijlocul proecțiunilor, însă nedîndu-se toată desvoltarea necesară, elevii nu pot avea la îndemînă acest mijloc, și e destul a se schimba figurile obișnuite pentru a nu mai ști cum să se aleagă unghiurile sau semnele segmentelor de drepte. In această parte cred că ar fi fost util a se da cîte-va exemple de găsirea ecuațiilor unor curbe definite, sau a se construi curbe ale căror ecuații sînt date, și în special ecuații cu coeficienți numerici, căci ast-fel elevul și-ar consolida noțiunile primite despre coordonate, și-ar da încă de la început seama de scopul ce urmărește Geometria analitică și aceasta 'i-ar atița mai mult curiozitatea de a pătrunde în studiul ei, mai ales că chestiunile din preliminare sînt fără legătură între ele și că programele școlilor secundare nu prevăd reprezentarea grafică a trinomului și fracțiunilor de gradul II. Numirea de *ordinea m* dată în loc de *gradul m* unei curbe a cărei ecuațiune în coordonate rectangulare este de gradul *m* este de prisos; de alt-fel nici D-l *C. Climescu* nu o întrebuințează peste tot. In fine în această parte se pot lăsa la o parte la un prim studiu coordonatele curbilinii, de oare-ce începătorul își poate imagina cu greu curba a căror pozițiune în plan depind de o cantitate oare-care.

b) *Linia dreaptă și cercul* coprinzînd studiul ecuațiunei de gradul I cu 2 variabile, teoreme și probleme relative la linie dreaptă, unghiuri, distanțe, puncte și drepte imaginare, sisteme de drepte, raport anarmonic, pol, polară, probleme; ecuația circonferenței, secante, tangente, polare, sisteme de circonferențe, tangente comune, cercuri ortogonale.

Din această parte e bine ca la un prim studiu să se suprime, punctele și dreptele imaginare de oare-ce rezultatele neobișnuite și bizare ca enunciu încurcă foarte mult pe începător și apoi studiul lor nici nu este necesar în cele urmează. Cred apoi că în această parte ar fi bine a se da primele noțiuni de coordonate tangentiale și trilatere, precum și de coordonate paralele și axiale cari găsesc o aplicațiune importantă la facerea tablourilor grafice ce se utilizează astă-zi foarte mult în toate științele aplicate.

c) *Curbe de gradul al doilea*, coprinzînd studiul ecuațiunei de gradul II cu 2 variabile, diverse forme ale ecuațiuni; tangente, centre, diametre, axe, reducția ecuațiunei; studiul elipsei, hiperbolei și parabolei; focare, curbe homofocale; secțiunile conului printr'un plan.

In această parte studiul ecuațiunei de gradul II este făcut în două moduri: 1) rezolvindu-se ecuația în raport cu o variabilă și 2) prin gruparea termenilor în patrate sau produse de factori de gradul întăiu. Acest studiu este urmat de 12 exemple numerice răspunzînd diferitelor cazuri ce se ivesc în acel studiu. Unele ecuații conțin un parametru variabil, care face ca ecua-

țiunea să reprezinte diferite curbe după valorile acelui parametru. In definițiunea focarelor trebuia specificat că acea definițiune e valabilă numai pentru curbele de gradul II, rămînd ca definițiune generală cea dată de *Plücker*. Găsirea focarelor după metoda lui *Plücker* poate fi lăsată la un prim studiu. Secțiunile plane ale conului sînt studiate cu ajutorul sferelor tangente la con și la planul secant.

In general expunerea este clară, raționamentele riguroase și apropiate cunoștințelor din cursurile inferioare de la noi. Unele chestiuni sînt tratate în două sau chiar trei moduri diferite. Chestiunile mai dificile sînt urmate de exemple, în mare parte numerice. Fie-care capitol este însoțit de exerciții urmate de răspunsuri sau rezultate, iar cele mai dificile sînt însoțite cu o indicațiune pe scurt a soluțiunei. In rezumat este un uvragiu care va aduce reale servicii celor ce studiază Geometria analitică și o recomandăm cu insistență cititorilor noștri, urindu-i autorului ca în curînd să-și termine opera începută.

*I. I.*

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### Soluțiunele chestiunelor propuse la examenul de admitere în Școala Specială de Artilerie și Geniu.

#### Algebră

1) *Pentru ce valori ale lui p ecuațiunea:*

$$x^2-(p-1)x+36=0$$

*are rădăcinele sale*: 1) *egale*; 2) *egale și de semne contrarii.*

Pentru ca rădăcinele să fie egale trebue să avem:

$$(p-1)^2-4.36=0$$

sau

$$p^2-2p-243=0$$

de unde

$$p'=13 \text{ și } p''=-11.$$

Rădăcinele sînt egale și de semne contrarii, cînd coeficientul lui $x$ este nul, adică $p=1$.

2) *Să se rezolve inegalitatea:*

$$x>\frac{1}{2a-x}.$$

Multiplicînd ambi membri ai inegalității cu $(2a-x)^2$, care este pozitiv, avem:

$$x(2a-x)^2>2a-x$$

sau:

$$(2a-x)(2ax-x^2-1)>.$$

Pentru ca această inegalitate să fie satisfăcută, trebue să avem:

$$\text{I} \begin{cases} 2a-x>0 \\ 2ax-x^2-1>0 \end{cases} \quad \text{sau II} \begin{cases} 2a-x<0 \\ 2ax-x^2-1<0. \end{cases} \text{ și}$$

Inegalitățile (I) dau:

$$x<2a \text{ și } x>a-\sqrt{a^2-1} \text{ sau } x<a+\sqrt{a^2-1},$$

ultimele condițiuni coprind pe cea d'întâi căci: $\sqrt{a^2-1}<a$.

