Redacția „*Gazetei Matematice*“ se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ... *Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . *Inginer.*
Cristescu Vasile, ... *Inginer.*
Davidescu Emanoil, ... *Inginer.*
Erbiceanu Caton, ... *Inginer.*
Ioachimescu Andrei, ... *Inginer*, licențiat în matematici.
Ionescu Bogdan, ... *Profesor*, licențiat în matematici.
Ionescu Ion, ... *Inginer.*
Lupu Constantin, ... *Inginer.*
Nicolescu Nicolae, ... *Inginer.*
D-ra Pompilian Constanța . *Directoară de Institut*, licențiată în matematici.
Roco Mihail, ... *Inginer.*
Țițeica Gheorghe, ... *Profesor*, licențiat în matematici.
Zottu G. Ioan, ... *Inginer.*

ASUPRA INMULȚIRII DETERMINANTELOR.

Se știe că produsul a doi determinanți Δ și Δ', de același ordin n, poate fi pus sub forma unui determinant Δ'', tot de ordinul n, și în care elementul, ce se găsește la încrucișarea liniei de ordinul i cu coloana de ordinul k, este egal cu suma produselor elementelor din linia i din Δ cu elementele din linia k din Δ'.

Această teoremă poate fi demonstrată în mai multe moduri: sau descompunînd determinantul Δ'' în n^n determinanți, din care $n^n - 1.2...n$ sînt egali cu zero iar: $1.2.3...n$ diferiți de zero și care reprezintă tocmai produsul $\Delta \times \Delta'$; sau considerînd un sistem de ecuațiuni liniare și omogene, în care coeficienți termenilor dupe diagonala principală depind de un parametru λ, făcînd o substituție liniară, și exprimînd ca valorile lui λ, pentru care primul sistem admite soluțiuni diferite de zero, sînt aceleași cu valorile lui λ pentru care cel din urmă sistem admite de asemenea soluțiuni diferite de zero, se ajunge la relația de condiție: $\Delta'' = \Delta \times \Delta'$. Această din urmă metodă, mai simplă și mai elegantă, necesită cunoștința prealabilă a teorii generale a ecuațiunelor algebrice, căci ecuațiunea în λ, formată, este de gradul n.

'Mi propun a da aici o demonstrație a teoremei relativă la înmulțirea determinanților, prin considerații de ecuațiuni liniare *neomogene*.

Fie:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = m_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = m_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = m_n, \end{cases}$$

un sistem de ecuațiuni liniare, al căror determinant Δ îl presupun diferit de zero. Fac substituția:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \ldots + b_{1n}X_n \\ x_2 = b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \ldots + b_{2n}X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}X_1 + b_{n2}X_2 + \ldots + b_{nn}X_n, \end{cases}$$

și fie Δ' determinantul coeficienților b, determinant pe care îl presupun de asemenea diferit de zero. Prin substituția (2) sistemul (1) devine:

$$(3)\quad \begin{cases} c_{11}X_1+c_{12}X_2+....+c_{1n}X_n=m_1 \\ c_{21}X_1+c_{22}X_2+....+c_{2n}X_n=m_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n1}X_1+c_{n2}X_2+....+c_{nn}X_n=m_n, \end{cases}$$

unde:

$$c_{ik}=a_{i1}b_{k1}+a_{i2}b_{k2}+....+a_{in}b_{kn}. \qquad (i,k=1,2,3...n).$$

Fie Δ'' determinantul sistemului (3), zic că:

$$\Delta''=\Delta\times\Delta'.$$

In adevăr determinantul sistemului (1) fiind diferit de zero, acest sistem dă:

$$(4)\quad x_i=\frac{\Delta_{1i}m_1+\Delta_{2i}m_2+....+\Delta_{ni}m_n}{\Delta} \qquad (i=1,2,3...n)$$

Δ_{ki} reprezentînd determinantul minor corespunzător elementului a_{ki}

Determinanţi Δ şi Δ' fiind diferiţi de zero, rezultă că sistemul (1), precum şi sistemul (2), rezolvat în raport cu necunoscutele X, admit pentru necunoscutele x sau X un sistem de valori bine determinat; prin urmare trebueşte ca şi sistemul (3) să admită un sistem de valori pentru necunoscute, bine determinat, deci şi Δ'' va fi diferit de zero. Rezolvind sistemul (3) vom avea:

$$(5)\quad X_i=\frac{\Delta''_{1i}m_1+\Delta''_{2i}m_2+....+\Delta''_{ni}m_n}{\Delta''},$$

$i=1,2,3...n$, iar Δ''_{hi} determinantul minor corespunzător elementului c_{hi}. Substituind valorile date de (4) şi (5) într'una din relaţiile (2), în cea d'întăi s. ex., avem:

$$\frac{\Delta_{11}m_1+\Delta_{21}m_2+....+\Delta_{n1}m_n}{\Delta}=b_{11}\frac{\Delta''_{11}m_1+....+\Delta''_{1n}m_n}{\Delta''}+.....$$
$$+b_{1n}\frac{\Delta''_{1n}m_1+....+\Delta''_{nn}m_n}{\Delta''}$$

de unde:

$$(6)\quad \Delta''=\frac{(b_{11}\Delta''_{11}+....+b_{1n}\Delta''_{1n})m_1+....+(b_{11}\Delta''_{n1}+....+b_{1n}\Delta''_{nn})m_n}{\Delta_{11}m_1+....+\Delta_{n1}m_n}\times\Delta.$$

Aceasta fiind o identitate şi membrul întăi fiind independent de coeficienţi $m_1, m_2,... m_n$, trebue ca şi membrul al doilea să fie independent de aceşti coeficienţi, deci trebue să avem:

$$(7)\quad \frac{b_{11}\Delta''_{11}+...+b_{1n}\Delta''_{1n}}{\Delta_{11}}=\frac{b_{11}\Delta''_{21}+...+b_{1n}\Delta''_{2n}}{\Delta_{22}}=....$$
$$=\frac{b_{11}\Delta''_{n1}+....+b_{1n}\Delta''_{nn}}{\Delta_{n1}}.$$

Numărătorul primului raport nu coprinde elementele primei linii din Δ'', și dupe legea de formație a acestor elemente, rezultă că el nu va coprinde nici elementele primei linii din Δ; de asemenea numitorul Δ_{11} nu coprinde aceste elemente: deci primul raport este independent de elementele: $a_{11}, a_{12} \ldots a_{1n}$. In acelaș mod se poate vedea că cel de al doilea raport nu coprinde elementele liniei a doua din Δ, și așa mai departe. Aceste rapoarte trebuind să rămîe necontenit egale între ele, rezultă că valoarea lor este independentă de *toate* elementele determinantului Δ, și valoarea lor comună va depinde numai de elementele determinantului Δ'. In adevăr, să presupunem că am face să varieze elementele liniei de rangul i, din Δ, dintre rapoartele (7) este unul care nu depinde de aceste elemente, deci care va rămîne neschimbat; pentru ca egalitățile să subsiste, trebue ca și celelalte rapoarte să rămîe neschimbate, ceea ce necesita ca și ele să nu depindă de elementele acestei linii: cum i poate fie ori-care din numerile $1, 2, 3 \ldots n$ rezultă ca valoarea comună a rapoartelor (7) nu depinde de nici unul din elementele determinantului Δ. Insemnînd cu H valoarea comună a acestor rapoarte, egalitatea (6) va putea fi scrisă:

$$\Delta'' = H \times \Delta,$$

H depinzînd numai de elementele b.

Făcînd: $a_{ik} = o$ pentru $i \neq k$

și $a_{ii} = 1$,

se vede imediat că Δ'' se reduce la Δ', H rămîne neschimbat, căci el nu depinde de elementele a, iar Δ se reduce la 1, deci:

$$\Delta' = H$$

de unde: $\Delta'' = \Delta \times \Delta'$. C.C.T.D

A. G. Ioachimescu

---

* COMPARAȚIUNEA RADACINILOR MAI MULTOR ECUAȚIUNI DE GRADUL AL DOILEA.

(Urmare).

