GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL IV.

NUMĂRUL 3. — NOEMBRE 1898.

SUMARUL

1. Compararea rădăcinilor mai mùltor ecuaţiuni de gradul II. . . . . *I. Ionescu*
2. Teorema lui Pitagora . . . . . *G. G. Longinescu*
3. Găsirea centrului unui cerc cu ajutorul compasului. . . . . *C. G. Erbiceanu*
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Probleme rezolvite: 277, 307, 314, 333, 372.
7. Probleme propuse: 383—390.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

TIPOGRAFIA CURŢII REGALE F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacția „*Gazetei Matematice*“ se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, . . . *Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . *Inginer.*
Cristescu Vasile, ... *Inginer.*
Davidescu Emanoil, . . . *Inginer.*
Erbiceanu Caton, ... *Inginer.*
Ioachimescu Andrei, ... *Inginer*, licențiat în matematici.
Ionescu Bogdan, ... *Profesor*, licențiat în matematici.
Ionescu Ion, ... *Inginer.*
Lupu Constantin, ... *Inginer.*
Nicolescu Nicolae, ... *Inginer.*
D-ra Pompilian Constanța . *Directoară de Institut*, licențiată în matematici.
Roco Mihail, ... *Inginer.*
Țițeica Gheorghe, ... *Profesor*, licențiat în matematici.
Zottu G. Ioan, ... *Inginer.*

*COMPARAȚIUNEA RĂDĂCINILOR MAI MULTOR ECUAȚIUNI DE GRADUL AL DOILEA [1]

(Urmare).

III) *Metoda transformărei ecuațiunilor.* Am văzut că putem face ecuațiunilor date anumite modificări fără a se schimba aranjamentul rădăcinilor acelor ecuațiuni. Pe de altă parte, am arătat că eliminantul se poate obține înlocuind unul din realizanți în locul lui x din ecuațiunea care ne dă patratele diferențelor dintre rădăcinile unei ecuațiuni, și semisuma rădăcinilor celeilalte ecuațiuni. De aci rezultă un nou metod pentru a compara rădăcinile a două ecuațiuni și pe care îl putem stabili direct fără a mai introduce noțiunea de separant și eliminant.

Pentru aceasta să micșorăm rădăcinile ambelor ecuațiuni cu aceiași cantitate și anume cu semisuma rădăcinilor primei ecuațiuni, adică cu $(-p)$. Prin aceasta știm că nu se va modifica aranjametul rădăcinilor. Insă a micșora rădăcinile cu $(-p)$ revine la a le spori cu p, și prin urmare înlocuind în (55) pe x cu p vom obține noile ecuațiuni, și anume:

$$(60)\quad \begin{cases} y-(p^2-q^2)=o \\ y^2-2(p-p')y+p^2-2pp'+q=o. \end{cases}$$

In aplicațiuni vom forma aceste ecuațiuni înlocuind în ecuațiile date pe x cu $y-p$, pentru a nu mai avea nevoe de ecuațiile (55). Primei din aceste ecuațiuni lipsindu-i termenul în y, rezultă că ea are rădăcinile egale și de semne contrare. Vom însemna aceste rădăcini cu $+Y$ și $-Y$. Examinînd apoi semnele coeficienților ecuațiunei (2) vom putea deduce semnele rădăcinilor, și vom ști prin urmare în care din următoarele trei cazuri ne aflăm:

$$(a)\qquad y'<o,\quad y''<o,$$
$$(b)\qquad y'>o,\quad y''>o,$$
$$(c)\qquad y'<o,\quad y''>o,$$

unde am însemnat prin y' rădăcina cea mai mică și cu y'' pe cea mai mare a ecuațiunei a doua. La ultimul caz vom examina de asemenea dacă în valoare absolută y' sau y'' este cel mai mare, ceea ce se poate deduce din semnul coeficientului lui y. Cu modul acesta cunoaștem semnele tutulor rădăcinilor ecuațiunilor (60). Pentru a vedea însă cum stau în valoare absolută rădăcinile unei

[1] A se vedea pag. 29, 53, 80, 101, 130, 154, 173, 197, 221, 250, 274. An. III.

ecuațiuni față cu rădăcinile celeilalte ecuațiuni să formăm ecuațiunile cari să ne dea patratele rădăcinilor ecuațiunilor (60). Aplicînd relațiunile (58) la ecuațiunile (60) găsim:

$$\begin{cases} y^2-2(p^2-q)y+(p^2-q)^2=o \\ y^2-2[2(p-p')^2-p'^2+2pp'-q']y+(p^2-2pp'+q')^2=o \end{cases}$$

cari se pot scrie:

$$(61)\quad \begin{cases} [y-(p^2-q)]^2=o, \\ y^2-2(p^2+2p'^2-2pp'-q')y+(p^2-2pp'+q')^2=o. \end{cases}$$

In aplicațiuni vom obține aceste ecuațiuni sau formîndu-le direct coeficienții sau înlocuind în ecuațiunile (60) pe y cu $\sqrt{y}$. Prima din aceste ecuațiuni are deci rădăcinile egale și egale cu p^2-q, ceea ce se putea deduce și direct observînd că prima ecuațiune (60) are ca rădăcini $\pm\sqrt{p^2-q}$. Introducînd deci în a doua din ecuațiunile (61) pe p^2-q în locul lui y, și examinînd semnul rezultatului vom putea ști dacă Y^2 este sau nu coprins între y'^2 și y''^2, cari sînt rădăcinile ecuațiunei a doua. In primul caz comparînd pe Y^2, adică p^2-q, cu semisuma $p^2+2p'^2-2pp'-q'$ a rădăcinilor y'^2 și y''^2 vom putea ști dacă Y^2 este mai mic sau mai mare ca cea mai mică sau cea mai mare din rădăcinile y'^2 și y''^2. De și am presupus că y' este rădăcina cea mai mică a celui de a doua ecuațiune (60), totuși se poate ca y'^2 să fie mai mare ca y''^2, dacă y' este negativ și mai mare în valoare absolută ca y''. Cum însă am făcut deja compararea valorilor absolute a lui y' și y'' vom putea ști cînd y'^2 este mai mare sau mai mic ca y''^2. Astfel fiind vom putea determina totdeauna cum stă Y^2 față cu y'^2 și y''^2, sau cu alte cuvinte cum stau în valoare absolută cantitățile Y, Y' și Y'' una în raport cu alta. Vom putea ști deci care din următoarele cazuri au loc în valoare absolută:

$$\begin{array}{ll} (d) & Y<y' \text{ și } Y<y'', \\ (e) & Y>y' \text{ și } Y>y'', \\ (f) & Y<y' \text{ și } Y>y'', \\ (g) & Y>y' \text{ și } Y<y''. \end{array}$$

Cazul (f) are loc dacă în valoare absolută y' e mai mare ca y'', și cazul (g) cînd contrariul are loc.

Cu aceste date putem face clasificarea rădăcinilor ecuațiunilor (60) și prin urmare și ale ecuațiunilor date. Mai mult încă, putem vedea și cum stau rădăcinile ecuațiunei (2) față cu semisuma ră-

dăcinilor ecuațiunei (1), căci aceasta revine la a vedea cum stau rădăcinile celei de a doua din ecuațiunile (60) față cu 0, care este semisuma rădăcinilor primei din acele ecuațiuni; cu alte cuvinte a examina semnele celei de a doua din ecuațiunile (60), ceea ce am făcut deja.

Pentru a face clasificarea rădăcinilor să considerăm următorul șir:

$$-\infty \qquad -Y \qquad 0 \qquad +Y \qquad +\infty.$$

Între aceste 5 cantități avem 4 intervale pe care să le numerotăm de la stînga la dreapta cu numerile I, II, III, IV. Chestiunea se reduce deci a vedea în care din aceste intervale se găsește y' și y'' pentru anumite cazuri. Aranjamentului y' și y'' față de $-Y$ și $+Y$ va fi același ca și cînd am fi comparat direct ecuațiunile date, iar aranjarea lui y' și y'' față de 0, ne va da poziționea rădăcinilor ecuației (2) față de semisuma rădăcinilor ecuației (1).

Să presupunem de exemplu că am avea cazurile (*a*) și (*d*). După (*a*) rădăcinile y' și y'' fiind negative ele nu pot fi de cît în intervalele I sau II sau una în primul interval și alta în al doilea. Insă după (*d*), y' și y'' fiind amîndoi mai mari ca Y în valoare absolută, ei nu pot fi de cît amîndoi în intervalul I. Deci rădăcinile ecuațiunilor (60) se grupează în modul următor:

$$y' < y'' < -Y < +Y$$

și prin urmare rădăcinile ecuațiunilor date se va grupa:

$$x'_2 < x''_2 < x'_1 < x''_1,$$

adică avem cazul I (A').