Inegalitățile (II) dau:

$$x > 2a \quad \text{și} \quad x < a - \sqrt{a^2-1} \quad \text{sau} \quad x > a + \sqrt{a^2-1}.$$

Condițiunile din urmă sînt incompatibile sau coprinse în cea d'întâi $x > 2a$.

In rezumat pentru ca inegalitatea propusă să fie satisfăcută, trebue:

$$a - \sqrt{a^2-1} < x < a + \sqrt{a^2-1}$$

sau

$$x > 2a.$$

## Geometrie

*Se dă un patrat* ABCD. *Din* D *ca centru cu* DA *ca rază se descrie arcul* AC. *Pe* AD *ca diametru se descrie în interiorul patratului semicirconferența* AMD. *Pe arcul* AC *se ia un punct* P, *de unde se duce perpendiculara* PR *pe* AB, *dreapta* PD *întîlnește semicirconferința* AMD *în* Q. *Să se arate că:*

$$PR = PQ.$$

Unim A cu P și din D scobărim perpendiculara DE pe AP. Unghiurile RAP și PAE sînt egale pentru că au aceiași măsură, jumătatea arcului AP; prin urmare și unghiurile DPE și APR, complimentele acestora, vor fi egale. De aci rezultă că triunghiurile dreptunghie APR și APQ sînt egale, ca avînd ipotenuza comună și unghiurile DPE și APR egale; deci:

$$PR = PQ.$$

## Trigonometrie

*Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu cunoscînd:*

1) *O latură* $b$ *și diferența* $a - c = d$.

2) *Ipotenuza* $a$ *și diferența* $a - c = d$.

1) Laturile ne sînt date de ecuațiunele:

$$a - c = d$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{sau} \quad a + c = \frac{b^2}{d}$$

de unde:

$$a = \frac{1}{2}\left(d + \frac{b^2}{d}\right) = \frac{d^2+b^2}{2d}$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{d} - d\right) = \frac{b^2-d^2}{2d}$$

cunoscînd laturile calculăm unghiurile prin formulele cunoscute.

2) Laturile ne sînt date prin ecuațiunile:

$$a - c = d$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

prima ecuațiune da $c = a + d$, substituind în cea de a doua găsim:

$$b = \sqrt{d(2a-d)}.$$

Unghiurile se calculează prin formuele cunoscute. G. Giușcă

*Nota.* Am mai primit foarte bune soluțiuni ale acestor chestiuni de la D-nii: *C. Mateescu* (Student, Craiova), *I. Nicolescu* (Elev Cl. VII, liceul Craiova) și *A. I. Pinchis* (Iași).

## Examenul de admitere în Școala Normală de Fete, Iași

### Compoziția de la Iași

Un părinte are două copile Maria și Elena. Pentru Maria pune la o parte în fie care an o sumă fixă, în timp de 5 ani; iar pentru Elena pune aceiași sumă în timp de trei ani. El își zice: dacă Elena va reuși la concursu pentru Școala Normală, partea ei o voiu pune la dobîndă cu 4% și cînd va termina Școala (peste 5 ani) va avea 1440 lei (dobîndă simplă). Se întreabă care este suma strînsă pentru fie-care din ele.

### Compoziția de la București.

Un negustor cumpără 120 m. stofă de lînă pe 2 l. 05 m. și mătase pe 8 l. 00 m. Vînzînd toate acestea ia în schimb o poliță în valoare nominală de 1500 lei, și cu scadența peste 4 luni. El scontează imediat polița cu 1½ % (scont comercial) și constată că a cîștigat peste tot 200 lei.

Se întreabă cîți metri de mătase a avut.

## ȘCOALA DE PODURI ȘI SOSELE

## Examenul de admitere în anul I (1898)

a) SECȚIUNEA INGINERILOR

### Algebră

1) Se presupune că ecuațiunile:

$$x^3-3ax+2a^2=0$$
$$x^4+ax^2+2bx+c=0,$$

au o rădăcină dublă comună. Se cere: 1) Să se rezolve aceste ecuațiuni; 2) să se găsească ecuațiunile de condițiune.

2) Să se studieze variațiunea funcțiunei:

$$y=L\sqrt{1+x^2}+8\text{arc tg}x+\frac{5(2x+1)}{x^2+1}+C,$$

C fiind o constantă oare-care. Să se determine constanta ast-fel ca maximul funcțiunei să fie: $5+L\sqrt{5}$.

(Timpul acordat 3½)

### Geometrie analitică

Se dă un cerc C cu raza $r$, și o curbă oare-care S de gradul al doilea. Se cere locul geometric al punctului A $(m, n)$ ast-fel ca ducînd din acest punct două tangente At și At' la cercul C, coarda ce unește punctele de contact $(tt')$ să fie tangentă la curba S.

Dupe găsirea locului geometric în cazul general, se va examina următoarele cazuri particulare:

1) Curba S se reduce la un punct;

2) « S « « « « sistem de două drepte.

(Timpul acordat 4 ore).

### Trigonometrie

Se dă baza unui triunghiu isoscel egală cu $698^m.45$ și raza cercului circumscris egală cu $356^m.25$. Să se calculeze elementele triunghiului și suprafața.

(Timpul acordat 3 ore).

### Geometrie descriptivă

Se dau:

$vo-v'o'$ axa unui con circular drept, care să aibă vîrful în $vv'$ și cu baza un cerc cu centrul în $oo'$ și cu raza de $0^m.044$.

Se cere:

1) Să se înscrie în con o sferă a cărei rază să fie $0^m.026$;

2) Să se afle linia de contact între cele două suprafețe;

3) Să se construiască curba după care sfera tae baza conului.