IV) *Metoda ecuațiunei caracteristice.* Din egalitatea (47) se vede că eliminantul are forma realizantului unei ecuațiuni complecte de gradul II. Așa de exemplu putem considera eliminantul, ca realizantul ecuațiunei de gradul II:

$$R_1 y^2 + Sy + R_2 = o,$$

în care coeficienții extremi ar fi realizanții ecuațiunilor date și coeficientul lui y ar fi separantul acelor ecuațiuni. Această ecuațiune o vom numi *ecuațiunea caracteristică* a ecuațiunilor date, din cauză că natura rădăcinilor ei, și valorile particulare ale coeficienților, ne caracterisează modul de grupare al rădăcinilor ecuațiunilor date. In adevăr, observînd că realizantul acestei ecuațiuni este $S^2 - 4R_1R_2$ adică eliminantul și că suma rădăcinilor este $-\frac{S}{\ldots}$, deducem următoarea regulă pentru a compara rădăcinile a două ecuațiuni.

Formăm ecuațiunea caracteristică a ecuațiunilor date, adică ecuațiunea:

$$(p^2 - q)y^2 + (q + q' - 2pp')y + (p'^2 - q') = o.$$

Dacă această ecuațiune are rădăcini imaginare ne găsîm în cazul III și anume avem neegalitățile (C) sau (C') după cum coeficientul lui x din ecuațiunea (1) este mai mare sau mai mic ca coeficientul lui x din ecuația (2). (Căci $E < o$).

Dacă ecuațiunea caracteristică are două rădăcini reale și negative ne găsim în cazul I și comparînd ca mai sus coeficienții lui x din ecuațiunile date vom ști dacă avem neegalitățile (A) sau (A'). (Căci $E > o$, $S > o$).

Dacă ecuațiunea caracteristică are două rădăcini reale pozitive atunci avem cazul II și anume neegalitățile (B) sau (B') după cum coeficientul lui y^2 este mai mare sau mai mic ca termenul liber, acești doi coeficienți fiind pozitivi. (Căci $E > o$, $S < o$).

Dacă ecuațiunea caracteristică are o rădăcină pozitivă și alta negativă, atunci una (și numai una) din ecuațiunile date trebue să aibă rădăcini imaginare. (Căci pentru ca produsul rădăcinilor ecuațiunei caracteristice, adică ca $(R_1 : R_2)$ să fie negativ trebue ca unul din realizanți să fie negativ).

Dacă ecuațiunea caracteristică are două rădăcini egale, ecuațiunile date au o rădăcină comună, și vom putea determina cari rădăcini sînt comune căutînd a vedea de cari de cazurile precedente se apropie natura rădăcinilor, și valorile coeficienților. (Căci în cazul acesta $E = o$).

Dacă în acest caz rădăcina egală e 1 atunci ecuațiile sînt identice. (Căci $p = p'$).

Dacă ecuațiunea caracteristică are o rădăcină nulă, atunci ecuațiunea (2) are rădăcinile egale (Căci $R_2=o$).

Dacă ecuațiunea caracteristică are rădăcini infinite, adică dacă-i lipsește termenul în y^2, atunci ecuațiunea (1) are rădăcinile egale. (Căci $R_1=o$).

Dacă ecuațiunea caracteristică admite pe 1 ca rădăcină, atunci semisumile rădăcinilor celor două ecuațiuni sînt egale. (Căci $R_1+S+R_2=D^2=o$, ne dă $p=p'$).

Dacă suma primilor doi coeficienți este pozitivă atunci semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1) nu e coprinsă între rădăcinile ecuațiunei (2) și reciproc dacă acea sumă e negativă. (Căci suma în chestiune e $S+R$).

Dacă suma ultimilor doi coeficienți este pozitivă atunci semisuma rădăcinilor ecuațiunei (2) nu e coprinsă între rădăcinile ecuațiune (1), și reciproc cînd acea sumă e negativă. (Căci suma în chestiune e $S+R_2$).

Dacă din ecuațiunea caracteristică lipsesc primii doi termeni sau ultimii doi, atunci respectiv ecuația (1) sau (2) are rădăcini egale și comune cu o rădăciuă a ecuațiunei celeilalte. (Căci $R_1=o$, sau $R_2=o$ și $S=o$, ne dă și $E=o$).

In fine dacă din ecuația caracteristică toți coeficienții sînt nuli, ecuațiunile date au rădăcini egale și sînt identice. (Căci $R_1=o$, $S=o$ și $R_2=o$, ne dă $D=o$ și $E=o$).

Se vede dar că numai cu ajutorul ecuațiunei caracteristice, și cu compararea coeficienților lui x din ecuațiunile date putem face compararea rădăcinilor acelor ecuațiuni, și că dacă am aranja de la început ecuațiunile așa că coeficientul lui x din prima ecuațiune să fie mai mare ca coeficientul lui x din a doua, ecuațiunea caracteristică ar fi suficientă.

Pentru a obține însă ecuațiunea caracteristică ar trebui să calculăm pe R_1, R_2, S și apoi pentru a-i cunoaște natura rădăcinile ar trebui să'i calculăm realizantul, adică eliminantul ecuațiunilor date. De aci ar rezulta că această metodă nu este de cît metoda directă enunțată în alt mod, dacă pentru formarea ecuațiunei caracteristice ar trebui să-i calculăm direct coeficienții.

Putem însă obține direct ecuațiunea caracteristică, pe o cale cu totul diferită și a discuta direct diferitele cazuri posibile fără a

mai introduce separantul și eliminantul. Pentru aceasta să considerăm fracțiunea:

$$(62) \qquad y=\frac{x^2+2p'x+q'}{x^2+2px+q},$$

obținută împărțind primul membru al ecuațiunei (2) cu primul membru al ecuațiunei (1), și să ne propunem a studia variațiunea acestei fracțiuni. Gonind numitorul și ordonînd în raport cu x avem:

$$(y-1)x^2+2(py-p')x+qy-q'=0,$$

de unde:

$$x=\frac{-(py-p')\pm\sqrt{(py-p')^2-(y-1)(qy-q')}}{y-1},$$

și făcînd calculele sub radical avem:

$$(63) \quad x=\frac{-(py-p')\pm\sqrt{(p^2-q)y^2+(q+q'-2pp')y+p'^2-q'}}{y-1}.$$

Sub radical avem tocmai primul membru al ecuațiunei caracteristice. Așa dar studiarea semnului cantității de sub radical revine la studiarea semnului primului membru al ecuațiunei caracteristice, pe care să'l însemnăm pentru prescurtare cu C, adică:

$$C=(p^2-q)y^2+(q+q'-2pp')y+p'^2-q'.$$

Observăm că y se anulează pentru rădăcinile numărătorului fracțiunei (62) adică pentru $x=x'_2$ și $x=x''_2$; că y devine infinit pentru rădăcinile numitorului, adică pentru $x=x'_1$ și $x=x''_1$ și că y devine egal cu 1 pentru $x=\pm\infty$, ceia ce se poate vedea împărțind ambii termeni ai fracțiunei cu x^2 și apoi făcînd $x=\pm\infty$. Vom presupune mai întăi că toate rădăcinile x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, sînt diferite una de alta. Dacă necunoscînd mărimea acestor rădăcini, și dacă făcînd să varieze x de la $-\infty$ la $+\infty$, am putea găsi mijloace pentru a vedea dacă y se anulează înainte sau după ce devine infinit și apoi dacă y se anulează din nou înainte de a deveni o dată infinit, sau după ce a devenit o dată infinit sau după ce a devenit de două ori infinit, atunci am putea ști care din cele 4 rădăcini vine înaintea alteia și prin urmare cum se angajează rădăcinilor ecuațiunilor date. Insă două zerori și două infinite nu le putem aranja de cît în următoarele șase moduri diferite: $0\,0\,\infty\,\infty$, $0\,\infty\,0\,\infty$, $0\,\infty\,\infty\,0$, $\infty\,\infty\,0\,0$, $\infty\,0\,\infty\,0$, $\infty\,0\,0\,\infty$. Pentru fie-care din aceste combinațiuni ne va conrespunde o aranjare a rădăci-

nilor ecuațiunilor date. Este ușor de văzut că ele conrespund respectiv cazurilor (A'), (C'), (B'), (A), (C), (B).