Să mai presupunem că am avea cazurile (*c*) și (*f*). După (*c*) y' nu poate fi de cît în intervalul I sau II iar y'' în intervalul III sau IV. Insă după (*f*) vedem că y' e mai mare în valoare absolută ca Y iar y'' este mai mic ca Y. Deci y' nu poate fi de cît în intervalul I iar y'' în intervalul III. Rădăcinile se aranjază deci în modul următor:

$$y' < -Y < y'' < +Y,$$

care conrespunde cazului III (*c*). Se mai vede că y'' e mai mare ca 0, iar y' mai mic, și prin urmare semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1) este coprinsă între rădăcinile ecuațiunei (2). Rațiunînd în același mod și însemnînd cu s semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1) putem forma următorul tablou:

In valoare absolută	$y'<o,\ y''<o$	$y'>o,\ y''>o$	$y'<o,\ y''>o$
$Y<y'$ și $Y<y''$	$x'_2\, x''_2\, x'_1\, s\, x''_1$	$x'_1\, s\, x''_1\, x'_2\, x''_2$	$x'_2\, x'_1\, s\, x''_1\, x''_2$
$Y>y'$ și $Y>y''$	$x'_1\, x'_2\, x''_2\, s\, x''_1$	$x'_1\, s\, x'_2\, x''_2\, x''_1$	$x'_1\, x'_2\, s\, x''_2\, x''_1$
$Y<y'$ și $Y>y''$	$x'_2\, x'_1\, x''_2\, s\, x''_1$	—	$x'_2\, x'_1\, s\, x''_2\, x''_1$
$Y>y'$ și $Y<y''$	—	$x'_1\, s\, x'_2\, x''_1\, x''_2$	$x'_1\, x'_2\, s\, x''_1\, x''_2$

In acest tablou aranjarea rădăcinilor se găsește la întîlnirea coloanei ce dă semnele lui y' și y'' cu linia care dă relațiunea dintre valorile absolute ale lui y', y'', Y.

In aplicarea acestei metode putem întîlni diferite cazuri particulare. Așa de exemplu am putea avea $y''=o$. In acest caz semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1) e egală cu rădăcina cea mai mare a ecuațiunei (2) adică $s=x''_2$. Prin urmare în tabloul precedent ar trebui să punem semnul $=$ între s și x''_2 la coloana IV iar coloana a doua va dispare, devenind identică cu a IV. Observăm însă că în coloana IV nu avem pe s și x''_2 alături de cît la a doua și a treia aranjare. Pentru celelalte ar mai trebui încă ca să avem și $s=x'_1$ sau $s=x''_1$, adică și $Y=o$, căci x'_1 și x''_1 sînt coprinse între s și x''_2. Vom examina mai la urmă cazul cînd $Y=o$. Am putea avea încă $y'=o$, și atunci în coloana IV ar trebui să punem semnul $=$ între s și x'_2, ceea ce se poate face la a doua și a treia din aranjările din acea coloană. In fine dacă $y'=o$ și $y''=o$, atunci va trebui să punem semnul $=$ între s și x'_2, s și x''_2 și prin urmare și între x'_2 și x''_2, ceea ce nu se poate face de cît la a doua aranjare din coloana IV.

Să presupunem acum că $Y=o$. In acest caz x'_1 și x''_1 devin egali cu s, adică ecuațiunea (1) are rădăcini egale. Va trebui deci în acest caz să punem semnul $=$ între s și x'_1, s și x''_1 și între x'_1 și x''_1, ceea ce nu se poate face de cît la prima linie de aranjamente. In adevăr Y fiind zero el este cel mai mic în valoare absolută. Dacă pe lîngă $Y=o$ mai avem și $y'=o$, sau ambele combinațiuni $y'=o$ și $y''=o$, atunci vom mai pune semnul egal și între s și x'_2, sau între s și x''_2, sau la amîndouă de o dată.

Se mai poate întîmpla ca Y să fie egal în valoare absolută cu y' sau y'', adică introducînd pe p^2-q în a doua ecuațiune (61) să obținem un rezultat nul. Aceasta ne arată că ecuațiunile (60) au o rădăcină comună căci $+Y$ sau $-Y$ va fi egal cu y' sau y'';

și prin urmare și ecuațiunile date au o rădăcină comună. Pentru a găsi cari sînt rădăcinile comune ar trebui să știm dacă în valoare absolută Y este egal cu y' sau y'', adică dacă Y^2 este egal cu y'^2 sau y''^2. Pentru aceasta vom compara pe Y^2, adică p^2-q cu semisuma $p^2+2p'^2-2pp'-q'$ a lui y'^2 și y''^2. Cu modul acesta vom ști dacă Y^2 e mai mare sau mai mic ca acea semisumă adică, dacă Y este egal în valoare absolută cu y' sau y''.

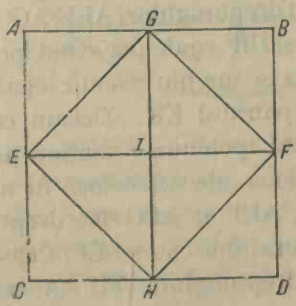
Să presupunem că în valoare absolută avem $Y=y'$ și $y'<y''$. Dacă y' și y'' sînt pozitivi vom avea atunci $+Y=y'$, și prin urmare rădăcinile ecuațiilor date se vor grupa: $x'_1 \, s \, x''_1=x'_2 \, x''_2$. Dacă y' și y'' sînt negativi vom avea gruparea $x'_1=x'_2 \, x''_2 \, s \, x''_1$. Dacă y' este negativ și y'' este pozitiv atunci vom avea gruparea: $x'_1=x'_2 \, s \, x''_2 \, x''_1$ sau $x'_1=x'_2 \, s \, x''_1 \, x''_2$ după cum în valoare absolută y' este mai mare sau mai mic ca y''. De asemenea dacă în valoare absolută avem $Y=y$ și dacă y' și y'' sînt pozitivi avem gruparea: $x'_1 \, s \, x'_2 \, x''_1=x''_2$; dacă y' și y'' sînt negativi avem gruparea $x'_2 \, x'_1=x''_2 \, s \, x''_1$; și dacă y' și y'' sînt de semne contrare avem gruparea $x'_1 \, x'_2 \, s \, x''_1=x''_2$ sau $x'_2 \, x'_1 \, s \, x''_1=x''_2$ după cum în valoare absolută y' e mai mare sau mai mic ca y''.

După cum se vede, această metodă are avantagiul a ne indica în acelaș timp și poziținea rădăcinilor unei ecuațiuni față cu semisuma rădăcinilor celeilalte ecuațiuni.

I. Ionescu.

*TEOREMA LUI PITAGORA

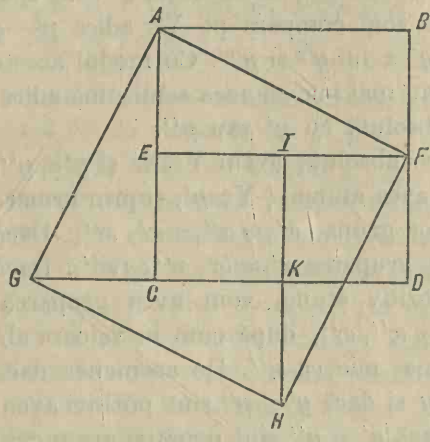
Într'un triunghiu dreptunghiu patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor.



I. Să considerăm cazul particular al unui triunghiu cu două catete egale. Fie patratul ABCD divizat în 8 triunghiuri egale prin sistemul de linii duse pe figură. Fie triunghiul drept GIF. Patratul construit pe ipotenuza GF este GEHF: este compus din triunghiurile GIE plus GIF sau EAG care formează patratul catetei GI și din EIH plus HIF

sau ECH care formează patratul celei de a doua catete. c.c.e.d.d.

Această demonstrațiune simplă am găsit'o indicată în literatură ca dată și de Pitagora.

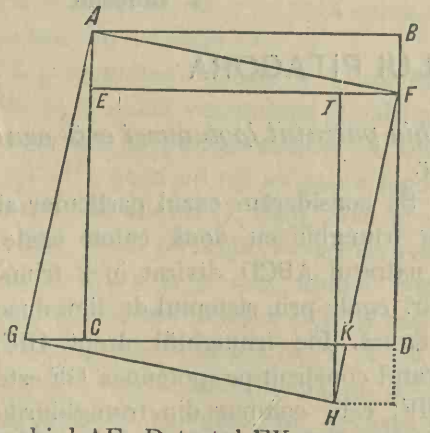


II. Să considerăm cazul cînd una din catete este de două ori mai mare ca cealaltă.

Fie triunghiul dreptunghiu AEF în care EF = 2AE. Să construim patratul ABCD al catetei EF și patratul AFGH al ipotenuzei AF.