*Nota.* Cotele punctului $oo'$ sînt: $0^m.019$ și $0^m.053$, iar ale punctului $vv'$ $0^m.034$ și $0^m.035$.

### Fizică

1) Vernierul și sferometrul.

2) *Problemă.* Intr'o pompă aspiratoare, tubul de aspirație are o lungime de $5^m.00$, între fundul de jos al corpului de pompă și suprafața liberă a apei. Secțiunea corpului de pompă este de 80 cmp., și lungimea cursei pistonului este de $0.^m50$. Să se găsească:

*a)* Care este forța necesară, pentru a ridica pistonul cînd apa va începe să curgă prin tubul de scurgere, neglijîndu-se greutatea și înălțimea pistonului;

*b)* Care va fi travaliul mecanic corespunzător unei cause;

*c)* Dacă se fac 20 lovituri de piston pe minut, care este puterea mecanică necesară.

Rezultatele se vor exprima în unități de sistem: kgr. pondere-metru-secundă; în sistemul C. G. S, și în unități practice de sistemul C. G. S.

### Chimie

1) Despre combinațiunile oxigenate și hidroxigenate ale azotului.

2) *Problemă.* Permanganatul de potasă ($KMnO_4$) se reduce cu apa oxigenată, în prezența acidului sulfuric, formînd: *a)* apa comună, *b)* oxigen, *c)* sulfat neutru de potază, *d)* sulfat de manganez,

Se cere:

1) A se reprezenta printr'o ecuațiune chimică această reacțiune întrebuințîndu-se formulele moleculare;

2) A se calcula volumul de oxigen ce se desvoltă din 100 gr. apă oxigenată și cantitatea respectivă de permanganat, volum msurat la 15° Celsius și $760^m/_m$ presiune, și a se compara cu acela al apei oxigenate din care a luat naștere, știindu-se că densitatea apei oxigenate la aceiași temperatură este 1.453 ($K=39$, $Mn=55$).

b) SECȚIUNEA CONDUCTORILOR

**Aritmetică**

1) Să se calculeze: $\sqrt[3]{28372{,}625}$.

2) Proba înmulțirei și împărțirei cu 9.

**Geometrie**

1) Lungimea unei circonferințe de cerc este de 8 st. 1 palmă 6 degete și 4 linii de Moldova. Să se calculeze raza cercului și suprafața sectorului AOB, al cărui unghiu la centru este de 31°. Suprafața se va da în metri.

2) Să se ducă transversala MN, paralelă cu latura AB a triunghiului ABC, și să se determine cu raport trebue să existe între latura AC și segmentul CN, pentru ca suprafața MCN să fie jumătate din suprafața triunghiului ABC.

**Fizică**

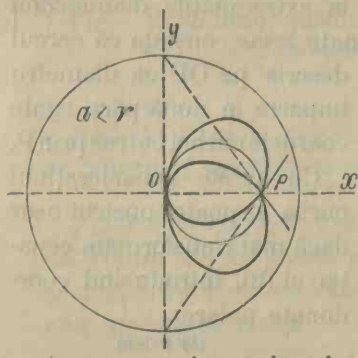
Principiul lui Archimede relativ la echilibrul corpurilor cufundate într'un lichid. Demonstrația lui experimentală. Aplicație la determinarea densității corpurilor solide și lichide.

# PROBLEME REZOLVITE [1]

**Problema 236.** — *Se dă un cerc* O *și un punct* P; *să se determine ecuația și să se construiască curba pe care se află punctele* M,M′ *intersecțiunile unei drepte ce trece prin* P *cu perpendicularele duse în* O *la razele punctelor de intersecție a dreptei* PMM′ *cu cercul* O. **(Bogdan Ionescu.)**

*Soluție dată de D-l C. Lupu.*

Luăm ca axe coordonate două diametre perpendiculare ale cercului, ast-fel ca OX să coincidă cu OP. Fie OP$=a$ și $m$ coeficientul unghiular variabil al coardei MPM′. Ecuația cuadratică a razelor duse din O prin intersecțiunile coardei PMM′ cu cercul se obține eliminînd parametrul $t$ între ecuațiele:




$$y = m(x - at)$$

$$x^2 + y^2 - r^2t^2 = o,$$

$r$ fiind raza cercului dat; eliminarea se face ușor și rezultatul este:

[1]) Problema No. 334 a fost rezolvită și de D-l *T. Grigorescu.*

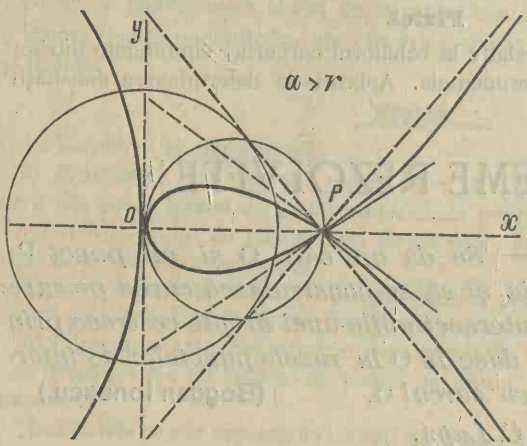
$$(1)\quad (a^2m^2-r^2)\frac{y^2}{x^2}+2mr^2\frac{y}{x}+m^2(a^2-r^2)=0.$$

Ecuația în $\frac{y}{x}$, ale cărei rădăcini vor fi inversele luate cu semn contrar ale rădăcinilor ecuațiunei (1), adică ecuația razelor perpendiculare pe cele d'întâi, va fi:

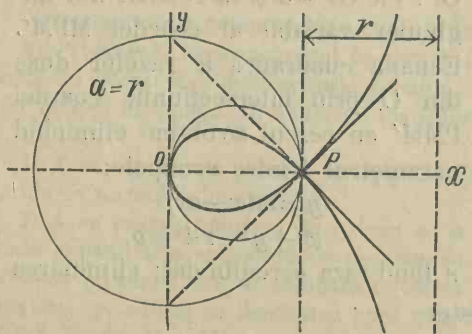
$$m^2(a^2-r^2)\frac{y^2}{x^2}-2mr^2\frac{y}{x}+a^2m^2-r^2=0.$$

Dacă în această ecuație vom face $m=\frac{y}{x-a}$, găsim locul cerut:

$$(2)\quad a^2(x^2+y^2)y^2-r^2(x^2+y^2-ax)^2=0$$




adică o curbă de gradul al patrulea bicirculară, simetrică în raport cu OP (evident a priori) și având pe O și P ca puncte duble; OY e tangentă dublă, iar pentru P, ca să aflăm tangentele curbei în acel punct transportăm origina în P (înlocuind pe $x$ cu $x+a$) și egalăm cu 0 termenii de gradul cel mai mic; rezultatul va fi două drepte duse din P la extremitățile diametrului după OY. Origina fiind tot în P′ se poate lesne constata că cercul descris pe OP ca diametru împarte în două părți egale coardele curbei ce trec prin P.




Cu aceste considerațiuni curba se poate construi ușor dacă mai transformăm ecuația ei (2), introducînd coordonate polare:

$$\rho=\frac{ar\cos\omega}{r\pm a\sin\omega}.$$

Cînd P este în interiorul cercului, $\rho$ nu poate deveni infinit și

deci curba nu poate avea ramuri infinite; cînd P este exterior cercului, asimptotele sînt tangentele duse din acest punct la cercul O, căci direcțiunile lor sînt date de ecuația:

$$\sin\alpha = \pm\frac{r}{a}$$

iar distanța $d$ la pol este pentru fie-care:

$$d = -\frac{\rho^2}{\rho'}_{\alpha=\omega} = r.$$

Cînd P e pe cerc, curba se descompune în dreapta $oy$ și o strafoidă dreaptă.

A mai rezolvit acéstă chestiune D-l *C. Țițirigă*.

***Problema 261**. — *Un balon de sticlă se umple cu un amestec de două lichide, avînd respectiv densitățile d și d', iar greutatea amestecului fiind* P. *Se extrage o cantitate de amestec și se umple balonul la loc cu lichidul de densitatea d, prin cîntărire se găsește că greutatea noului amestec este* P'. *Din acest din urmă amestec se extrage aceiași cantitate ca mai sus, și se umple iarăși balonul cu lichidul de densitatea d', prin cîntărire se găsește că greutatea ultimului amestec obținut este* P''. *Să se determine:* 1) *capacitatea balonului;* 2) *cantitatea de lichid extrasă prin operațiunile de mai sus;* 3) *proporția de amestec a celor două lichide la început și la sfîrșit.* **(A. G. Ioachimescu.)**

*Soluție dată de D-nii: G. C. Dobrovici* (Elev Liceul Bărlad); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (ib.).

Fie: V volumul vasului.

$v$ » lichidului de densitate $d$.

$v'$ » » » » $d'$

$v''$ » » extras.

Aplicînd formula cunoscută: *că greutatea unui corp este egală cu volumul multiplicat cu densitatea*, obținem ecuațiunea:

$$(1)\quad vd+v'd'=P.$$

Amestecul primitiv are densitatea $P:(v+v')$, extrăgînd din el un volum $v''$ greutatea acestuia va fi: $Pv'':(v+v')$; introducînd același volum $v''$ de lichid cu densitatea $d$, greutatea sa va fi $v''d$; cum greutatea totală este P', vom avea ecuațiunea:

$$(2)\quad P-\frac{Pv''}{v+v'}+v''d=P'.$$

Pornind de la amestecul cu greutatea P'' și repetînd aceiași operațiune și același raționament ca mai sus, obținem ecuațiunea:

$$(3)\quad P'-\frac{P'v''}{v+v'}+v''d'=P''.$$

Ecuațiunile (1), (2) și (3) rezolvă problema; ele determină pe $v$, $v'$ și $v''$ și în urmă volumul total V.

Din ecuațiunile (2) și (3) deducem:

$$(v+v')(P+v''d-P')=Pv''$$
$$(v+v')(P+v''d'-P'')=P'v''$$

divizînd una cu alta:

$$\frac{P+v''d-P'}{P'-v''d'-P''}=\frac{P}{P'}$$

de unde:

$$v''=\frac{PP''-P'^2}{Pd'-P'd}.$$

In urmă se găsește:

$$V=v+v'=\frac{PP''-P'^2}{d'(P-P')-d(P'-P'')}.$$

Proporția de amestec la început este dată de ecuațiunile:

$$vd+v'd'=P$$
$$v+v=V,$$

care dau:

$$v=\frac{P-Vd'}{d-d'}.$$
$$v'=\frac{Vd-P}{d-d'}.$$

Pentru a găsi proporțiile finale observăm, că dupe ce am extras cantitatea $v''$ din amestecul primitiv a rămas: $v-\frac{vv''}{V}$ lichid de densitatea $d$ și $v'-\frac{v'v''}{V}$ lichid de densitatea $d'$. Dupe prima operație vom avea: $v-\frac{vv''}{V}+v''$ lichid de densitatea $d$, volumul celuilalt rămînend neschimbat. Din acest nou amestec esträgînd volumul $v''$, am scos: $\left(v+v''-\frac{vv''}{V}\right)\frac{v''}{V}$ lichid de densitatea $d$ și $\left(v'-\frac{v'v''}{V}\right)\frac{v''}{V}$ lichid de densitatea $d$. Prin urmare la sfîrșit vom avea lichid de densitatea $d$:

$$v_1 = v + v - \frac{vv''}{V} - \left(v + v'' - \frac{vv''}{V}\right)\frac{v''}{V} = \left(v + v'' - \frac{vv''}{V}\right)\left(1 - \frac{v''}{V}\right),$$

lichid de densitatea $d'$:

$$v_2 = v' - \frac{v'v''}{V} - \left(v' - \frac{v'v''}{V}\right)\frac{v''}{V} + v'' = v'' + \left(v - \frac{v'v''}{V}\right)\left(1 - \frac{v''}{V}\right).$$