Pentru a face clasificarea valorilor nule și infinite ale lui y vom face un studiu aproximativ al variațiunei fracțiunei (62). Pentru aceasta vom presupune cunoscute valorile lui x cari fac pe y infinit și vom căuta să deducem dacă y își schimbă semnul sau de două ori înaintea acelor cantități, sau odată înainte și altă dată între ele, sau o dată înainte și altă dată după ele, sau de două ori după ele, sau o dată după prima și o dată după a doua, sau de două ori între ele. Schimbarea de semn corespunzînd cu anularea lui y, vom obține cu modul acesta gruparea cantităților nule și infinite ale lui y. Această cercetare s'ar putea face numai algebricește, însă pentru mai multă ușurință vom căuta a da o reprezentare grafică aproximativă a variațiunei lui y. Este evident că dacă am construi exact curba variațiunei lui y, punctele unde această curbă taie axa XX' conrespunde lui $y=o$, și dreptele de care curba se apropie la infinit vor conrespunde lui $y=\infty$, și prin urmare poziționea acestor puncte și drepte una în raport cu alta ne va da unul din aranjamente lui o și ∞, adică aranjamentul rădăcinilor ecuațiunilor date.

Vom arăta mai tîrziu cum se poate simplifica găsirea curbei reprezentative pentru a ajunge la aranjarea rădăcinilor cît mai repede posibil și a reduce numărul cazurilor posibile la strictul necesar, și aceasta fără a cunoaște rădăcinile numărătorului și numitorului fracțiunei.

(Va urma) I. Ionescu.

* Demonstrări ale unor teoreme cunoscute de Geometrie.

Teoremă. Cînd avem două triunghiuri cu două laturi egale și unghiurile coprinse neegale, atunci la unghiul coprins mai mic, corespunde laturea opusă mai mică și vice-versa *la latura a treia mai mică corespunde unghiul opus mai mic.*

Ne vom servi în demonstrarea acestei teoreme, de *proprietățile perpendicularei și ale oblicelor*, proprietăți cari se studiază la începutul ori-cărui curs de Geometri elementară.

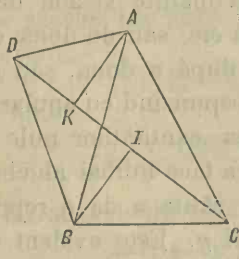
Se dau triunghiurile ABC și A'B'D avînd:

(1) $BC = B'D$,

(2) $AB = A'B'$

(3) $\widehat{ABC} > \widehat{A'B'D}$.

Alăturăm triunghiul $A'B'D$ lîngă triunghiul ABC așa că $A'B'$ să coincidă cu AB, punctele C' și D fiind de o parte și de alta a dreptei AB; unim punctul C cu D și coborîm din B și A perpendicularele BI și AK pe CD. Punctul I va fi mijlocul lui CD, conform egalității (2), iar BI va fi bisectrița unghiului CBD (asta, din proprietățile perpendicularei). Din inegalitatea (3) urmează că dreptele AB, DB, și prin urmare punctele K, D, sînt de aceiași parte a dreptei BI, adică $KC > KD$, sau oblica $AC >$ oblica AD.



Vice-versă. Se dau egalitățile (1) și (2) pe lîngă.

(4) $AC > AD$.

Din (4) rezultă că punctele K, D cad de aceiași parte a dreptei BI (presupunem că avem aceleași construcții ca și în prima parte a teoremei); BI fiind bisectrița unghiului CBD urmează că:

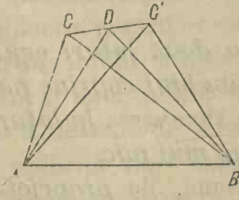
$$\widehat{ABC} > \widehat{ABD}.$$

Teoremă. Două triunghiuri sînt egale cînd au laturile egale una alteia.

In demonstrarea acestei teoreme ne vom servi de proprietățile *perpendicularei și ale oblicelor* precum și de teorema că: *ori-ce contur poligonal convex este mai mare de cît altul înconjurat de cel d'întăi și avînd aceleași extremități.*

Ni se dă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ avînd:

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ CA = C'A'.$$



Căutăm să suprapunem triunghiul $A'B'C'$ peste triunghiul ABC; facem să coincidă $A'B'$ cu AB și punctul C' va cădea unde-va pe planul triunghiului ABC, să vedem unde:

El nu poate cădea în interiorul centrului ACB, nici nu poate ocupa o poziție așa ca C să fie atunci în interiorul conturului $AC'B$, căci am avea în primul caz

contur $ACB >$ contur $AC'B$

iar în al doilea

$$\text{contur } AC'B > \text{contur } ACB$$

cele ce ar fi contrare ipotezei date

$$AC = A'C', \quad BC = B'C'.$$

Tot în virtutea acestei egalități date, C′ nu poate să se afle pe AC între A și C sau pe BC între B și C; mai rămîne ca C′, sau să cadă în afară de conturul ACB așa ca laturele triunghiurilor date să se taie, sau să cadă peste punctul C.

Presupunem că C′ ocupă poziția indicată pe figură; unim pe C cu C′, iar mijlocul D, al segmentului CC, 'l unesc cu A și B; fiind că, pe de o parte AC=AC ; iar pe de alta BC=BC′, urmează că dreptele AD și BD sînt perpendiculare pe CC′ în același punct ceia ce e imposibil, rămîne dar ca triunghiurile date să coincidă.

B. Ionescu

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ȘTIINȚE, IAȘI

(Examenele din Octombre 1898).

Algebră

Despre eliminare.

Geometrie analitică

Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy și o dreaptă fixă paralelă cu axa Ox ($y=b$). Pe această dreaptă se ia un punct A, mobil, la distanța α de axa Oy. La fie-care poziție a lui A corespunde o hiperbolă echilateră ce trece prin A, B și O și e tangentă în O la axa Ox (B este punctul de intersecție dreptei $y=b$ cu Oy). Se cere:

1) Ecuațiunea acestei hiperbole echilatere, corespunzătoare valorei α;

2) Locul geometric al centrurilor tuturor acestor hiperbole cînd α variază.

Calcul diferențial

Ce devine ecuațiunea:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+zx\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=0,$$

cînd substituim lui x, y, z pe X, Y, Z legate prin relațiunele:

$$x=YZ, \quad y=ZX, \quad z=XY.$$

Calcul integral

1) A se integra ecuațiunea diferențială:

$$(x^2+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+x\left(\frac{dy}{dx}\right)-y=0.$$

2) A se arăta ca liniile asemptotice ale suprafețelor riglate cu plan director:

$$z=y\varphi(x)+\psi(x)$$

se pot obține printr'o cuadratură. Aplicație la helicoidul:

$$z=k\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x}.$$

Mecanică

Mișcarea unui solid în jurul unui ax, în cazul percusiunelor.

Examenul pentru burse la facultatea de științe, Iași

1) Se dau două drepte rectangulare și o circonferință tangentă la ele. Să se studieze variațiunea suprafeței triunghiului format de aceste două drepte și o a treia tangentă la cercul dat.

2) Se dau două sfere egale. Să se determine pe linia centrelor celor două sfere, un punct ast-fel, ca suma zonelor coprinse în conurile circumscrise la cele două sfere, să fie egală cu jumătate din suprafața unei sfere.

ȘCOALA DE ARTE FRUMOASE

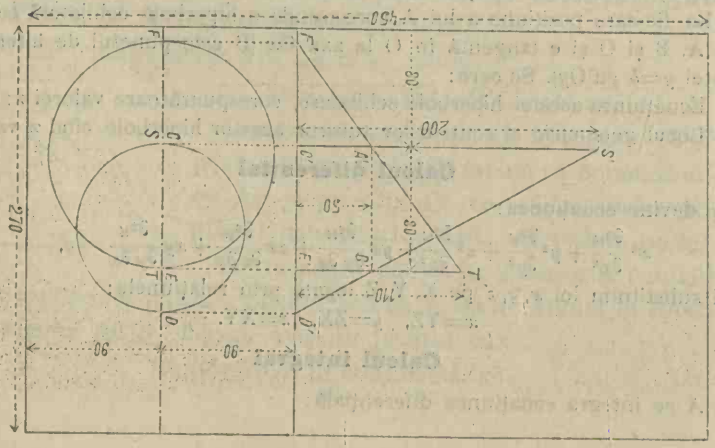
Secțiunea de Architectură

(Sesiunea de Examene din Iunie 1898).

Geometrie descriptivă

Intersecțiunea a două conuri, care se taie după curbe plane (de gradul II).

Se dă: *a)* Conul cu virful (S, S') și baza, pe planul orizontal de proiecțiune, cercul (CD, C'D').



b) Conul cu vîrful (T, T') și baza, pe planul orizontal de proiecțiune, cercul (EF, E'F').

Datele epurei sînt figurate pe schița alăturată.

Cotile sînt indicate în milimetri.

