GAZETA MATEMATICA

APARE O DATĂ PE LUNĂ

ANUL IV.

NUMĂRUL 5. — FEBRUARIE 1899.

SUMARUL

1. Comparațiunea rădăcinelor mai multor ecuațiuni de gradul al doilea . . . . . *I. Ionescu*
2. Bibliografie . . . . . *C. E.*
3. Probleme rezolvite: 274, 279, 312, 316, 318, 324, 365, 368, 369, 371, 381.
4. Probleme propuse: 398–407.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

STAB. GRAFIC I. V. SOCECU, STRADA BERZEI 59.

1899.

Redacția «*Gazetei Matematice*» se compune din următoarele persoane:

Alexandrini Octav,	Inginer.
Constantinescu Tancred,	Inginer.
Cristescu Vasile, ...	Inginer.
Davidescu Emanoil, . . .	Inginer.
Erbiceanu Caton, ...	Inginer.
Ioachimescu Andrei, . . .	Inginer, *licențiat în matematici.*
Ionescu Bogdan, ...	Profesor, *licențiat în matematici.*
Ionescu Ion, ...	Inginer.
Lupu Constantin, ...	Inginer.
Nicolescu Nicolae, . . .	Inginer.
D-ra Pompilian Constanța .	Directoară de Institut, *licențiată în matematici.*
Roco Mihail, ...	Inginer.
Țițeica Gheorghe, ...	Profesor, *licențiat în matematici.*
Zottu G. Ioan, ...	Inginer.

Comparațiunea rădăcinelor mai multor ecuațiuni de gradul al doilea

(Urmare)

Aplicaţiune. Să ne propunem a compara rădăcinile ecuațiunilor:

$$(1) \qquad x^2-4x+3=0,$$
$$(2) \qquad x^2-2x-24=0.$$

Aceste ecuațiuni au rădăcini reale căci avem:

$$R_1=2^2-3=1, \qquad R_2=1^2+24=25.$$

1. Să întrebuințăm metoda directă. Avem:

$$E=(24+3)^2-4(-2+1)(-1.3-2.24)=27^2-4.51>0,$$
$$S=-24+3-2(-2)(-1)=-24+3-2.2.1<0,$$
$$I=R_1-R_2=-24<0.$$

Avem prin urmare cazul II (B') și rădăcinile se aranjează ast-fel:

$$x'_2<x'_1<x''_1<x''_2.$$

2. Să întrebuințăm acum metoda rădăcinei comune. Vom avea scăzînd ecuațiunile date:

$$(x^2-4x+3)-(x^2-2x-24)=-2x+27=-2\left(x-\frac{27}{2}\right),$$

$$\gamma=\frac{27}{2}$$

Înlocuind pe γ în ecuațiunea II avem:

$$\frac{729}{4}-\frac{54}{2}-24=182\frac{1}{4}-27-24>0.$$

Apoi:

$$\gamma=\frac{27}{2}>1$$

Deci avem:

$$x'_2<x''_2<\gamma.$$

Înlocuind pe x'_2 și x''_2 în locul lui x din ecuațiunea precedentă, obținem rezultate negative pentru $x-\frac{27}{2}$ și prin ur-

mare pozitive pentru membrul I și al II. Așa dar x'_2 și x''_2 sînt afară din rădăcinile ecuațiunei (1). Semisuma rădăcinilor acestei ecuațiuni este 2, care introdusă în ecuația (2) ne dă $4-4-24<0$. Deci rădăcinile ecuației (1) sînt cuprinse între rădăcinile ecuațiunei (2) și avem aranjamentul:

$$x'_2 < x'_1 < x''_1 < x''_2.$$

3. Să întrebuințăm acum metoda transformațiunilor. Semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1) fiind 2 să micșorăm rădăcinile ambelor ecuațiuni cu 2, înlocuind pe x cu $y+2$. Vom avea:

$$\begin{cases} (y+2)^2-4(y+2)+3=y^2-1=0 \\ (y+2)^2-2(y+2)-24=y^2+2y-24=0. \end{cases}$$

A doua ecuațiune are o rădăcină pozitivă și alta negativă, și în valoare absolută rădăcina negativă e mai mare ca cea pozitivă. Să formăm ecuațiunea care ne dă patratele rădăcinilor ecuațiunei a doua înlocuind pe y cu $\sqrt{y}$.