***Problema 279.**— *Să să demonstreze că dacă avem:*

$$(n - n')^2 < (m - m')(m'n - mn'),$$

*ambele ecuațiuni:*

$$x^2 + mx + n = o,$$
$$x^2 + m'x + n' = o,$$

*au rădăcinile reale.* (. Ionescu.)

*Soluțiune dată de D-l N. G. Muzicescu* (Student, Iași).

Din neegalitatea dată deducem succesiv:

$$n^2 - 2nn' + n'^2 - mm'n + m^2n' + m'^2n - mm'n' < o,$$
$$n^2 + 2nn' + n'^2 - 4nn' - mm'(n + n') + m^2n' + m'^2n < o,$$
$$(n + n')^2 - mm'(n + n') + m^2n' + m'^2n - 4nn' < o,$$
$$4(n + n')^2 - 4mm'(n + n') + 4m^2n' + 4m'^2n - 16nn' < o,$$
$$[2(n + n') - mm']^2 - m^2m'^2 + 4m^2n' + 4m'^2n - 16nn' < o,$$
$$[2(n + n') - mm']^2 - m^2(m'^2 - 4n') + 4n(m'^2 - 4n') < o,$$
$$[2(n + n') - mn']^2 - (m^2 - 4n)(m'^2 - 4n') < o,$$
$$(m^2 - 4n)(m'^2 - 4n') > [2(n + n') - mm']^2 > o.$$

De aci rezultă că nu putem avea de cît:

$$(1)\ \begin{cases} m^2 - 4n > o, \\ m'^2 - 4n' > o, \end{cases} \quad \text{sau } (2)\ \begin{cases} m^2 - 4n < o, \\ m'^2 - 4n' < o. \end{cases}$$

Zicem că neegalitățile (2) nu pot avea loc. In adevăr, observînd că pentru ca neegalitățile (2) să aibă loc, trebue ca $n$ și $n'$ să fie pozitivi, deducem din neegalitatea dată înmulțind'o cu $n$:

$$n[(n - n')^2 + m'^2n + m^2n' - mm'(m + n')] < o,$$
$$4n[(n - n')^2 + m^2n'] + 4m'^2n^2 - 4mm'(n + n')n < o,$$
$$4n[(n - n')^2 + m^2n'] + [2m'n - m(n + n')]^2 - m^2(n + n')^2 < o,$$
$$4n(n - n')^2 + [2m'n - m(n + n')]^2 + m^2(4nn' - n^2 - n'^2 - 2nn') < o,$$
$$4n(n - n')^2 + [2m'n - m(n + n')]^2 - m^2(n - n')^2 < o,$$
$$[2m'n - m(n + n')]^2 - (m^2 - 4n)(n - n')^2 < o.$$

Factorul $(m^2 - 4n)$ fiind negativ, ultimul termen e negativ. Așa dar primul membru e suma a două cantități pozitive, care nu poate fi mai mică la zero. Deci neegalitățile (2) nu pot subsista. Rămîn deci numai egalitățile (1), care ne indică că ecuațiunile:

$$(3)\quad \begin{cases} x^2+mx+n=0, \\ x^2+m'x+n'=0, \end{cases}$$

au rădăcini reale, de oare-ce realizanţii acestor ecuaţiuni sînt tocmai cantităţile din membrul I al neegalităţilor (1).

*Soluţiune dată de D-l E. G. Nițescu* (Elev al Liceului Naţional din Iaşi).

Din neegalitatea dată deducem succesiv:

$$4(n-n')^2<4(m-m')(m'n-mn+mn-mn'),$$
$$4(n-n')^2<4(m-m')[m(n-n')-n(m-m')],$$
$$4(n-n')^2<(m-m')[4m(n-n')-4n(m-m')],$$
$$4(n-n')^2-4m(m-m')(n-n')<-4n(m-m')^2,$$
$$[2(n-n')-m(m-m')]^2<m^2(m-m')^2-4n(m-m')^2,$$
$$[2(n-n')-m(m-m')]^2<(m^2-4n)(m-m')^2.$$

De aci se vede că $(m^2-4n)$ este pozitiv, de oare-ce alt-fel în membrul II am avea o cantitate negativă mai mare ca una pozitivă. Insă aceasta indică că prima din ecuaţiile (3) are rădăcini reale.

Procedînd în mod analog găsim că şi cealaltă ecuaţiune are rădăcinile reale. Aceasta se poate deduce şi direct observînd că înlocuind $m$ cu $m'$, $n$ cu $n'$ şi viceversa neegalitatea dată nu se schimbă, iar ecuaţiile (3) se înlocueşte una cu alta.

*Soluţiune dată de D-l V. V. Cambureanu* (Bărlad); *A. I. Pinchis* şi *E. G. Nițescu* (Elevi ai Liceului Naţional, Iaşi).