Se cere: 1) Intersecțiunea celor două conuri date. Această intersecțiune va fi formată din două curbe plane.

2) Rabaterea curbelor de intersecțiune pe planul orizontal de proiecțiune.

(Timpul acordat pentru epură 2 ore).

Perspectiva

Perspectiva unei scări [1])

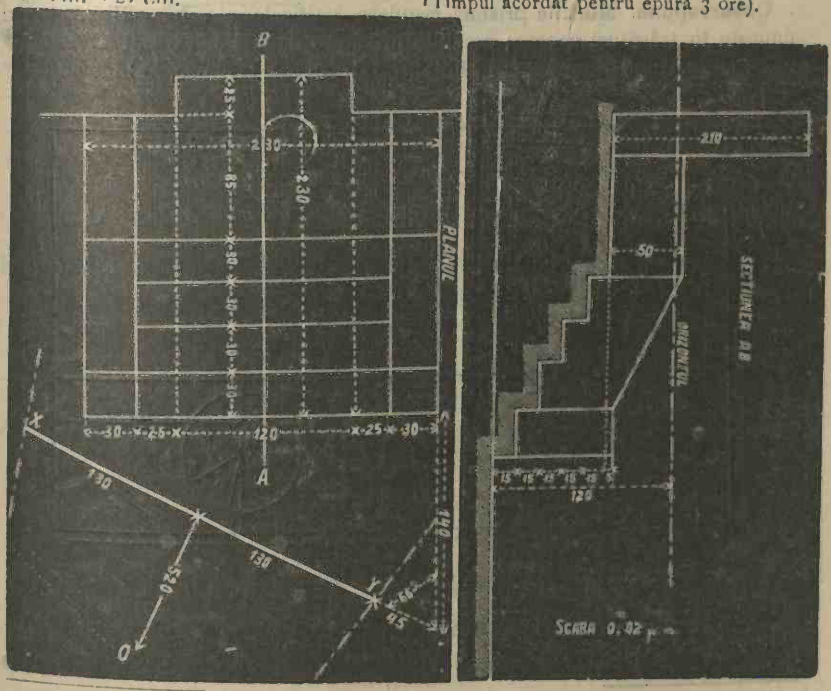
Dimensiunile scării sînt date pe schița geometrală, în plan și în secțiunea AB. Cotele sînt indicate în centimetri.

Poziționea tabloului este determinată pe schiță în XY. Distanța principală a ochiului este OP=5m,20. Înălțimea orizontului este de 1m,20.

Scara schiței va fi de 0m,03 pentru metru. Tabloul perspectiv va fi amplificat, de două ori mai mare de cît schița.

Desemnul complet (schiță și tabloul perspectiv) va intra în cadrul de 27 cm. × 45 cm. Schița va fi așezată la stînga, într'un dreptunghiu de 27 cm. × 18 cm., iar tabloul perspectiv, la dreapta, într'un patrat de 27 cm. × 27 cm.

(Timpul acordat pentru epură 3 ore).



[1]) După J. de la Gournerie.

(*Sesiunea de Examene din Octombre 1898*).

Geometria descriptivă

Intersecțiune de prisme

Se dă: *a*) O prismă regulată a cărei bază este un exagon regulat situat în planul orizontal de proiecțiune și înscris într'un cerc de 40 milimetri de rază. Vîrful M al bazei exagonale, cel mai depărtat de planul vertical de proiecție, se găsește la dreapta liniei de ordine care trece prin centrul exagonului și anume la 8 milimetri de la această linie. Înălțimea acestei prisme este de 130 milimetri.

b) O a doua prismă dreaptă, cu baza pe planul vertical de proiecție, e un cadrilater A'B'C'D', definit prin lungimile următoare:

O'A=1 mil. O'B=20 mil. O'C=16 mil. O'D=60 mil.
AA'=25 » BB'=75 « CC'=105 « D'D=60 «

Înălțimea acestei a doua prisme este de 100 milimetri.

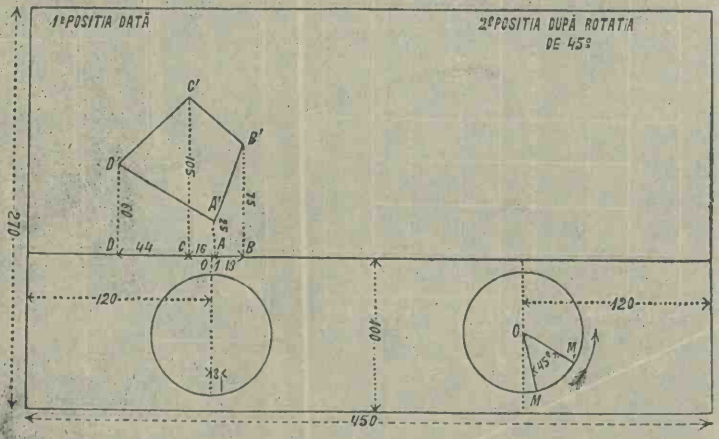
Se cere: Să se construiască:

1) Intersecțiunea celor două prisme definite mai sus.

2) Proiecțiunile celor două prisme și ale intersecțiunei lor, după ce se va executa o rotație de 45° în jurul axei prismei regulate verticale.

Observațiune. Muchile prismei regulate verticale și intersecțiunea vor fi figurate în trăsături groase; muchile prismei orizontale în trăsături fine. Părțile văzute vor fi desemnate în linii întregi; iar cele ascunse, în linii punctate.

(Timpul acordat pentru epură 2 ore).



Perspectiva

Perspectiva interiorului unei galerii [1])

Fie o galerie a cărei plan este un dreptunghiu având 8 metri de lărgime

[1]) După C.-F.-A. Le Roy.

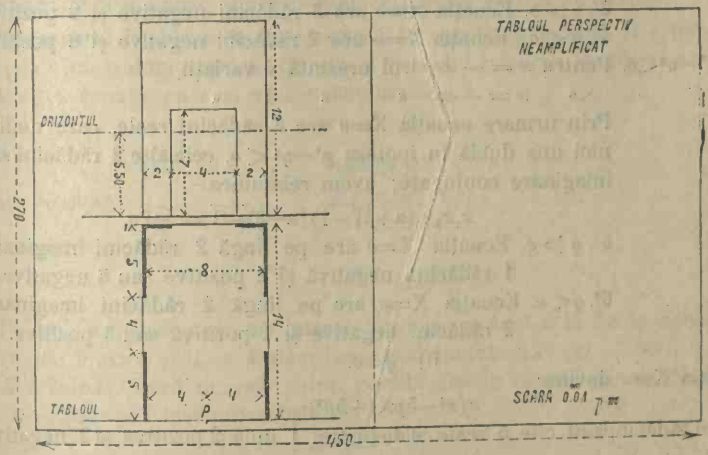
și 14 metri de lungime. Înălțimea galeriei este de 12 metri. Pardoseala este formată din dale patrate a căror diagonale, — lungi de 2 metri fie-care — sînt paralele cu laturile dreptunghiului reprezentînd planul galeriei.

In millocul părețelui din fundul galeriei este așezată o ușă monumentală de 4 metri lărgime pe 7 metri înălțime.

In mijlocul fie-căruia din pereții laterali există cîte o fereastră de 4 metri lărgime pe 7 metri înălțime. Ferestrele sînt așezate la 3 metri d'asupra parchetului.

Spectatorul este așezat în axa galeriei, la o depărtare de 8 metri de la intrare. Înălțimea orizontului este dată de $5^m,50$ d'asupra geometralului (parchetului).

(Timpul acordat pentru epură 3 ore).



Problemă propusă la facultatea de științe din București pentru obținerea unui premiu din fondul Hillel.

Să se cerceteze natura rădăcinilor ecuației:

$$x^5 - 5px^3 + 5p^2x + 2q = o$$

p fiind o cantitate pozitivă.

Calculînd funcțiunile lui Sturm și suprimînd factorii numerici, obținem șirul de polinoame:

$$X = x^5 - 5px^3 + 5p^2x + 2q$$
$$X_1 = x^4 - 3px^2 + p^2$$
$$X_2 = px^3 - 2p^2x - q$$
$$X_3 = p^2x^2 - qx - p^3$$
$$X_4 = (p^5 - q^2)x$$
$$X_5 = p^3(p^5 \quad q^2)$$

A) $q \neq o$

I. $p^3-q^2>o$. Pentru $x=-\infty$ șirul presintă 5 variații,
» $x=+\infty$ « « 0 »
Prin urmare ecuația $X=o$ are 5 rădăcini reale și distincte.