Acest din urmă poate fi descompus în patru triunghiuri AEF, AGC, HGK și HIF egale (ca avînd ipotenuza și un unghiu ascuțit egal) și în patratul EK egal cu patratul catetei AE. Cele patru triunghiuri complectează patratul celeilalte catete căci $AEF + ACG = \frac{1}{2}$ patrat și $HKG + HIF = \frac{1}{2}$ patrat c.c.e.d.d.

III. Să considerăm cazul general al unui triunghiu dreptunghiu cu catetele ori cum.



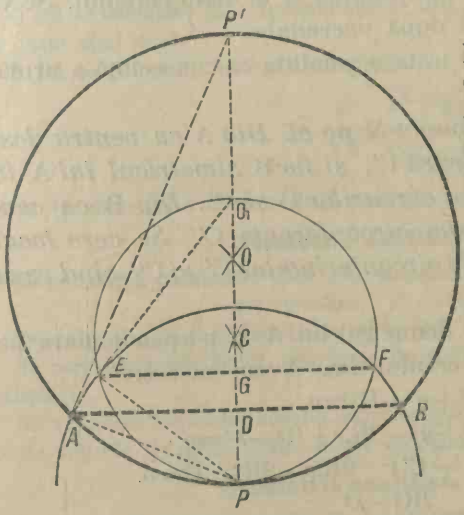
Fie triunghiul AEF. Să construim patratul ABCD al catetei EF și patratul AFGH al ipotenuzei AF. Acest din urmă poate fi descompus în patru triunghiuri dreptunghiuri AEF, ACG, HKG și HIF egale (ca avînd ipotenuza și unghiu ascuțit egal) și în patratul EK. Ziceam că patratul ipotenuzei conține pe cele două ale catetelor. In adevăr, AEF și ACG fac dreptunghiul AF. Patratul EK este comun și patratului catetei EF. Celelalte două triunghiuri HKG și HIF fac dreptunghiul FH. Acest

dreptunghiu complectează cu porțiunea ID patratul catetei EF. Patratul DH care mai rămîne e egal cu patratul celeilalte catete. c.c.e.d.d.

G. G. Longinescu.

* Găsirea centrului unui cerc cu ajutorul compasului

Această chestiune împreună cu alte probleme de construcțiune geometrică numai cu ajutorul compasului, au fost tratate de *L. Mascheroni*, în uvragiul său *„Geometria del Compasso"* apărut la 1795. Un rezumat al procedeurilor urmate de acesta sînt date în *Problèmes de Géométrie* par *G. Ritt*. Soluțiunea dată pentru găsirea centrului unui cerc este însă cam lungă, de oare-ce necesită tragerea a 18 arce de cerc, căci ea este subordonată problemei de a găsi cu compasul intersecția a două drepte determinate prin cîte două puncte. In ceîe ce urmează voiu indica un procedeu direct care necesită tragerea numai a 6 arce de cerc.



Construcțiunea. Din un punct de pe circonferență se descrie un arc de cerc cu o rază arbitrară, dar care să intersecteze circonferența dată Din punctele A și B de intersecție se descriu arce de cerc trecînd prin P, și cari se intersectează încă în punctul C. Din punctul C se descrie un arc de cerc trecînd prin P și care taie primul arc de cerc în E și F. Din aceste două puncte se descriu două arce de cerc trecînd prin P. Intersecția O a acestor arce este centrul căutat O.

Demonstrațiune. Exactitatea acestei construcțiuni se poate verifica ușor. Ducem coardele AB și EF și dreapta PCO care e perpendiculară pe acele coarde în D și C și prin urmare taie circonferența dată și circonferența CEF în punctele P' și Q diametral

opuse lui P. Ducem apoi dreptele AP′ și EQ. Triunghiurile dreptunghii PAP′ și PEQ ne dau:

$$AP^2=PD\times PP', \qquad \overline{AP}^2=PG\times PQ.$$

Dar prin construcție punctul C este simetricul lui P în raport cu AB și O simetricul lui P în raport cu EF. Deci:

$$PQ=2PC=4PD, \qquad PQ=\frac{PO}{2}.$$

Inlocuind în relațiunile precedente și observînd că AP=EP ca raze ale cercului AEFB obținem:

$$PD\times PP'=4PD\times\frac{PO}{2}=PD\times 2PO,$$

de unde:

$$PP'=2PO.$$

Cum PP′ e un diametru al cercului dat, se vede că O este centrul căutat.

Este evident că dacă raza primului arc e mai mică ca a cercului dat construcțiunea rămîne în întregime în interiorul cercului. In caz contrariu construcțiunea se întinde și în afară cercului. Se va alege deci un caz sau altul după necesitate.

Nota. Problema se poate trata și analitic ca consecință a următoarei probleme:

Se dă un cerc C *și un punct* A *pe el. Din* A *ca centru descrim o circonferență arbitrară* C′, *și fie* B *simetricul lui* A *în raport cu coarda comună a cercurilor* C *și* C′. *Din* B *ca centru cu* BA *ca rază descrim circonferența* C″. *Se cere locul punctelor de intersecție ale circonferințelor* C′ *și* C″ *cînd raza lui* C′ *variază.*

Luînd ca axe coordonate diametrul lui A și perpendiculara pe el în centru și fie R raza cercului dat. Avem succesiv:

Ecuația cercului C: $x^2+y^2-R^2=o,$

Ecuația cercului C′: $x^2+y^2-2Rx+R^2-\lambda^2=o,$

Ecuația coardei comune (C−C′): $2Rx-2R^2+\lambda^2=o,$

sau $$x=\frac{2R^2-\lambda^2}{2R}.$$

Coordonatele lui B: $$\frac{a^2-\lambda^2}{R},\ o,$$

Ecuația cercului C″: $$x^2+y^2-2\frac{R^2-\lambda^2}{R}x+R^2-2\lambda^2=o.$$

Ecuația coardei comune lui C'' și C'. $x=\frac{R}{2}$.

Deci ori-care ar fi raza cercului C, circonferențele C' și C'' se vor intersecta totdeauna pe perpendiculara dusă pe mijlocul razei punctului A. De aci rezultă imediat construcțiunea dată.

C. G. Erbiceanu

CHESTIUNI DE EXAMEN

Facultatea de Științe, București

(Examenele din Octombre 1898).

Algebră

I. Se dă: $\text{tg}\alpha=a$ și se cere:

1) Să se formeze ecuațiunea care dă pe $\text{tg}\frac{\alpha}{3}=x$;

2) Să se arate că ecuațiunea formată are toate rădăcinile sale reale, și să se separe rădăcinile;

3) Să se calculeze cu o aproximație de 0,01 cea mai mică rădăcină pozitivă, în cazul cînd $a=2$.

II. Să se calculeze derivata funcțiunei:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{L}\frac{\sqrt{3}+\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\text{tg}\frac{x}{2}},$$

să se însemne pe o circonferință punctele unde derivata schimbă de semn.

Geometrie analitică, plană

Se consideră parabolele date prin ecuațiunile:

$$(1)\quad y^2=2px,\quad (2)\quad y^2+2p'x=o.$$

Printr'un punct M al parabolei (2) se duc tangente la parabola (1).

Se cere locul mijlocului coardelor de contact cînd punctul M descrie parabola (2).

Se va arăta dispoziția acestui loc cînd parametrul p' variază, trecînd prin toate valorile algebrice reale. Axele coordonate sînt rectangulare.

Geometrie analitică, în spațiu

În planul xy al unui sistem de 3 axe rectangulare se consideră elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=o.$$

Se cere:

1) A se scrie ecuațiunea generală a cuadricelor care trec prin această elipsă;

2) printre acestea să se determine cele ce sînt de revoluție și să se scrie ecuațiunea axului lor;

3) să se scrie condițiunea ca aceste cuadrice să fie niște paraboloizi de revoluție și să se găsească locul vîrfurilor acestor paraboloizi.

Calcul diferențial

I. Să se transforme expresiunea:

$$(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx},$$

cu ajutorul substituției:

$$t=\mathrm{L}\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

II. Să se găsească maximul și minimul funcțiunei:

$$f(x,y)=x^2-4xy+y^2$$

cu condițiunea: $x^2+xy+y^2=1.$

Calcul integral

I. Dintr'un punct fix O se duce o perpendiculară pe o tangentă a unei curbe plane, situată în acelaș plan cu punctul O; prin piciorul perpendicularei se duce o paralelă cu o direcțiune dată. Să se găsească curba pentru care porțiunea acestei drepte, coprinsă între piciorul perpendicularei și axa Ox, este constantă.

II. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2bx+a^2)^3}}.$$

Concursul pentru obținerea unei burse din fondul Hillel

Să se cerceteze natura rădăcinilor ecuațiunei:

$$x^3-5px^2+5p^2x+2q=o$$

p fiind o cantitate pozitivă.

Notă. Această bursă, consistînd într'o sumă anuală de 480 lei, a fost obținută de corespondentul nostru *Gr. N. Makarie.* In numărul viitor vom publica soluțiunea dată de D-sa.

ȘCOALA DE PODURI ȘI SOSELE

Examenul de admitere în anul preparator

(Octombre 1898).

Aritmetică

I. Să se demonstre că ori-ce putere impară a lui 7, mărită cu unitatea, este un multiplu de 8.

II. Să se demonstre că restul diviziunei unui număr prim, prin 6 este 1 sau 5.

Geometrie

I. Se dă un dreptunghiu ABCD. Se ia pe latura AB o lungime AF=x și pe prelungirea laturei BC aceiași lungime BE=x. Să se determine x prin condiția ca volumul născut de patrulaterul DFEC, care se învîrtește în jurul laturei DC, să fie egal cu volumul născut de dreptunghiul ABCD, care se învîrtește și el în jurul laturei DC.

Condițiuni de posibilitate ale problemei. Se pot interpreta soluțiunile negative?

II. La ce distanță de centrul unei sfere, trebue să plasăm ochiul, pentru a vedea sfertul suprafeței sferei?

Algebră

I. Să se efectueze calculul următor și să se reducă la cea mai simplă expresie:

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}\sqrt[8]{y}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt[8]{y^3}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{y}} : \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{y}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{y}}.$$

II. Cine-va cumpără 2000 capete de animale de 3 speţe diferite, pe care le reprezentăm prin A, B, C. Dupe un an animalele de speţele A și C se înmulţesc respectiv cu 10% și 5%, pe cînd cele din speţa B se împuţinează cu 10%; numărul total de capete se mărește însă cu 1%. După al doilea an animalele de speţa A și C se înmulţesc respectiv cu 20% și 35%, pe cînd numărul animalelor din speţa B rămîne invariabil, iar numărul total se mărește cu 20%. Să se calculeze cîte capete sînt de fie-care speţă.

III. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$x^2+y^2+z^2=29;\quad x+y+z=9;\quad xy=12.$$

Trigonometrie

I. Se dă: $\cos x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

să se calculeze $\sin x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin\frac{x}{2}$. $\cos\frac{x}{2}$. Din cunoștinţa lui $\sin 2x$ să se deducă valorile arcului x.

II. Să se probeze că dacă într'un triunghiu ABC, avem între unghiurile A, B, C, relaţia:

$$\sin A=2\sin B\sin C,$$

triunghiul este isoscel.

ȘCOALA DE ARCHITECTURA

(Examenul din Septembre 1898).

Algebră

Să se calculeze un număr z, mediu proporţional între numerile x și y, cu-

noscînd suma acestor numere și suma cuburilor lor: $x+y=12$, $x^3+y^3=468$.

Observare. Valoarea lui z se va calcula cu trei cifre zecimale exacte. Se vor calcula și valorile lui x și y, formînd ecuațiunea de gradul al doilea, care admite aceste numere ca rădăcini.

Geometrie

Se dă un exagon regulat $a\,b\,c\,d\,e\,f$, înscris într'o circonferință de rază r Se vor prelungi laturile acestui exagon și se vor lua punctele de întîlnire ale laturei întăia cu a treia, a doua cu a patra, a treia cu a cincia și așa mai departe. Se vor obține ast-fel 6 puncte ABCDEF. Să se demonstre că poligonul ABCDEF este un exagon regulat, avînd o suprafață de trei ori mai mare de cît exagonul $a\,b\,c\,d\,e\,f$.

Observație. Figura va fi desemnată exact, pentru cazul cînd $r=40^m/_m$.

Notă. De doi ani s'a înființat pe lîngă *Școala de arte frumoase* (Bele-Arte) o secțiune de architectură, asimilată cu celelalte școli de învățămînt superior din țară. Cursurile durează patru ani: din care doi ani consacrați învățămîntului teoretic, iar doi ani rezervați exclusiv pentru proiecte de architectură. Condițiunile de admitere sînt șase clase de liceu și un examen consistînd din două compoziții de matematici, un desen dupe model grafic, și un desen dupe model de platru.

In numărul viitor vom publica enunțurile chestiunelor de *Geometrie descriptivă* și *perspectivă*, propuse la examenele de finele anului I, sesiunele din Iunie și Septembre.

BIBLIOGRAFIE [1]

Arpentagiu elementar teoretic și cu aplicațiuni (Hotărnicii) de D-l Lt. **Victor A. Bacaloglu,** Inginer hotarnic (284 pagini în 8°, prețul 3 lei).

Acesta este un uvragiu ce se adresează inginerilor hotarnici sau așa zișilor *geometri* sau *planșetari.* El este împărțit în următoarele părți: I) *Noțiuni preparatorii arpentagiului* cari coprind: *a*) Semnele și formulele mai necesarii, *b*) cunoștințe de Aritmetică, *c*) cunoștințe de Geometrie, *d*) instrumente de Arpentagiu; II) *Arpentagiu propriu zis*; III) *Ridicare de planuri*; IV) *Impărțirea cîmpurilor*, V) *Hotarele terenului și legi privitoare hotărniciilor*; VI) *Desenul și laviul planurilor*; VII) *Adaus. Longi-altimetric.*

In cele ce urmează nu mă voiu ocupa de cît de părțile I*a*, I*b*, I*c*, IV și VII de oare-ce celelalte părți es din cadrul cunoștințelor ce își pot avea locul

[1]) De și sub acest titlu nu vom face de ordinar dări de seamă, de cît despre uvragele ce se vor trimete redacțiunei „*Gazetei Matematice*“ totuși vom indica și altele, fie din cauza interesului deosebit ce ar avea pentru cititorii noștri, fie din cauză că ar conține unele erori de matematici pe cari credem util a le semnala. In acest scop rugăm pe conrespondenții noștri a ne indica uvragele cari cred că ar intra în una din aceste două categorii. N.R.

în această revistă. De asemenea nu mă voiu ocupa aci de părțile ce nu sînt destul de clar expuse de cît dacă acestea intră în domeniul științelor matematice [1]).

In prima parte, după «semnele întrebuințate în curs» urmează «formule generale și aplicațiuni» iar după acestea «fracțiunile zecimale.» Cu modul acesta suprafața triunghiului în funcțiune de latură este dată înaintea scrierei numerilor zecimale. Ar fi fost preferabil a se lăsa pentru partea II suprafețele figurilor elementare, și a se da imediat fracțiunile zecimale după enumerarea semnelor. La pag. 7, 8, 9 suprafețele sînt date ca *definițiuni* ale figurilor. Ar fi trebuit înlocuit cuvîntul «*definițiune*» prin *regulă* sau alt-ceva analog. La pag. 8 numirea de «*rectilinii*» dată unui triunghiu dreptunghiu nu este justă. La pag. 5 găsim următoarea regulă: «Este ușor a transforma un număr oare-care de metri pătrați în despărțiri de cîte două cifre începînd de la dreapta la stînga.» Această regulă e aplicabilă numai unui număr exact de metri pătrați avînd 6 cifre. La pag. 11 găsim următoarea regulă: «Se reduce o fracțiune ordinară în zecimală divizînd numărătorul prim numitor, după ce s'a scris la dreapta numărătorului un număr oare-care de nule; apoi se la la dreapta cîtului atîtea zecimale, prin adăogire de nule la numărător, pînă operațiunea se face exact.» Această regună nu e de loc clară.

Numirea de *întindere* dată, în general, la «aceea ce reunește cele trei dimensiuni» nu este bine aleasă, de oare-ce prin întindere nu se înțelege de ordinar de cît două dimensiuni. Așa de exemplu se zice întinderea unei moșii De alt-fel chiar în restul uvragiului cuvîntul de întindere e întrebuințat tot în această accepțiune. Definițiunea dată liniei și punctului conține un cerc vicios: «Se dă numele de *linie*, la o reunire de o infinitate de puncte neavînd de cît o dimensiune: o lungime infinit mică. Trebue a se înțelege prin *punct*, elementul ideal, infinit de mic, al unei linii, iar nu punctul produs de creion sau toc.»