Punînd: $m=2p$, $m'=2p'$, $n=q$, $n'=q'$

neegalitatea dată şi ecuaţiunile devin:

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')<0,$$
$$x^2+2px+q=0,$$
$$x^2+2p'x+q'=0.$$

Se vede de aci că neegalitatea dată ne arată că eliminantul ecuaţiunilor precedente este negativ.

Se ştie că în acest caz ambele ecuaţiuni au rădăcinile reale, şi rădăcinile uneia sînt coprinse între rădăcinile celeilalte. (A se vedea *„Gazeta Matematică“*, Anul III, pag. 174).

* **Problema 321.** — *Să se demonstreze că nu e nici un număr întreg care înmulţit cu 2 să se reproducă la produs scris în sens invers.* (I. Penescu.)

*Soluţiune dată de D-nii: N. G. Muzicescu* (Student, Iaşi); *C.*

*Lăzărescu, V. V. Cambureanu* (Bărlad); *G. C. Dobrovici* (Ilb); *L. Hermann* (București); *E. Nițescu, A. I. Pinchis* și *A. Macarovici* (Elevi ai Liceului Național, Iași); *G. Constantinescu, I. Nicolaescu* și *G. C. Măinescu* (Elevi ai Liceului Carol I, Craiova) și *C. Țițirigă.*

Fie $a, b, c, \ldots k, l$ cifrele unui număr, așt-fel că înmulțindu-l cu 2 să se reproducă la produs scris în sens invers. Făcînd înmulțirea va trebui să avem deci:

$$\begin{array}{r} abc\ldots\ldots kl \\ \times\quad\quad\quad 2 \\ \hline lk\ldots\ldots cba \end{array}.$$

De aci se vede că $a$ trebue să fie par ca fiind unimile lui $2l$. Apoi produsul $2a$ trebue să fie mai mic ca 10, căci alt-fel produsul ar avea o cifră mai mult ca deînmulțitul. Din aceste două condițiuni reese că nu putem avea de cît $a=o$, $a=2$, $a=4$. Să examinăm pe rînd fie-care din aceste cazuri:

1) $a=o$. Pentru aceasta trebue să avem $l=o$, sau $l=5$. Dar $l$ fiind egal cu $2a$ sporit cu reținerile (cari la înmulțirea cu 2 nu pot fi de cît 0 sau 1) nu poate fi de cît 0 sau 1. Așa dar dacă $a=0$ avem și $l=0$. Aceasta revine la a zice că dacă aflăm un număr care îndeplinește condițiunea, găsim un altul scriind același număr de nule înainte și înapoi. In particular se obține și numărul $o$.

2) $a=2$. Pentru aceasta trebue să avem $l=1$ sau $l=6$. Dar $l$ fiind egal cu $2a$, sporit cu reținerile, el nu poate fi de cît $2\times2+0=4$ sau $2\times2+1=5$. Aceste valori excluzîndu-se unele pe altele rezultă că acest caz e imposibil.

3) $a=4$. Pentru aceasta trebue să avem $l=2$ sau $l=7$. Dar $l$ fiind egal cu $2a$ sporit cu reținerile, el nu poate fi de cît $2\times4+0=8$ sau $2\times4+1=9$. Aceste valori excluzîndu-se unele pe altele, reese că și acest caz e imposibil.

De aci rezultă că afară de $o$, sau un număr *scris* format din nule numai, nici un alt număr înmulțit cu 2 nu se reproduce la produs scris în sens invers.

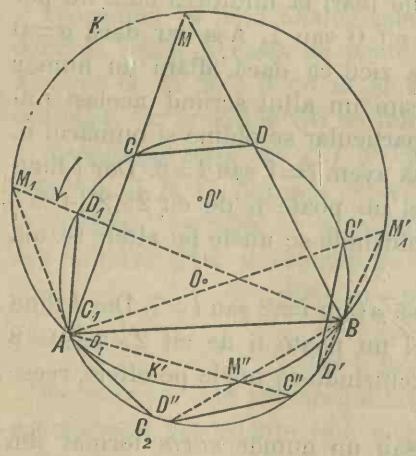
***Problema 322.** — *Unind extremitățile a doua coarde de lungimi date ale unui cerc obținem alte două coarde. Care e locul punctului de întîlnire al acestor din urmă coarde, cînd una din cele d'întăi este fixă iar cealaltă mobilă.*

**(G. G. Urechiă.)**

*Soluțiune dată de D-ra Maria G. Rugescu* (Studentă, Iași); *V. V. Cambureanu* (Bârlad); *G. C. Dobrovici* (Ib.); *N. Alexandrescu* (Elev al Liceului Codreanu, Bârlad); *C. Țițirigă* (Elev al Scoalei Speciale de Artilerie și Geniu); *C. Vintilă* (București); *L. Hermann* (Ib.); *I. Nicolescu* (Elev al Liceului Carol I, Craiova); *G. C. Măinescu* (Ib.); *G. Constantinescu* (Ib.); *E. G. Nițescu* (Elev al Liceuului Național, Iași); *A. I. Pinchis* (Ib.); *J. Wittner* (Elev al Scoalei de Poduri și Șosele); *N. Sichitiu* (Elev al Scoalei Militare, Craiova); *N. G. Muzicescu* și *C. Lăzărescu.*

Fie AB coarda fixă și CD cea mobilă, Putem uni extremitățile acestor coarde în două moduri: sau A cu C și B cu D, sau A cu D și B cu C. Coarda CD ar putea apoi fi mai mică sau mai mare ca AB. De aci rezultă că avem patru cazuri de considerat. Vom examina însă numai unul și vom arăta cum se modifică rezultatele pentru celelalte cazuri.