1°. $q>o$. Pentru $x=o$ șirul presintă 2 variații; prin urmare ecuația $X=o$ are 3 rădăcini negative și 2 pozitive.

2°. $q<o$. Pentru $x=o$ șirul prezintă 3 variații; prin urmare ecuația $X=o$ are 2 rădăcini negative și 3 pozitive.

II. $p^3-q^2=o$. Polinoamele X, X_1 au un comun divizor, polinomul X_2, ale cărui rădăcini sînt reale și distincte, de oare-ce avem $q^2+4p^3>0$; prin urmare ecuația $X=o$ are 5 rădăcini reale: una de semn contrar cu q și două duble și de semne contrare date de de ecuația $X_2=o$.

3°. $q>o$. Ecuația $X=o$ are 3 rădăcini negative și 2 pozitive.

4°. $q<o$. Ecuația $X=o$ are 2 rădăcini negative și 3 pozitive.

III. $p^3-q^2<o$. Pentru $x=-\infty$ sirul prezintă 4 variații.
« $x=+\infty$ « « 1 «
Prin urmare ecuația $X=o$ are 3 rădăcini reale, care nefiind nici una dublă în ipoteza $p^3-q^2<o$, celelalte 2 rădăcini sînt imaginare conjugate; avem relațiunea:

$$x_1x_2x_3(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1})=-2q.$$

5°. $q>o$. Ecuația $X=o$ are pe lîngă 2 rădăcini imaginare: 1 rădăcină negativă și 2 pozitive sau 3 negative.

6°. $q<o$. Ecuația $X=o$ are pe lîngă 2 rădăcini imaginare: 2 rădăcini negative și 1 pozitivă sau 3 pozitive.

B) $q=o$.

Ecuația $X=o$ devine:

$$x(x^4-5pX^2+5p^2)=o$$

ale cărei rădăcini sînt cite 5 reale și distincte: 1 nulă, 2 pozitive și 2 negative.

Gr. N. Makarie

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 247.**— *Să se găsească numărul părechilor de numere, ast-fel ca patratul unuia să fie egal cu patratul celuilalt plus un acelaș numar.* (Bogdan Ionescu.)

Soluție dată de D-l *I. Moscuna.*

Chestiunea se reduce la găsirea numărului părechilor de numere a căror diferență de patrate este egală cu numărul dat N.

Insă, diferența patratelor a două numere, spre exemplu m și n ($m>n$), este egală cu o sumă de numere impare consecutive, aceasta rezultă din identitatea:

$$(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(2m-1)=m^2-n^2.$$

In mod reciproc, ori-ce sumă de numere impare consecutive este diferența a două patrate. Așa fiind, numărul căutat nu este altul de cît numărul cunoscut al descompunerilor numărului N într'o sumă de numere impare coosecutive (*Gazeta Matematică*, vol. II, pag. 225).

Cînd numărul dat N este un patrat: $N=r^2$ se coprinde în numărul căutat și perechia de numere; r, 0 cari dau în adevăr: $r^2=0^2+N$.

D-nii *N. G. Muzicescu, V. V. Cambureanu, L. Hermann* au tratat problema cînd N e impar, dînd soluțiuni analoage cu cea de mai jos.

Observare. Problema a fost propusă în cazul numai cînd N e impar, dar se poate da o demonstrație directă și în cazul general. Problema atrage următoarea ecuație cu x și y ca necunoscute.

$$x^2-y^2=N$$

sau

$$uv=N, \tag{1}$$

dacă se pune:

$$x+y=u$$
$$x-y=v$$

de unde:

$$x=\frac{v+u}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}.$$

Fiind-că numerile x, y sînt întregi, trebue ca u și v să fie în acelaș timp pare sau impare și $u>v$. Putem face două ipoteze:

N e impar. Dacă nu este patrat perfect are un număr par de divizori, $2k$ de exemplu; să'i însemnăm prin:

$$D_1, D_2, D_3, \ldots D_k, D_{k+1}, \ldots D_{2k},$$

în ordine crescîndă. Se știe că:

$$D_1\times D_{2k}=D_2D_{2k-1}=\ldots=D_k\times D_{k+1}=N$$

și fiind-că toți acești divizori sînt impari, vom avea pentru u și v respectiv următoarele valori:

$$(D_{2k}, D_1), (D_{2k-1}, D_2), \ldots (D_{k+1}, D_k).$$

Deci numărul soluțiilor problemei este k.

Dacă N impar, este un patrat perfect, are atunci un număr impar de divizori, $2k+1$ de exemplu, pe cari să'i însemnăm în ordine crescîndă:

$$D_1, D_2, D_3, \ldots D_k, D_{k+1}, D_{k+2}, \ldots D_{2k+1}$$

și atunci

$$D_1\times D_{2k+1}=D_2\times D_{2k}=\ldots=D_kD_{k+2}=D^2_{k+1}=N.$$

Prin urmare acum numărul soluțiilor este $k+1$.

N e par. In acest caz

$$N=2^mN'$$

N' fiind un număr impar; dacă N' nu este un patrat perfect are un număr par de divizori $2p$ de exemplu, pe cari să'i însemnăm ca mai sus.

$$D_1, D_2, \ldots D_p, D_{p+1}, \ldots D_{2p-1}, D_{2p}.$$

Pentru u și v putem forma cu D_{2p} și D_1 sistemele de valori:

$$(D_{2p}\times 2^{m-1}, D_1\times 2^1), (D_{2p}\times 2^{m-2}, D_1\times 2^2), \ldots D_{2p}\times 2, D\times 2^{m-1},$$

adică $m-1$ sisteme, și fiind-că putem forma sisteme de valori la număr de $m-1$ din fie-care pereche de divizori de ai lui N', $(D_1, D_{2p-1}), \ldots D_2, D_{2p+1})$, avem în total pentru soluțiunile problemei în acest caz

$$(m-1)p.$$

Dacă N' este un patrat perfect, atunci are un număr impar de divizori, $2p+1$ de exemplu, pe cari să'i însemnăm:

$$D_1, D_2, \ldots D_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots D_{2p}, D_{2p+1}.$$

Luînd divizori equidistanți de extremi doi cîte doi formăm pentru u și v $(m-1)p$ sisteme de valori mai rămîne D_{p+1}, divizorul din mijloc cu care avem pentru u și v sistemele:

$$(D_{p+1}\times 2^{m-1}, D_{p-1}\times 2), (D_{p+1}\times 2^{m-2}, D_{p+1}\times 2^2), \ldots$$

să căutăm numărul lor. Prin ipoteza $u>o$, apoi se vede că:

$$(D_{p+1}\times 2^{m-1}, D_{p+1}\times 2) \text{ și } (D_{p+1}\times 2, D_{p+1}2^{m-1})$$

e unul și acelaș sistem de valori pentru u și v, prin urmare dacă m e par avem $\frac{m}{2}$ sisteme, dacă m e impar avem $\frac{m-1}{2}$; în total cu sistemele formate de la ceilalți divizori avem pentru m par (N patrat perfect).

$$(m-1)p+\frac{m}{2}=\frac{(m-1)(2p+1)+1}{2},$$

pentru m impar

$$(m-1)p+\frac{m-1}{2}(m-1)(2p+1).$$

B. G. I.

* **Problema 280.**— *Se consideră toate cercurile care trec prin două puncte fixe* A *și* B. *Dintr'un punct fix* P *al planului se duc tangentele* PM, PN *la unul oare-care din aceste cercuri. Să se demonstreze că coarda de contact* MN *și cercul circumscris triunghiului* PMN *trec fie-care prin cîte un punct fix.* (G. Țițeica.)

Soluție dată de D-nii: I. Mosçuna, N. G. Musicescu (Iași) *și A. Iliovici* (Student, Iași).

Să considerăm o familie de cercuri cari au același ax radical D. Centrele cercurilor vor fi distribuite pe o dreaptă Δ perpendiculară pe D. Să luăm acum un cerc oare-care din familia considerată, al cărui centru C e pe Δ. E vizibil că cercul descris pe PC ca diametru trece prin punctele M și N din enunțiu și prin punctul fix P', proiecția punctului P pe Δ. Așa dar, cercul circumscris triunghiului PNN trece printr'un punct fix.