Definițiunea verticalei nu este bună. După acea definițiune linia verticală e «determinată de direcția ce o ia în spațiu un corp liber suspendat.» Suprafața unei oglinzi luată ca exemplu de un plan nu este bine aleasă, de oare-ce sînt și oglinzi sferice. cilindrice etc. Modul de măsurare al unghiurilor nu e bine expus. In adevăr la pag. 29 găsim: «Mărimea unui unghiu se măsoară prin depărtarea laturilor; deci această mărime nu este indicată de lungimea laturilor sale.» In urma acestei definițiuni se poate pune întrebările: Cum se măsoară depărtarea a două drepte ce se întîlnesc? Unghiul a două paralele depărtate cu un metru este de un metru? La pag. 33 se zice în mod general că 2 unghiuri cari au laturile perpendiculare două cîte două sînt egale. Se știe că 2 unghiuri în aceste condițiuni pot fi și suplimentare. La pag. 41 și 46 găsim iar numirea de rectiliniu dată triunghiurilor dreptunghii. La pag. 42 în loc de «Supimentul acestor două din urmă» trebuia scris «Suplimentul sumei acestor două din urmă» și în loc de «triunghiu isoscel» trebuia scris

[1]) O dare de seamă mai detaliată se poate găsi în *„Buletinul Societății Politechnice“*, Octombre și Noembre 1898.

«triunghiu dreptunghiu isoscel» căci a afirma în general că: «unghiurile ascuțite ale unui triunghiu isoscel valorează fie-care 45°» nu este adevărat. La pag. 44 se afirmă în mod general că: «figurile equivalente nu se pot suprapune.» Ar fi trebuit scris «figuri equivalente oare-care» căci de ex. două poligoane regulate de același număr de loturi și equivalente sînt superposabile. La pag. 49 se cere ca aplicațiune să se afle suprafața unui heptogon regulat de 20 metri latură și 22 metri apotemă. Se poate calcula însă că nu există nici un heptogon regulat cu aceste lungimi. Ar fi trebuit ca odată una din aceste două lungimi aleasă, cealaltă să se fi calculat. O eroare de calcul găsim la pag. 9, unde suprafața unui trapez avînd bazele de 12 și 3 metri și înălțimea de 7 metri, se găsește de 126 m.p. Eroarea provine din aceia că în loc a se face semisuma bazelor, s'a făcut semiprodusul lor. La pag. 42 *elipsa* e definită ca «o linie curbă închisă descrisă din mai multe centre», *axele elipsei* sînt definite ca «liniile AB, CD cari situate în elipsă sînt perpendiculare una pe alta și se taie mutual în două părți egale» iar *excentricitatea* ca «distanța F'F' coprinsă între focare.» Nici una din aceste definițiuni nu este bună. Apoi se dă (la o aplicațiune) ca mijloc pentru aflarea lungimei elipsei, înmulțirea lui π cu semisuma axelor. La pag. 55 se afirmă că din formula ce dă suprafața elipsei este ușor a extrage valoarea lungimei elipsei. La măsurarea diedrelor trebuia spus că «perpendicularele duse în un punct oare-care al muchiei» trebuesc să fie așezate în cele două fețe ale diedrului.

Relativ la partea IV avem de remarcat următoareie. La pag. 191 și 193 cuvîntul *pereche* este întrebuințat în loc de *putere a lui 2*, iar cuvîntul *ne pereche* în loc de *neputere a lui 2*. La împărțirea triunghiurilor prin perpendiculare la una din laturi, toate aplicațiunile sînt false. Dacă avem un triunghiu ABC, dacă D e piciorul înălțimei dusă din A, dacă I e un punct al bazei BC și PE o perpendiculară pe această bază (P fiind pe BC iar E pe AB) atunci triunghiurile AIB, EPA sînt echivalente, dacă BP este media proporționalei între BI și BD. La toate aplicațiunile autorul înlocuește pe D cu C și nu ține seama că regula nu se aplică de cît cînd BPE e triunghiu, adică dacă P cade între D și B, și că în caz contrariu trebuesc luate mediile de la C. Cu modul acesta exemplele la cari se referă figurile 156, 157, 158, 159, 160 sînt rezolvate în mod falș. Erori analoage se găsesc și la împărțirea triunghiurilor prin drepte paralele cu o direcție dată; așa că exemplele de la pag. 208 și 209 nu sînt bine rezolvate. La pag. 223 împărțirea unui triunghiu în părți proporționale cu numerile 1, 2, 3 prin paralele la bază nu este bine făcută de oare-ce mediile proporționale trebuiau calculate plecînd de la A (vîrful triunghiului) iar nu de la C.

La partea VII avem de remarcat următoarele. La măsurarea distanței de la 2 puncte între care se găsește un obstacol era bine să nu se presupună că obstacolul oprește vederea de la B la A dar nu oprește vederea de la A la B. La măsurarea înălțimei unui far datele numerice nu sînt bine alese. In adevăr dacă linia măsurată pe teren AB face cu dreptele AC, BC duse din extremitățile ei la vîrful farului unghiuri de 47° și 133°, atunci înălțimea fa-

rului nu poate fi de 40^m cum este dată ci infinită, căci dreptele AC, BC făcînd cu AB unghiuri interioare de aceiași parte suplimentare, sînt paralele

Pe lîngă aceste erori indicate mai intervin și o mulțime erori de tipar cari fac de multe ori înțelegerea cu totul dificilă, în cît ar fi de dorit ca autorul să facă o erată pe care să o atașeze fie-cărui volum. La multe din aceste erori autorul a fost victima încrederei pe care a avut'o în uvragiul francez: *Cours complet d'arpentage* par *D. Puille* (d'Amiens) și de care s'a servit mai peste tot. Așa de exemplu cele relative la *elipsă*, exemplul dat la aflarea înălțimii unui far etc. sînt date în mod identic și în acest uvragiu. În acest din urmă mai găsim cubul definit ca o prismă care are drept baze două patrate, și grămezile de nisip măsurîndu-se sau făcînd semisuma bazelor și înmulțind'o cu înălțimea, sau considerînduse ca un trunchiu de piramidă (!?). Acest uvragiu poate că convenea anului 1851 și școlilor primare rurale, după cum îl recomandă *I. Francoeur*, dar nu mai corespunde cunoștințelor ce trebue să aibă actualmente un inginer-hotarnic, căruia i se cere aritmetica, geometria, algebra, trigonometrie și noțiuni de geometria analitică plană.

I. I.

PROBLEME REZOLVITE

Problema 277. — *Fie* R *punctul de rebrusment al unei cisoide date și* M *un punct oare-care al curbei. Tangenta în* M *întîlnește curba într'un al doilea punct* N. *Să se afle locul centrului cercului circumscris triunghiului* MNR.

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l G. G. Urechiă (Elev al Școalei Speciale de Artilerie și Geniu).

Ecuația cisoidei raportată la tangenta în punctul de rebrusment și la perpendiculara pe tangentă în acest punct este:

$$y^2(a-x)=x^3. \qquad (1)$$

Dacă punem

$$x=ty \qquad (2)$$

atunci cu ajutorul ecuațiilor (1) și (2) găsim că *ecuațiile parametrice* ale cisoidei sînt:

$$x=\frac{a}{t^2+1}, \qquad y=\frac{a}{t(t^2+1)}. \qquad (3)$$

Fie:

$$ux+vy+w=o$$

ecuația unei drepte oare care. Dacă înlocuim în această ecuație pe x și y prin valorile date de relațiunile (3), obținem ecuația:

$$wt^3+(au+w)t+av=o$$

ast-fel că parametrii t_1, t_2, t_3 a trei puncte a cisoidei situate pe o aceiași dreaptă, verifică relațiunea:

$$t_1+t_2+t_3=o. \qquad (4)$$

Dacă două din punctele de intersecție vin de se confundă, atunci dreapta devine tangentă la cisoidă. Prin urmare dacă t_1 este parametral punctului de tangență M și t_2 parametrul *tangențialului* N a lui M, atunci avem $t_3=t_1$ iar relațiunea (4) ne dă:

$$t_2=-2t_1. \qquad (5)$$

Fie acum (α, β) coordonatele centrului unui cerc care trece prin punctul de rebrusment R. Ecuația acestui cerc va fi:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=o. \qquad (6)$$

Dacă în această ecuație înlocuim pe x și y prin valorile date de relațiunile (3), găsim că cercul taie curba în două puncte diferite de R, ale căror parametre sînt date de ecuația:

$$2\alpha t^2+2\beta t-a=o.$$

Prin urmare dacă acest cerc trece prin M și N va trebui să avem:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\beta}{\alpha}&=t_1+t_2 \\ -\frac{a}{2\alpha}&=t_1t_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Dacă eliminăm pe t_1 și t_2 între relațiunile (5) și (7), găsim că locul centrului cercului circumscris triunghiului MNR este parabola:

$$4\beta^2=a\alpha.$$

Soluție dată de D-l C. Țițirigă (Elev al Școalei Speciale de Artilerie și Geniu).