Fie deci CD < AB și să căutăm locul intersecțiunei M a dreptelor AC, BD. Să luăm coarda CD din poziținea în care e paralelă cu AB de aceiași parte a acestei drepte ca și centrul cercului, și să o mișcăm în sensul săgeții pînă ajunge paralelă cu AB de cealaltă parte. Se vede că pentru ori-ce poziținne a coardei CD de aceiași parte a lui AB ca și O, avem:




$$\sphericalangle CMD = \frac{arc\,AB - arc\,CD}{2} = const.$$

Deci locul punctului M este arcul $k$ al segmentului de cerc descris pe AB și capabil de unghiul constant C'M'D.

Cînd C vine în A iar D în $D_1$, dreapta AC devine tangentă în A. Avem în acest caz:

$$\sphericalangle C_1M_1D_1 = \sphericalangle AD_1B - \sphericalangle M_1AD_1 = \frac{arc\,AB}{2} - \frac{arc\,C_1D_1}{2}$$

$$= \frac{arc\,AB - arc\,CD}{2}.$$

Deci $M_1$ este tot pe arcul $k$.

Cînd punctul A cade pe arcul subîntins de coarda CD, punctul M rămîne tot pe arcul $k$. In adevăr avem un caz analog pentru coarda C'D' care ne dă:

$$\sphericalangle C'M'D' = \frac{arc\,AD' - arc\,BC'}{2} = \frac{arc\,AD' + arc\,BD' - arc\,BC' - arc\,BD'}{2}$$

$$= \frac{arc\,AB - arc\,C'D'}{2} = \frac{arc\,AB - arc\,CD}{2}.$$

Cînd punctul D vine în A ca pentru coarda C'D' punctul M vine în A', intersecția dreptelor $AC_2$, $BD_2$.

Cînd coarda CD vine sub AB ca în C''D'' avem:

$$\sphericalangle C''M''D'' = \frac{arc\,AKB + arc\,C''D''}{2} = \frac{360^0 - arc\,AB + arc\,CCD}{2}$$

$$= 180^0 - \frac{arc\,AB - arc\,CD}{2} = 180^0 - \sphericalangle CMD.$$

Deci punctul M'' este pe cercul segmentului capabil de suplimentul unghiului CMD, adică tocmai pe arcul AK'B.

Din cele spuse pînă aci rezultă că locul punctului M este circonferența complectă KK'. In cazul aci examinat se vede că centrul O' al circonferenței KK' este de aceiași parte cu O față de AB și mai depărtat de cît acesta.

Dacă se unea A cu D și B cu K se găsea iar ca loc o circonferință. Centrul acestei circonferințe însă e de aceiași parte cu O sau de parte opusă după cum suma arcelor AB și CD este mai mică sau mai mare ca $180^0$.

Dacă CD > AB atunci se găsește iarăși o circonferență ca loc geometric dar centrele nu mai au aceiași poziție.

## PROBLEME PROPUSE

*375. Să se înscrie într'o circonferință un triunghiu, cunoscînd poziția a două vîrfuri și știind cu celelalte două laturi ale triunghiului, interceptează pe o secantă fixă o lungime egală cu raza.

(G. G. Urechia.)

*376. Cele trei ace ale unui ceasornic, acul orelor, minutelor și secundelor, sînt la ora 12. Să se arate ca dupe o nouă întîlnire a acestor trei, avem relația:

$$N = N_1 + N_2$$

N reprezintă numărul întîlnirilor secundarului cu orariul.

$N_1$ » » » » » minutarul.

$N_2$ » » » minutarului cu orariul.

(N. NICULESCU.)

*377. Să se rezolve ecuaţia:

$$[2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)x][b^2+c^2-ax]+(a^2+c^2-bx)(a^2+b^2-cx)=0.$$

(C. ŢIŢIRIGĂ.)

*378. Se consideră toate triunghiurile înscrise într'un cerc dat O. Să se afle locul geometric al centrului unuia din cercurile exînscrise triunghiului, ştiind că produsul distanţelor creştetelor sale la centrul acelui cerc este constant. (N. G. MUZICESCU.)

379. Fie date patru planuri: $A_i x+B_i y+C_i z+D_i=0 (i=1, 2, 3, 4)$, care formează un tetraedru. Să se afle:

1) locul punctelor ast-fel ca picioarele perpendicularelor coborîte din unul din aceste puncte, pe cele patru feţe ale tetraedrului să fie în acelaş plan;

2) locul picioarelor perpendicularelor, cînd cele 4 puncte sînt în acelaş plan. (A. BUGA.)

*380. Se dau două cercuri cu centrele C şi C', iar pe CC' ca diametru se descrie un al treilea cerc care tae pe C în $A_1$ şi $A_2$, iar pe C' în $B_1$ şi $B_2$ (punctele $A_1$, $B_1$, sînt de aceiaşi parte a diametrului CC', de asemenea $A_2$, $B_2$). Să se arate că segmentele $A_1B_1$ şi $A_2B_2$ sînt împărţite de axul radical al cercurilor CC' în două părţi egale.

(B. IONESCU.)

*381. Se dă ecuaţiunea:

$$x^2+px+q=0.$$

Să se găsească relaţiunea dintre rădăcini, cînd ele sînt proporţionale cu coeficienţi $p$ şi $q$. Pentru o valoare dată unuia din aceşti coeficienţi, cîte valori poate avea celalt pentru ca relaţia să fie satisfăcută.

(I. IONESCU.)