Să facem cîte-va observaţiuni interesante. Zic că printr'un punct oare-care P al pianului trece un singur cerc din familie, făcînd excepţie pentru punctele A şi B în cazul cînd cercurile taie axul radical. Intr'adevăr, punctul de intersecţie O al dreptelor D şi Δ fiind pe axul radical are aceiaşi putere în raport cu toate cercurile; putere pozitivă în cazul cînd cercurile nu taie axul radical, negativă în cazul contrar. Aşa fiind, dreapta OP va tăia unul din cercurile cari trec prin P într'un punct Q aşa că:

$$OP.OQ=p,$$

p fiind puterea lui O în raport cu cercurile familiei. Egalitatea aceasta determină un singur punct Q, care se va găsi pe OP dacă p e pozitiv, pe prelungirea lui PO dacă p e negativ. Punctele P şi Q determină în mod unic cercul care trece prin P, căci centrul se va găsi la intersecţia lui Δ cu perpendiculara ridicată pe mijlocul lui PQ

Să facem acum o altă serie de observări. Să ducem o dreaptă oare-care D′ în plan, care va tăia axul radical D în O′ şi cercurile în punctele $a, b; b', b'; c, c'; \ldots$ Punctul O′ fiind pe axul radical, puterea lui în raport cu toate cercurile e aceiaşi, deci:

$$O'a.O'a'=O'b.O'b'=O'c.O'c'=\ldots=k.$$

Se vede de aci că O′ este sau exterior tutulor cercurilor sau interior, după cum k e pozitiv sau negativ. Se poate acum pune cestiunea dacă există vre-un cerc din familia noastră tangent la dreapta D′. Pentru aceasta observăm că dacă m e punctul de contact, de oare-ce cele două puncte de intersecţie ale dreptei D′ cu cercul corespunzător se confundă în m, trebue să avem:

$$\overline{O'm}^2=k.$$

Aşa dar, dacă k e pozitiv, avem două puncte m_1, m_2 simetrice în raport cu O′ şi definite de:

$$O'm_1=+\sqrt{k}, \quad O'm_2=-\sqrt{k}.$$

Deci cercul familiei, care trece prin m_1 e tangent în acest punct la dreapta D′, acelaşi lucru pentru cercul care trece prin m_2, şi nu există un alt cerc din familia considerată care să fie tangent la D′. Dacă k e negativ nu există nici un cerc tangent la D′.

Se zice că perechile de puncte $a, a'; b, b'; c, c'; \ldots$ formează pe D′ o *involuţiune*, şi că punctele m_1 şi m_2 sînt *punctele duble* ale involuţiei.

Să revenim la problema noastră, și să luăm două cercuri oarecari din familie. Coardele de contact ale tangentelor duse din P (polarele lui P) se întîlnesc într'un punct P_1. Fie a, a'; b, b' punctele unde dreapta PP_1 întîlnește cele două cercuri. Se știe din proprietățile polarei că punctele P și P_1 sînt conjugate armonic în raport cu a, a' de o parte și cu b, b' de alta. Deci, dacă ω e mijlocul lui PP_1 avem:

$$\overline{\omega P}^2 = \overline{\omega P}^2_1 = \omega a . \omega a' = \omega b . \omega b'.$$

Insă egalitatea:

$$\omega a . \omega a' = \omega b . \omega b',$$

arată că punctul ω are aceiași putere în raport cu cele două cercuri considerate, deci se găsește pe axul radical și prin urmare ori-ce alt cerc care întîlnește dreapta PP_1 în c, c' ne dă:

$$\omega a . \omega a' = \omega b . \omega b' = \omega c . \omega c' = ... = \overline{\omega P}^2 = \overline{\omega P_1}^2$$

Ceia ce însemnează că punctele c și c' sînt conjugate armonic în raport cu P și P_1, deci polara lui P în raport cu ori-ce cerc al familiei trece prin punctul fix P_1. Din cele ce preced rezultă că cercul familiei care trece prin P e tangent în acest punct la PP_1. Așa dar ca să construim punctul P_1, luăm cercul care trece prin P, îi ducem tangenta în acest punct, pe care o prelungim pînă în punctul ω unde întîlnește axul radical. P_1 e simetricul lui P în raport cu ω. Mai rezultă încă din cele ce preced că, dacă am fi plecat de la P_1 am fi regăsit punctul P, adică polarele punctului P_1 în raport cu cercurile familiei noastre trec toate prin P.

Vedem deci că fiind dat un punct P în plan, problema noastră îi dă ca corespunzător un punct P_1. Invers, dacă plecăm de la P_1 regăsim punctul P. Avem așa dar o transformare analoagă cu transformarea prin inversiune. Dacă punctul P descrie o curbă, punctul P_1 descrie o altă curbă. Lectorii cari cunosc geometria analitică pot să vadă de exemplu că, dacă punctul P descrie o dreaptă oare-care, punctul P_1 descrie o iperbolă sau o parabolă. Sînt unele cazuri în cari punctul P descriind o dreaptă și punctul P_1 descrie o dreaptă. Am să mă ocup aici de cazurile acelea.

Presupun că cercurile familiei date nu întîlnesc axul radical. Un punct ω de pe axul radical e exterior tutulor cercurilor, și cum lungimile tangentelor duse la cercuri sînt toate egale, punctele lor de contact se găsesc situate pe un arc de centru ω. Așa

Biblioteca

dar, fie-cărui punct de pe axul radical îi corespunde un cerc, care e ortogonal tutulor cercurilor din familie. Invers, se vede imediat că dacă un cerc e ortogonal la două cercuri, centrul său se găsește pe axul lor radical. Așa fiind, zic că toate cercurile corespunzătoare tutulor punctelor dreptei D trec prin două puncte fixe pe Δ. In adevăr, să luăm două cercuri cu centrele pe D și ortogonale tutulor cercurilor familiei noastre. Din cele ce preced rezultă că centrele cercurilor din familie se găsesc pe axul radical al celor două cercuri considerate. Așa dar toate cercurile cu centrele pe D au ca ax radical dreapta Δ, pe care o taie, căci punctului O îi corespunde un cerc care întîlnește Δ în α și α'.

Toate preliminarele acestea bine înțelese, cele ce urmează se vor pricepe de la sine. Am vorbit mai sus de punctele P și P_1, și am arătat că cercul familiei care trece prin P e tangent în acest punct la dreapta PP_1, același lucru pentru P_1. Să descrim un cerc pe segmentul PP_1 ca diametru, al cărui centru e deci punctul ω, care am văzut că se găsește pe axul radical D. Cercul acesta e ortogonal la două cercuri din familie: cercul care trece prin P și cel care trece prin P_1. E deci ortogonal la toate cercurile familiei și prin urmare trece prin punctele fixe α și α'. Așa dar transformarea noastră e de așa natură că cercul descris pe segmentul care unește două puncte corespunzătoare trece, ori-care ar fi acele puncte, prin două puncte fixe α și α'. Această proprietate ar putea servi să definească transformarea de care vorbim. Să presupunem acum că punctul P descrie o dreaptă care trece prin α. Cum unghiul $P_1\alpha P$ e totdeauna drept, punctul P_1 va descrie o dreaptă perpendiculară pe cea d'intâi și trecînd tot prin α. Același lucru pentru o dreaptă care ar trece prin α'.

Geometria analitică arată că acestea sînt singurele cazuri cînd P descriind o dreaptă și P_1 descrie o dreaptă.

Dezvoltarea pe care am dat'o soluțiunei acestei probleme are ca scop răspîndirea unor noțiuni cari sînt în același timp frumoase și interesante.

Dacă ar fi fost vorba numai să răspundem cestiunei propuse, am fi observat imediat după demonstrarea proprietății că cercul PMN trece printr'un punct fix, că a doua parte a cestiunei se obținea făcînd o transformare prin inversiune în raport cu punctul P ca pol.

Generalizare (*I. Moscuna*). — *Coarda de contact* MN *a tangentelor* PM, PN *la conicele cari trec prin patru puncte fixe* A, B, C, D, *trece printr'un punct fix. Conica circuscrisă pentagonului* ABMNP *trece printr'un punct fix.*

Vom vorbi despre această generalizare într'un articol pe care 'l vom publica în curînd. (G. Ț.)

* **Problema 283.** — *Să se rezolve ecuațiunea:*

$$(x-1)^2[x^p+2x^{p-1}+3x^{p-2}+...+px+p+1]=(1-x)(p+1).$$

Să se calculeze toate rădăcinile în cazul cînd $p=2, 4, 6$.