Fie t_1 parametrul punctului de tangență M. Coordonatele punctului M vor fi:

$$x=\frac{a}{t_1^2+1} \qquad y=\frac{a}{t_1(t^2_1+1)}$$

iar ecuația tangentei în punctul M este

$$(3t^2_1+t^2_2+t_1t_2+1)x-t_1t_2(t_1+t_2)y=o. \qquad (2)$$

Dacă identificăm ecuațiile (1) și (2) obținem:

$$t_2 = -2t_1$$

și prin urmare coordonatele punctului N vor fi

$$x = \frac{a}{1+4t_1^2}, \qquad y = \frac{-a}{2t_1(1+4t_1^2)}.$$

Ecuațiile perpendicularelor ridicate pe mijlocul dreptelor RM, RN vor fi deci respectiv:

$$2t_1^2 x + 2t_1 y - a = o \qquad (3)$$

$$8t_1^2 x - 4t_1 y - a = o. \qquad (4)$$

Dacă între aceste două ecuațiuni eliminăm pe t_1, găsim că locul centrului cercului circumscris triunghiului MNR este parabola

$$4y^2 = ax.$$

* **Problema 307.**— *Fie $f(x, y, z)$ un polinom simetric în raport cu literile x, y, z (adică care nu se schimbă cînd schimbăm între ele literile x, y, z). Să se arate că dacă acest polinom e divizibil cu $(x-y)^\alpha$, $(y-z)^\beta$, $(z-x)^\gamma$; α, β, γ fiind numere întregi fără soț; el va fi divizibil și cu produsul $(x-y)^{\alpha+1}(y-z)^{\beta+1}(z-x)^{\gamma+1}$.* (A. G. Ioachimescu.)

Soluție dată de D-ra Maria G. Rugescu (Studentă, Iași) *și de D-nii: A. Iliovici, N. G. Muzicescu* și *C. Popovici* (Studenți, Iași); *G. V. Stănescu* (Student, București); *G. G. Urechiă* (Sc. Sp. de Art. și Geniu); *Th. M. Vladimirescu* (R.-Vîlcei); *V. V. Cambureanu.*

Polinomul $f(x, y, z)$ fiind divizibil cu $(x-y)^\alpha$, $(y-z)^\beta$, $(z-y)^\gamma$ va fi divizibil și cu produsul lor, și vom avea:

$$f(x, y, z) = (x-y)^\alpha (y-z)^\beta (z-x)^\gamma Q(x, y, z).\ ^{1})$$

Să schimbăm literile x și y între ele, vom avea:

$$f(y, x, z) = (y-x)^\alpha (x-z)^\beta (z-y)^\gamma Q(y, x, z).$$

Prin ipoteză: $f(x, y, z) = f(y, x, z)$, căci polinomul f este simetric, de asemenea: $(x-y)^\alpha (y-z)^\beta (z-x)^\gamma = -(y-x)^\alpha (y-z)^\beta (z-x)^\gamma$, numerele α, β, γ fiind fără soț, deci:

$$(y-z)^\beta (z-x)^\gamma Q(y, x, z) + (x-z)^\beta (z-y)^\gamma Q(y, x, z) = o.$$

---

[1]) Această teoremă se demonstră obișnuit numai pentru cazul factorilor la puterea întâia. Ea însă poate fi stabilită ușor și pentru cazul factorilor ridicați la puteri întregi oare care $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Este suficient, pentru aceasta, ca după ce am scos odată factori $(x-y)^\alpha$ $(y-z)$, să dividem ambi membri cu $y-z$, citul mai admite încă o dată acest factor și așa mai departe. A. G. I.

Făcînd $x=y$ și suprimînd factori comuni, avem:

$$Q(y, y, z)=o,$$

deci polinomul $Q(x, y, z)$ este divizibil cu $x-y$. In acelaș mod se poate proba că $Q(x, y, z)$ este divizibil prin $y-z$ prin $z-x$, deci divizibil cu produsul lor, și vom avea:

$$Q(x, y, z)=(x-y)(y-z)(z-x)\,Q'(x, y, z),$$

iar

$$f(x, y, z)=(x-y)^{\alpha+1}(y-z)^{\beta+1}(z-x)^{\gamma+1}\,Q'(x, y, z).$$

C.C.T.D.

Generalizare de D-l Th. M. Vladimirescu. Fie $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ un polinom *simetric*, în raport cu n litere x, $x_2 \ldots x_n$, dacă polinomul f va fi divizibil cu $(x_1-x_2)^{\alpha_1}$, $(x_1-x_3)^{\alpha_2}$ ..... , $(x_{n-1}-x_n)^{\alpha_m}$ el va fi divizibil și prin:

$$(x_1-x_2)^{\alpha_1+1}(x_1-x_3)^{\alpha_2+1} \ldots\ldots (x_{n-1}-x_n)^{\alpha_m+1}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ fiind numere întregi fără soț.

In adevăr avem:

$$f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)=(x_1-x_2)^{\alpha_1}(x_1-x_3)^{\alpha_2} \ldots (x_{n-1}-x_n)^{\alpha_m} Q(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n).$$

Schimbînd pe x_1 și x_2 între ei primul membru nu se schimbă.

Egalînd valorile lui $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$, suprimînd factorul comun $(x_1-x_2)^{\alpha_1}$, și făcînd în rezultat pe $x_1=x_2$, avem dupe ce am simplificat:

$$Q(x_1, x_1 \ldots x_n)=o$$

deci polinomul Q este divizibil cu x_1-x_2.

Restul demonstrațiuni ca mai sus.

Factori binomi din membrul al doilea al egalității de mai sus, sînt:

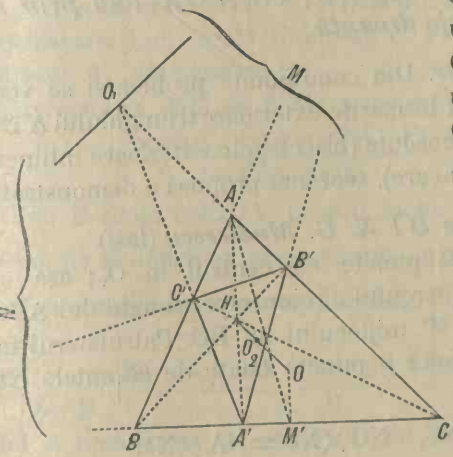
$$x_1-x_2,\ x_1-x_3 \ldots\ x_1-x_n$$
$$x_2-x_3 \ldots\ x_2-x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1}-x_n,$$

adică în total $\frac{n(n-1)}{2}$ factori.

***Problema 314.** — *Fie* A'B'C' *picioarele înălțimilor triunghiului* ABC; M, N, Q *punctele unde dreptele* A'B', B'C', C'A' *întîlnesc laturile triunghiului dat. Să se arate că cele trei puncte sînt în linie dreaptă.* (G. Iliovici.)

Soluție dată de D-nii: G. Dobrovici, E. G. Nițescu (Iași); *L. Hermann* (București); *A. I. Pinchis* (Iași); *I. Nicolaescu* (Craiova); *C. Țițirigă, Sp. Popoviici* și *C. N. Georgescu.*

Se știe că înălțimele sînt bisectrițe unghiurilor triunghiului A′B′C′.



Considerînd de exemplu triunghiu BC′C dreptunghic în C′; fiind-că CC′ e bisectrița unghiului A′C′B, urmează că C′B e bisectrița unghiului A′C′N și deci avem relația:

$$(1)\quad \frac{NB}{NC}=\frac{A'B}{A'C'}$$

apoi din diviziunile armonice (B′,MC′AB), (A′,Q′B′AC) deducem:

$$(2)\ \frac{MA}{MB}=\frac{C'A}{C'B'}\qquad (3)\ \frac{OC}{OA}=\frac{B'C}{B'A'}$$

Imulțind membru cu membru (1), (2), (3) se obține:

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{OC}{OA}=\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}=1$$

după teorema lui *J. de Ceva;* prin urmare după reciproca teoremei lui *Menelaus* punctele M, N, Q sînt în linie dreaptă.

Soluție dată de D-ra M. Rugescu și de D-nii: N. G. Muzicescu, G. G. Urechiă, V. V. Cambureanu și *Nicolae Alexandrescu* (Bărlad); *A. Iliovici* (Iași).