382. Pe tangenta într'un punct M, la o circonferinţă dată, se ia totdeauna în acelaş sens o lungime NN, egală cu lungimea arcului MA, A fiind un punct de origine fix, luat pe circonferinţă. Să se găsească locul punctului N cînd M se mişcă pe circonferinţă, precum şi suprafaţa coprinsă între curba descrisă, raza OA şi poziţiunea razei ON cînd $ON=2\overline{OA}$. (A. G. IOACHIMESCU.)

Articolele și problemele insemnate cu *, se referă la matematicele elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articolele trimese de D-nii : **I. Longinescu, C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă.**

2) Probleme propuse de D-nii: **A. Iliovici, Gr. N. Makarie, N. G. Muzicescu, E. Nițescu, A. I. Pinchis, C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă.**

3) Probleme rezolvite de D-nii: **N. Alexandrescu** (283, 302, 12, 14, 24, 26, 28, 35, 37, 43, 44, 47, 50, 51, 52, 54, 55, 59, 61, 62, 68, 69, 70, 71); **V. G. Angelescu** (351); **T. M. Aristide** (365); **N. C. Athanasiu** (365); **M. Bacan** (318); **I. Banciu** (365, 72); **V. V. Cambureanu** (247, 71, 97, 312, 14, 16, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 47, 51, 52, 53, 55); **G. Constandinescu** (317, 26, 28, 33, 35, 37); **St. N. Corbeanu** (299, 302, 40, 43, 44, 59, 62); **G. C. Dobrovici** (283, 97, 302, 12, 14, 17, 24, 25, 26, 28, 36); **P. Dumitrescu** (318); **I. E. Dupont** (369, 72); **D. Focșa** (365, 69, 71, 72); **M. Fainzilber** (365, 69, 71); **C. N. Georgescu** (314, 18, 44, 65, 72); **N. G. Georgescu** (333, 44, 52, 55); **G. I. Gheorghiu** (365, 69); **G. Ghimbășeanu** (365, 69, 71, 72); **G. Giușcă** (318, 28, 33, 47, 52, 53, 55, 59, 65, 71); **G. Grămescu** (365, 68); **T. Grigorescu** (334, 68, 69, 71); **L. Hermann** (247 65, 83, 302, 06, 11, 12, 14, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 33, 35, 40, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 55, 59); **A. Iliovici** (280, 84, 94, 302, 07, 14); **C. Ionescu** (Ploești) (351); **C. Ionescu** (Galați) (323, 61, 68); **I. M. Ionescu** (283); **Virg. Ionescu** (323); **I. Kanner** (318); **G. G. Linteș** (365, 68, 72); **G. C. Măinescu** (317, 24, 38, 53); **A. Makarovici** (329, 33); **G. Manoliu** (312); **I. Moscuna** (247, 74, 80); **N. G. Muzicescu** (247, 80, 83, 97, 302, 06, 07, 12, 14, 17, 18, 24, 26, 33, 35, 37, 38, 40, 41, 45, 47, 59, 60, 61); **G. Mihăilescu** (299); **A. Nestor** (369); **I. Nicolaescu** (297, 302, 14, 16, 17, 18, 24, 28, 29, 35, 38, 39, 40, 43, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 59, 62, 65, 69); **M. P. Nicolescu** (317, 47); **E. Nițescu** (283, 306, 10, 14, 16, 23, 24, 29, 33, 35, 37, 39, 43, 45, 47, 51, 52, 53, 54); **G. Oprescu** (365); **N. Patriciu** (333); **A. I. Pinchis** (283, 306, 14, 24, 28, 29, 35, 43, 47, 51, 53, 59, 62, 66, 68, 69, 71); **I. Pitești eanu** (284); **P. Pompilian** (333, 47, 52, 65, 68); **C. Popovici** (293, 305, 07, 16); **Sp. Popovici** (314); **D-ra M. Rugescu** (284, 302, 07, 12, 14, 41, 48, 72); **I. Sichitiu** (283, 97); **N. Sichitiu** (317, 28, 33, 62, 65 68, 69); **G. V. Stănescu** (306, 07); **C. Țițirigă** (277, 83, 84, 94, 97, 302, 03, 08, 14, 15, 18, 19, 24, 27, 31, 33, 35, 40, 41, 47, 48, 50, 51, 52, 54, 56, 59, 71, 73); **G. G. Urechiă** (206, 58, 74, 77, 83, 84, 302, 03, 06, 07, 12, 14, 18, 19, 26, 33, 36, 40, 41, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 61, 62, 65, 68, 69, 71, 73); **C. M. Utză** (365); **C. Vintilă** (283, 88, 333, 52); **Th. M. Vladimirescu** (293, 94, 305, 07, 11, 41); **J. Wittner** (314, 18, 24, 29, 31, 33, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 47); **G. Zamfirescu** (369).

Probleme nerezolvite: 22, 106, 110, 113, 118, 127, 171, 172, 176, 204, 249, 253, 258, 282, 295, 304, 320, 332, 346, 349, 357, 358, 363, 364, 367, 374.

# SPRE STIINTA

*Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco: D-lui V. Cristescu, inginer, serviciul liniei Cernavoda-Constanța, la Cernavoda; sau D-lui A. G. Ioachimescu Inginer, Sub-Directorul Fabricei de Tutun, Belvedere, București; sau D-lui Bogdan Ionescu, Profesor la Gimnaziu, Rîmnicu-Vîlcei; sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19, București; sau D-lui N. Nicolescu, Inginer, Strada Mihai-Vodă 9, București.*

*Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.*

*De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.*

*Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.*

*Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După aparițiune se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.*

---

*Anul I, II și III al Gazetei matematice formează trei volume broșate de 288, 296 și 300 pagini și se vinde cu prețul de 10 lei fie-care volum.*

---

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele, schimbările de adrese și reclamațiunile trebuesc trimese D-lui **I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19, București.**