(V. V. Cambureanu.)

Soluție dată de D-l G. G. Urechiă (Bacalaureat, Elev Sc. Sp. de Art. și Geniu).

Divizînd cu $x-1$, ecuațiunea propusă devine:

$$(x-1)(x^p+2x^{p-1}+3x^{p-2}+.....+px+p+1)=-(p+1).$$

Efectuînd înmulțirea în membrul întăi, trecînd pe $p+1$ în membrul întăi și scoțînd pe x în factor avem:

$$x(x^p+x^{p-1}+x^{p-2}+....+px+p+1)=-(p+1),$$

sau

$$x\frac{x^{p+1}-1}{x-1}=o.$$

Prin urmare rădăcinele ecuațiunei date vor fi:

$$x=o \quad \text{și} \quad x=\cos\frac{2k\pi}{p+1}+i\sin\frac{2k\pi}{p+1}\ (k=1,2...p)$$

unde: $$i=\sqrt{-1}.$$

Pentru $p=2$, avem soluțiile următoare:

$$x_1=o, \quad x_2=1, \quad x_{3,4}=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pentru $p=4$, avem:

$$x_1=o, \quad x_2=1$$

$$x_{3,4}=\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_{5,6}=\cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}.$$

Pentru $p=6$, avem:

$$x_1=o, \quad x_2=o$$

$$x_{3,4}=\cos\frac{2\pi}{7}\pm i\sin\frac{2\pi}{7},$$

$$x_{5,6}=\cos\frac{4\pi}{7}\pm i\sin\frac{4\pi}{7},$$

$$x_{7,8}=\cos\frac{6\pi}{7}\pm i\sin\frac{6\pi}{7}.$$

Punînd: $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}=\alpha$$

avem:

$$x_{3,4}=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\pm i\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}=\frac{(1\pm\alpha i)^2}{1+\alpha^2}=\frac{1\pm\alpha i}{1\mp\alpha i}$$

semnele superioare și inferioare corespunzîndu-se:

$$x_{5,6}=\frac{\alpha^4-6\alpha^2+1\pm i2\alpha(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}$$

$$x_{7,8}=\frac{\alpha^8-8\alpha^6+14\alpha^4-8\alpha^2+1\pm i2\alpha(1-\alpha^2)(\alpha^4-6\alpha^2+1)}{(1+\alpha^2)^2}.$$

Pentru cazurile considerate mai sus, $p=2, 4, 6$ ecuațiunea:

$$x^p+x^{p-1}+\ldots+x+1=o$$

poate fi rezolvată algebriceşte.

Pentru $p=2$, avem ecuațiunea:

$$x^2+x+1=o$$

ale cărui rădăcini sînt:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Pentru $p=4$, avem ecuațiunea:

$$x^4+x^3+x^2+x+1=o$$

care este de gradul al IV reciproca, punînd

$$x+\frac{1}{x}=y.$$

Obținem ecuațiunea:

$$y^2+y-1=o$$

care dă: $$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

iar pentru x se găsește aceleași valori ca mai sus.

Pentru $p=6$, avem ecuațiunea reciprocă:

$$x^6+x^5+\ldots+x+1=o$$

care se transformă în:

$$y^3+y^2-2y-3=o.$$

Ecuațiunea de gradul al treilea ce poate fi rezolvită algebriceşte.

Pentru $p=3, 5, 7, 9, 10$ ecuațiunea:

$$x^{p+1}-1=o$$

se poate rezolvi. Ast-fel găsim:

Pentru $p=3$, $x^4-1=o$, de unde $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$

« $p=5$, $x^5-1=o$, se descompune în $x^3-1=o$ și $x^3+1=o$

« $p=7$, $x^8-1=o$, » » » $x^4-1=o$ și $x^4+1=o$

« $p=9, x^{10}-1=o$, » » » $x^5-1=o$ și $x^5+1=o$

a căror rezoluțiune se poate reduce la aceia a unei ecuațiuni reciproce de gradul al patrulea.

Au mai rezolvit această chestiune D-nii: *C. Țițirigă, I. Sichitiu, G. Dobrovici, L Hermann, I. M. Ionescu. E. Nițescu, N. G. Muzicescu, N. Alexandrescu, A. I. Pinchis* și *C. Vintilă.*

***Problema 372.** — *Să se arate prin exemple că întrebuințînd de 5 ori ori-care cifră și semnele algebrice se pot face expresiuni a căror valoare să fie 14, iar întrebuințîndu-se de 6 ori ori-care cifră și semnele algebrice se pot face expresiuni a căror valoare să fie 15.* (I. Ionescu.)

Soluțiuni date de D-nii: C. F. Constantin, I. Nicolaescu, St. N. Mirea, C. Răutzoiu, Al. Oprescu, G. Zamfirescu, M. Polcovnicu, N. Teodor și *F. Pîrvulescu.*

a) Expresiuni a căror valoare e 14:

Cu cifra 2 $22-(2\times2\times2)$ (*I. N.*; *A. O.*) $2\times2\times2^2-2$ (*A. O.*)
$22-(2+2)2$ (*C F. C.*).

Cu cifra 3 $\frac{33}{3}+\sqrt{3}\sqrt{3}$ (*C. R.*; *I. N.*) $\frac{33}{\sqrt{3}\sqrt{3}}+3$ (*S. N. M.*; *C.F.C.*)
$\frac{33+3\times3}{3}$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 4 $4\sqrt{4}+4+\frac{4}{\sqrt{4}}$ (*C. F. C.*) $\sqrt{4^4}-\frac{4+4}{4}$ (*C. F. C.*)
$4\times4-\sqrt{\frac{4\times4}{4}}$ (*I. N.*) $\sqrt{4\times4}+4+\sqrt{4}$ (*I. N.*).

Cu cifra 5 $5\times5-\frac{55}{5}$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 7 $\frac{7\times7+7\times7}{7}$ (*C. F. C.*; *A. O.*) $\sqrt{7\times7}+7\times\frac{7}{7}$ (*C.I.N.*).

Cu cifra 9 $\frac{99}{9}+\frac{9}{\sqrt{9}}$ (*C. F. C.*) $9+\sqrt{9}+\frac{9+9}{9}$ (*I. N.*; *C. F. C.*).

b) Expresiuni a căror valoare este 15.

Cu cifra 1 $11+1+1+1+1$ (*S. N. M.*; *I. N.*; *C. F. C.*; *C. R.*).

Cu cifra 2 $\frac{22}{2}+\sqrt{2\times 2}+2$ (*I. N.*) $\frac{22+2\times 2}{2}+2$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 3 $33-3\times 3-3\times 3$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 4 $\frac{44}{4}+4-4+4$ (*C. F. C.*) $\frac{4\times 4+4\times 4-\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$ (*C. F. C.*)

$\frac{\sqrt{4^4}+\sqrt{4^4}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$ (*C. F. C.*) $\frac{44}{4}+4\times\frac{4}{4}$ (*I. N.*)

$4+\sqrt{4}+4\sqrt{4}+\frac{4}{4}$ (*C. R.*).

Cu cifra 5 $\frac{(5\times 5+5)5}{5+5}$ (*C. F. C.*) $\frac{5(5+5)+5\times 5}{5}$ (*C. F. C.*)

$\sqrt{5}\sqrt{5}+5+5\times\frac{5}{5}$ (*I. N.*).

Cu cifra 6 $\frac{6\times 6}{6\times 6}+6+6$ (*I. N.*) $\frac{(6\times 6-6)6}{6+6}$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 7 $7+7+\frac{7+7}{7+7}$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 8 $8+8+8-8-\frac{8}{8}$ (*C. F. C.*; *S. N. M.*; *A. O.*)

$8+\frac{8\times 8}{8}-\frac{8}{8}$ (*I. N.*) $\frac{8(8+8)-\sqrt{8}\sqrt{8}}{8}$ (*C. F. C.*).

Cu cifra 9 $\frac{99}{9}+\frac{9}{9}+\sqrt{9}$ (*I. N.*) $\sqrt{9}\sqrt{9}+\sqrt{9}-\sqrt{9}$ (*C. F. C.*)

$\frac{9\times 9+\sqrt{9\times 9}}{9-\sqrt{9}}$ (*C. F. C.*) $\frac{99+\sqrt{9\times 9}}{9}+\sqrt{9}$ (*C. F. C.*).