Consider triunghiul HAB și transversala A′B′M; avem relația:

$$HA'\times AM\times BB'=HB'\times BM\times AA'.$$

Considerînd de asemenea triunghiurile HBC, HAC cu transversalele respective B′C′N, A′C′Q avem alte două relațiuni analoage:

$$HB'\times BN\times CC'=HC'\times CA'\times BB'$$
$$HC'\times CQ\times AA'=HA'\times AQ\times CC'.$$

Imulțind aceste relațiuni membru cu membru și reducînd expresia rezultată, obținem:

$$AM\times BN\times CQ=BM\times CN\times AQ,$$

ceea ce indică, conform reciprocei teoremei lui Menelaus, că M,

N, Q sînt în linie dreaptă. In această soluție nu se prevede, de cît ca dreptele AA′, BB′, CC′ să fie concurente, ca condiție a problemei, deci se poate zice *că dacă trei drepte* AA′, BB′, CC′ *sînt concurente în un punct oare-care al planului triunghiului* ABC, *atunci dreptele* AB *și* A′B′, BC *și* B′C′, CA *și* C′A′ *dau prin intersecție trei puncte în linie dreaptă.*

Soluția D-lui J. Wittner. Din condițiunile problemei se vede că dreptele A′B, B C, C′A sînt bisectrițe exterioare triunghiului A′B′C și conform unei teoreme cunoscute (bisectrițele exterioare întîlnesc laturele opuse în puncte colineare), teorema propusă e demonstrată.

Alte două soluții date de D-l N. G. Muzicescu (Iași).

I. Consider cercul celor 9 puncte cu centrul în O_9; așa că $O_9H = O_9O$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Acest cerc O_9 trece și prin M′ mijlocului lui BC. Patrulaterul inscriptibil BCB′C′ și cercul celor 9 puncte tăiate de secantele NB și NB′ dau relațiele

$$NC' \times NB' = NB \times NC, \quad NC' \times NB' = NA' \times NM'$$

de unde:

$$NB \times NC = NA' \times NM',$$

adică punctul N e *pe axul radical* al cercurilor O și O_9; considerînd pe rînd patrulaterele inscriptibile ABA′B′, ACA′C′ și cercul O_9 se demonstră că și M și Q se află *pe axul radical al cercurilor* O *și* O_9.

II. Teorema propusă e un caz particular a teoremei lui Desargues:

Cînd două triunghiuri au vîrfurile (A, A′), (B, B′), (C, C′), *pe trei drepte concurente, laturile* (AB, A′B′), (BC, B′C′), (CA, C′A′) *se întîlnesc în trei puncte colineare.* Aci vîrfurile celor două triunghiuri sînt pe drepte concurente în H.

***Problema 333.** — *Să se găsească adevărata valoare a expresiei:*

$$\frac{(\sec 2B - \sec 2A)\,[\cos 2(A+B) + \cos 2(A-B)]}{4(A-B)}$$

pentru $A = B$. **(I. Nicolaescu.)**

Soluție dată de D-nii: V. V. Cambureanu, L. Hermann, N.

G. Muzicescu și *J. Wittner* (Elevi ai Școalei de Poduri și Șosele); *N. G. Georgescu* și *N. Patriciu* (Studenți, București); *G. Giușcă*, *C. Țițirigă* și *G. G. Urechiă* (Elevi ai Școalei Speciale de Artilerie și Geniu); *P. Pompilian*, *N. Sichitiu* (Școala Militară, Craiova); *A. A. Makarovici* și *E. G. Nițescu* (Lic. Național, Iași); *G. Constantinescu* (Lic. Carol I, Craiova); *C. Vintilă* (București); *G. Grăunescu* și *N. Alexandrescu*.

Expresiunea dată se poate scrie sub forma:

$$\frac{\cos 2(A+B)+\cos 2(A-B)}{4\cos 2A\cos 2B}\cdot\frac{\cos 2A-\cos 2B}{A-B}.$$

Cînd B tinde către A, primul factor are o valoare determinată, iar cel de al doilea se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$. Pentru a ridica această nedeterminare, trasformăm diferența de *cos.* într'un produs de *sin.* avem:

$$\frac{\cos 2A-\cos 2B}{A-B}=\frac{-2\sin(A-B)\sin(A+B)}{A-B}=-2\sin(A+B)\frac{\sin(A-B)}{A-B},$$

cînd B tinde către A, raportul: sin (A—B): (A—B) tinde către 1, iar expresia precedentă tinde către: —2sin2A. Prin urmare adevărata valoare a expresiunei date va fi:

$$-2\frac{\cos 4A+1}{4\cos^2 2A}\sin 2A=-\sin 2A,$$

căci:

$$1+\cos 4A=2\cos^2 2A.$$

***Problema 372.**— *Să se arate prin exemple că întrebuințînd de 5 ori, ori-care cifră și semnele algebrice se pot face expresiuni a căror valoare să fie 14, iar întrebuințîndu-se de 6 ori, ori-care cifră și semnele algebrice se pot face expresiuni a căror valoare să fie 15.* (I. Ionescu.)

Soluțiuni parțiale date de D-nii: Hrubes Stefan (Clasa VI Lic. Mihai-Viteazu); *D-ra Maria G. Rugescu* (Studentă, Iași); *C. N. Georgescu* și *I. Banciu* (Clasa VII Lic. Ploești); *M. Feinzilber* (Iași); *I. R. Dupont*, *D. Focșa*, *G. Ghimbășanu* și *G. G. Lintes* (Școala Militară, Iași).

a) Expresiuni a căror valoare este 14:

Cu cifra 1 $11+1+1+1$ (*H. S.*)

Cu cifra 2 $2^2\times 2^2-2$ (*H. S.*), $2\times 2\times 2\times 2-2$ (*D-ra M. G. R.*;

M. F.), $(2^2)^2-(\sqrt{2})^2$ (*I. E. D.*) $2(2+2+2)+2$ (*M. F.*), $(2+2)\times 2\times 2-2$ (*C.N.G.*), $(2+2)^2-\sqrt{2^2}$ (*M. F.*).

Cu cifra 3 . . . . . .

Cu cifra 4 $4\times 4+4-4-\sqrt{4}$ (*H. S.*), $\sqrt{4\times 4}+4+4\sqrt{4}$ (*H. S.*), $4\times 4-\frac{4+4}{4}$ (*C. N. G.*; *M. F.*), $4+4+4+4-\sqrt{4}$ (*I.B.*); (*I. E. D.*), $\frac{4\times 4+4}{\sqrt{4}}+4$ (*D. F.*; *G. G.*),

Cu cifra 5 $5+5+5-\frac{5}{5}$ (*H. S.*; *C. N.*; *G. M. F.*),

Cu cifra 6 $6+6+\frac{6+6}{6}$ (*C. N. G.*),

Cu cifra 7 $7+7+\sqrt{7\times 7}-7$ (*H. S.*), $\sqrt{7\times 7}\left(\frac{7+7}{7}\right)$, (*M.F.*),

Cu cifra 8 $8+8-\frac{8+8}{8}$ (*C. N. G.*),

Cu cifra 9 $\sqrt{9}+\sqrt{9}+9-\frac{9}{9}$ (*H. S.*), $9+9-\sqrt{9}-\frac{9}{9}$ (*C.N.G*; *M.F.*)

b) Expresiuni a căror valoare este 15.

Cu cifra 1 . . . . . .

Cu cifra 2 $2^2\times 2^2-\frac{2}{2}$ (*H. S.*), $(2+2)\times 2\times 2-\frac{2}{2}$ (*C. N. G*), $2\times 2\times 2\times 2-\frac{2}{2}$ (*M. F.*), $(2+2)^2-2+\frac{2}{2}$ (*M. F.*), $(2+2)(2+2)-\frac{2}{2}$ (*M. F.*),

Cu cifra 3 $3\times 3+3+3+3-3$ (*H. S.*; *M. F.*), $\frac{3\times 3\times 3}{3}+3+3$ (*D-ra M.G.R.*; *G. G. L.*), $\frac{3\times 3}{3}+3+3\times 3$ (*C. G. N.*), $3\times 3+3\times 3-\sqrt{3\times 3}$ (*M. F.*).

Cu cifra 4 $4\times 4+4-4-\frac{4}{4}$ (*H. S.*; *M. F.*), $\sqrt{4+4+4+4}+\frac{4}{4}$ (*H. S.*), $4+4+4+4-\frac{4}{4}$ (*H.S.*; *M.F.*), $4\times 4-\frac{4+4}{4+4}$ (*C. N. G.*).

Cu cifra 5 $\frac{55}{5}+5-\frac{5}{5}$ (*H. S.*), $5\times5+5-5-5-5$ (*H. S.*; *C.N.G.*; *I. B.*), $\frac{5\times5\times5}{5}-5-5$ (*D.F.*; *G.G.*), $5+5+5+5-\sqrt{5}\times5$ (*M.F.*), $5\times5-\frac{5\times5}{5}-5$ (*M F.*),

Cu cifra 6 $6+6+\frac{6+6+6}{6}$ (*C. N. G.*),

Cu cifra 7 $7+7-7+\frac{7}{7}+7$ (*C.N.G.*; *M.F.*), $7+\frac{7\times7}{7}+\frac{7}{7}$ (*M.F.*),

Cu cifra 8 $8+8-\frac{8+8}{8+8}$ (*C. N. G.*),

Cu cifra 9 $9+9+9-\sqrt{9}-9$ (*H. S.*), $9+9-\frac{9+9+9}{9}$ (*M. F.*), $\sqrt{9}\times9+9+\sqrt{9}-9+\sqrt{9}$ (*C. N. G.*), $9\sqrt{9}+9-9-9-\sqrt{9}$ (*I. B.*)

Notă. In numărul viitor vom publica și soluțiunile ce se vor mai primi, precum și soluțiunile cu cifrele cari lipsesc.

PROBLEME PROPUSE

*383. Se dă un cerc O și un diametru fix AB. Se ia AM=BN, M și N fiind situate pe circonferința O, de aceiași parte a lui AB. Să se găsească locul geometric al celui de al doilea punct de intersecțiune al circonferințelor circumscrise triunghiurilor AON și BOM, cînd M și N percurg circonferința dată. (N. G. ALEXANDRESCU.)

*384. Să se afle valoarea produsului:

$$P=(1-3\mathrm{tg}^2a)(1-3\mathrm{tg}^22a)(1-3\mathrm{tg}^24a)\ldots(1-3\mathrm{tg}^22^{n-1}a).$$

(E. G. NIȚESCU.)

*385. Find date două circonferințe să se ducă o dreaptă, care să facă cu tangentele în punctele de intersecțiuee ale dreptei, cu fie-care din cele două circonferințe, unghiuri date. (G. G. URECHIA.)

*386. Să se arate că dacă a este un număr prim, superior lui 3, expresia:

$$a^{12}-a^{10}-a^2+1$$

este divizibilă cu 264. (I. TUTUC.)

*387. Un poligon de pe teren a fost ridicat prin îndrumuire, adică măsurîndu-i-se unghiurile și laturile afară de o latură și două unghiuri. Să se arate că daca numai un singur element (unghiu sau latură) este afectat de o eroare oare-care, se poate în general determina acel element și eroarea făcută asupra lui; iar dacă se știe că numai două elemente anume sînt afectate de erori, atunci se pot determina erorile făcute asupra acelor elemente. (I. IONESCU.)

*388. Polinomul:

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c-x)^m+(x-b)(x-c)(b-c)(b+c)^m$$
$$+(x-a)(x-c)(c-a)(c+a)^m+(x-a)(x-b)(a-b)(a+b)^m,$$

este divizibil cu: $(x-a)(x-b)(x-c)$. Să se găsească cîtul în cazul de $m=3$ $m=4$. (A. G. IOACHIMESCU.)

389. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots . & x^{n-1} & x^n \\ x & x^2 & x^3 \ldots . & x^n & 1 \\ x^2 & x^3 & x^4 \ldots . & 1 & x \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots . & \cdot & \cdot \\ x^{n-1} & x^n & 1 \ldots . & x^{n-2} & x^{n-3} \\ x^n & 1 & x \ldots . & x^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

(B. IONESCU.)

390. Se dă o circonferință C cu centrul O și o dreaptă Δ. Dintr'un punct A al acestei drepte, ca centru, se descrie o circonferință C′ ce trece prin O. Se ia simetricul lui O față de coarda comună a cercurilor C și C′. Din acest punct se descrie o altă circonferință C″ trecînd prin O. Să se găsească locul punctelor de intersecție al axului radical, al cercurilor C și C″ cu circonferința C′. Ce devine locul cînd raza cercului C variază sau cînd dreapta Δ se deplasează paralel cu ea însăși. (C. ERBICEANU.)

Rectificări. 1) D-l P. I. Suchar, ne roagă să anunțăm că problema No. 374 a fost propusă la examenul de licență de la facultatea din Toulouse (Iulie 1890) și că soluția acestei probleme a fost dată de D-sa la conferințele de la facultatea de științe din București.

Chestiunea fiind interesantă noi vom publica totuși soluțiunile ce vom primi

N. R.

2) Partea a doua de la problema 379, se va înlocui cu următoarea :

Să se găsească înfășurătoarea planurilor ce conțin cele 4 puncte.

Articolele și problemele însemnate cu *, se referă la matematicele elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articolele trimese de D-nii: **C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă.**

2) Probleme propuse de D-nii: **N. G. Alexandrescu, A. Iliovici, Gr. N. Makarie, I. Nicolaescu, E. Nițescu, C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă.**

3) Probleme rezolvite de D-nii: **N. Alexandrescu** (283, 311, 12, 16, 18, 24, 25, 26, 28, 35, 37, 38, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 55, 58, 59, 61, 62, 68, 69, 71, 78); **V. G. Angelescu** (351); **M. Bacan** (318); **I. Banciu** (368); **V. V. Cambureanu** (247, 97, 312, 16, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 59, 61, 62, 63, 66, 68, 69, 71); **G. Constandinescu** (317, 26, 28, 37); **St. N. Corbeanu** (302, 40, 43, 44, 59, 62); **G. C. Dobrovici** (283, 97, 302, 12, 14, 17, 24, 25, 26, 28, 36); **P. Dumitrescu** (318, 71); **I. E. Dupont** (369); **D. Focșa** (369); **M. Fainzilber** (369, 71); **C. N. Georgescu** (318, 38, 44, 71, 76, 81); **N. G. Georgescu** (344, 52, 55, 71); **G. I. Gheorghiu** (369, 76, 77); **G. Ghimbășeanu** (369); **G. Giușcă** (318, 28, 52, 53, 55, 59, 71); **G. Grămescu** (368); **C. Grigorescu** (329, 52, 68, 77); **T. Grigorescu** (368, 69, 71); **L. Hermann** (247 65, 83, 302, 06, 11, 12, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 55, 40, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 59); **A. Iliovici** (280, 84, 94, 302, 07); **C. Ionescu** (Ploești) (351); **C. Ionescu** (Galați) (323, 61, 68); **I. M. Ionescu** (283); **Virg. Ionescu** (323); **I. Kanner** (318); **G. G. Linteș** (368); **G. C. Măinescu** (317, 24, 38, 53); **A. A. Makarovici** (329); **G. Manoliu** (312); **St. N. Mirea** (368, 69, 72, 76, 81); **I. Moscuna** (247, 74, 80); **N. G. Muzicescu** (247, 80, 83, 97, 302, 06, 07, 12, 17, 18, 24, 26, 35, 37, 38, 40, 41, 45, 52, 59, 60, 61, 63, 68, 70, 71); **A. Nestor** (369, 71, 81); **I. Nicolaescu** (297, 302, 16, 17, 18, 24, 28, 29, 35, 37, 38, 39, 40, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 62, 66, 69, 71, 75, 77, 81); **M. P. Nicolescu** (317); **E. Nițescu** (283, 97, 306, 16, 23, 24, 29, 35, 37, 39, 43, 45, 47, 51, 52, 53, 54); **A. Oprescu** (368, 69, 76, 81); **G. Oprescu** (71); **A. I. Pinchis** (283, 306, 24, 28, 29, 35, 43, 51, 53, 59, 62, 66, 68, 69, 71); **I. Pitești eanu** (284); **M. G. Polcovnicu** (381); **P. Pompilian** (368); **C. Popovici** (293, 305, 07, 16); **D-ra M. Rugescu** (284, 97, 302, 07, 12, 41, 48); **I. Sichitiu** (283, 62); **N. Sichitiu** (317, 28, 68, 69); **C. Stamatopol** (369, 71); **G. V. Stănescu** (306); **C. Țițirigă** (283, 84, 94, 97, 302, 03, 08, 15, 18, 19, 24, 27, 31, 35, 40, 41, 48, 50, 51, 52, 54, 56, 59, 71, 73, 81, 82); **I. Tutuc** (368, 69, 73); **G. G. Urechiă** (206, 58, 74, 75, 83, 84, 97, 302, 03, 06, 07, 08, 12, 19, 26, 27, 36, 40, 41, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 61, 62, 68, 69, 71, 73, 76, 77, 81, 82); **C. M. Utză** (368); **C. Vintilă** (283, 52); **Th. M. Vladimirescu** (293, 94, 305, 11, 41); **J. Wittner** (318, 24, 29, 31, 37, 38, 39, 43, 44, 45); **G. Zamfirescu** (369, 81).

Probleme nerezolvite: 22, 106, 110, 113, 118, 127, 171, 172, 176, 204, 249, 253, 258, 282, 295, 304, 318, 320, 332, 346, 349, 357, 364, 367, 374, 379, 380.