Nota. Aci nu s'au trecut de cît soluțiunile diferite de cele publicate în numărul trecut. D-l *I. Nicolaescu* a trimes soluțiunea complectă a problemei, dar nu s'a putut publica în numărul trecut din cauza că ne-a sosit prea tîrziu.

PROBLEME PROPUSE

*391. Să se găsească locul punctelor, ast-fel că ducînd prin-tr'unul oare-care din aceste puncte, trei coarde dreptunghiulare într'o sferă, suma patratelor acestor coarde să fie constantă.

(G. G. URECHIA.)

*392. Să se rezolve ecuațiunile:

$$y^2-(2x+a+b)y+(x+a)(x+b)=o$$

$$\frac{x(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=y.$$

Să se discute natura rădăcinilor. (C. ȚIȚIRIGĂ.)

*393. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscînd poziția mijloacelor laturilor AB și AC, și știind că vîrfurile B și C se află pe două circonferințe date. (N. G. ALEXANDRESCU.)

*394. Un tren percurge o linie dreaptă în apropierea unui sat. O persoană din acel tren stă la $1^m.20$ de la o fereastră de $0^m.60$ lățime a unui vagon de $3^m.20$ lățime și zărește biserica acelui sat în acelaș timp cu un stîlp de telegraf și o perde din vedere la al 25-lea stîlp, de la acesta. Depărtarea stîlpilor de axa liniei fiind de $3.^m40$, iar distanța între ei de $60.^m00$, se cere a se calcula depărtarea bisericei de linia ferată. (I. IONESCU.)

*395. Să se stabilească, *direct pe o figură*, că raportul:

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x},$$

tinde către $\frac{1}{2}$ cînd x tinde către zero. (A. G. IOACHIMESCU.)

396. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p+2}+\ldots\ldots+\frac{n}{p+n}\right]=\frac{1}{(p+n)(p+n-1)}+$$

$$+\frac{2}{(p+n-1)(p+n-2)}+\ldots\ldots+\frac{n}{(p+1)p}.$$

(B. IONESCU.)

397. Intr'un plan P, se consideră o dreaptă fixă XX', un punct fix A și o dreaptă mobilă (DAD') în jurul punctului A. Să se găsească suprafața produsă de această dreaptă, cînd planul P se mișcă în jurul dreptei XX', știind că vitezele unghiulare de rotație ale dreptei DAD' și planului P sînt aceleași. (GR. N. MAKARIE.)

Rectificare. — La soluția problemei No. 277, publicată la pag. 72 înaintea rîndului 2 de jos, trebuesc introduse următoarele rînduri, ce nu au fost reproduse din manuscris:

(1) $(^3t_1^2+1)x-2t_1^3y-a=o,$

Dacă însemnăm cu t_2 parametrul punctului N, ecuația dreptei ce trece prin punctele M și N va fi:

(2) $(t_1^2+t_2^2+t_1t_2+1)x-t_1t_2(t_1+t_2)y-a=o.$

Articolele și problemele însemnate cu *, se referă la matematicele elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articolele trimese de D-nii: **C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă.**

2) Probleme propuse de D-nii: **N. G. Alexandrescu, A. Iliovici, I. Nicolaescu, E. Nițescu, C. Popovici, C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă.**

3) Probleme rezolvite de D-nii: **N. Alexandrescu** (311, 12, 16, 18, 24, 25, 26, 28, 35, 37, 38, 40, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 55, 58, 59, 61, 62, 65, 68, 69, 71, 78, 81, 84, 85, 86); **V. G. Angelescu** (351); **M. Bacan** (318); **I. Banciu** (365, 68); **V. V. Cambureanu** (297, 312, 16, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 59, 61, 62, 63, 66, 68, 69, 71); **C. F. Constantin** (372); **G. Constandinescu** (317, 26, 28, 37); **St. N. Corbeanu** (302, 40, 43, 44, 59, 62); **G. C. Dobrovici** (297, 302, 12, 17, 24, 25, 26, 28, 36); **P. Dumitrescu** (318, 44, 62, 65, 68, 71, 75, 76, 77, 81, 83, 85); **I. E. Dupont** (369); **D. Focșa** (365, 69); **M. Fainzilber** (365, 69, 71); **C. Florescu** (376, 77, 83); **C. N. Georgescu** (318, 38, 44, 65, 71, 76, 80, 81); **N. G. Georgescu** (344, 52, 55, 71); **G. I. Gheorghiu** (365, 69, 76, 77); **G. Ghimbășeanu** (369); **G. Giușcă** (318, 28, 52, 53, 55, 59, 65, 71); **G. Grămescu** (365, 68); **C. Grigorescu** (311, 29, 52, 65, 68, 77); **T. Grigorescu** (368, 69, 71); **L. Hermann** (265, 306, 11, 12, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 35, 40, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 59); **A. Iliovici** (284, 94, 302); **C. Ionescu** (Ploești) (351); **C. Ionescu** (Galați) (323, 61, 68); **Virg. Ionescu** (323); **I. Kanner** (318); **G. G. Linteș** (365, 68, 81, 85); **G. C. Măinescu** (317, 24, 29, 38, 53); **A. A. Makarovici** (329); **G. Manoliu** (312); **St. N. Mirea** (353, 68, 69, 72, 76, 81); **I. Moscuna** (274); **N. G. Muzicescu** (297, 302, 06, 12, 17, 18, 24, 26, 35, 37, 38, 40, 41, 45, 52, 59, 60, 61, 63, 68, 70, 71); **A. Nestor** (369, 71, 81, 83, 85); **I. Nicolaescu** (297, 302, 04, 16, 17, 18, 24, 26, 28, 29, 35, 37, 38, 39, 40, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 62, 65, 66, 69, 71, 72, 75, 77, 81, 83, 84, 85, 86); **M. P. Nicolescu** (317); **E. Nițescu** (297, 306, 16, 23, 24, 29, 35, 37, 39, 43, 45, 47, 51, 52, 53, 54); **A. Oprescu** (353, 68, 69, 72, 76, 80, 81); **G. Oprescu** (352, 65, 66, 68, 69, 71, 76, 77, 78, 83); **A. I. Pinchis** (302, 06, 23, 24, 26, 28, 29, 35, 43, 50, 51, 53, 54, 55, 58, 59, 61, 62, 66, 68, 69, 71, 77, 78, 81); **I. Pitești eanu** (284); **M. G. Polcovnicu** (381, 83); **P. Pompilian** (368); **C. Popovici** (293, 305, 16); **C. Răutzoiu** (372); **D-ra M. Rugescu** (284, 302, 12, 41, 48); **I. Sichitiu** (237); **N. Sichitiu** (317, 28, 68, 69, 71 77); **G. Stamatopol** (369, 71); **G. V. Stănescu** (306); **C. Țițirigă** (284, 94, 97, 302, 03, 08, 15, 18, 19, 20, 24, 27, 31, 35, 40, 41, 48, 50, 51, 52, 54, 56, 59, 71, 73, 81, 82); **I. Tutuc** (368, 69, 73); **G. G. Urechiă** (206, 74, 75, 84, 97, 302, 03, 05, 06, 08, 12, 17, 19, 26, 27, 31, 36, 40, 41, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 61, 62, 65, 68, 69, 71, 73, 76, 77, 81, 82, 83, 90); **C. M. Utză** (365, 368, 71, 77); **C. Vintilă** (302, 35, 45, 52); **Th. M. Vladimirescu** (293, 94, 305, 11, 41); **J. Wittner** (318, 24, 29, 31, 37, 38, 39, 43, 44, 45); **G. Zamfirescu** (369, 81, 83).

Probleme nerezolvite: 22, 106, 110, 113, 118, 127, 171, 172, 176, 204, 249, 258, 282, 295, 318, 332, 346, 349, 357, 364, 367, 374, 379, 380, 387, 388, 389.

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco: D-lui V. Cristescu, inginer, serviciul liniei Cernavoda-Constanța, la Cernavoda; sau D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Sub-Directorul Fabricei de Tutun, Belvedere, București; sau D-lui Bogdan Ionescu, Profesor la Gimnaziu, Rîmnicu-Vîlcei; sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19, București; sau D-lui N. Nicolescu, Inginer, Strada Mihai-Vodă 9, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Anul I, II și III al Gazetei matematice formează trei volume broșate de 288, 296 și 300 pagini și se vinde cu prețul de 10 lei fie-care volum.

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele, schimbările de adrese și reclamațiunile trebuesc trimese D-lui **I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19, București.**