Avem:

$$y+2\sqrt{y}-24=0 \qquad \text{sau} \qquad 2\sqrt{y}=24-y$$

care ne dă:

$$y^2-52y+576=0$$

Patratul rădăcinilor ecuațiunei întăia e 1, cari introdus în locul lui y din această ecuație ne dă evident un rezultat pozitiv. Deci 1 este afară din intervalul rădăcinilor și cum semisuma lor este $52:2=26$, rezultă că 1 e mai mic ca ambele rădăcini.

Deci rădăcinile fiind una pozitivă și alta negativă și ambele mai mari în valoare absolută ca 1, rezultă că 1 și -1 sînt coprinse între y' și y''. Avem deci aranjamentul:

$$x'_2 < x'_1 < x''_1 < x''_2.$$

4. Să întrebuințăm acum metoda ecuațiunei caracteristice.

Fie fracțiunea:

$$y=\frac{x^2-2x-24}{x^2-4x+3}.$$

Gonind numitorul și aranjînd după puterile lui x avem:

$$(y-1)x^2-2(2y-1)x+3y+24=0.$$

Realizantul acestei ecuațiuni este:

$$(2y-1)^2-(y-1)(3y+24)=y^2-25y+25.$$

Acest trinom egalat cu zero va forma ecuațiunea caracteristică. Realizantul ei este $25^2-4.25>0$, așa că rădăcinile ei sînt reale. Coeficientul lui y fiind negativ rădăcinile sînt pozitive. Valorile lui y care satisfac ecuației caracteristice dau maximum și mînimum lui y și anume valoarea cea mai mică y', ne dă maximum și cea mai mare y'' minimum, căci coeficientul lui y^2 fiind pozitiv, x are valori reale numai pentru y afară din rădăcini. Fie aa' o paralelă la xx' la distanța y' și bb' o paralelă la distanța y''. Pentru $x=\pm\infty$ avem $y=1$. Fie cc' o paralelă la xx' la distanța 1. Zicem că cc' este supt aa'. In adevăr înlocuind y cu 1 în ecuația caracteristică găsim un rezultat pozitiv, și cum semi-suma rădăcinilor y' și y'' este 12,5 reese că 1 e mai mic și ca y' și ca y''. Pentru a vedea cum stă y față de 1 pentru valori mari ale lui x să facem diferența $y-1$.

Avem:

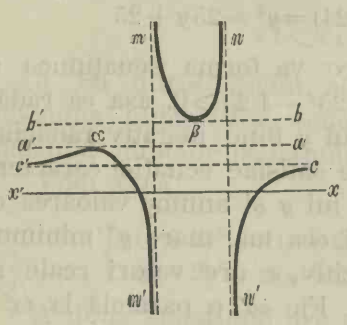
$$y-1=\frac{-2x+27}{x^2-4x+3}.$$

Pentru valori foarte mari sau foarte mici ale lui x, numitorul e pozitiv, rădăcinile lui fiind finite.

Pentru valori foarte mici ale lui x însă numitorul e pozitiv iar pentru valori foarte mari el e positiv. Deci în primul caz $y>1$ și în al doilea $y<1$. Așa dar plecînd de la $y=1$ pentru $x=-\infty$, y crește și ajunge la $y=1$ pentru $x=\infty$ iarăși crescînd. Fie mm' și nn' dreptele paralele cu axa y-ilor (pe care să o lăsăm arbitrară, de oare-ce nu ne interesează poziția ei) duse prin punctele avînd ca abscise rădăcinile x'_1 și x''_1 ale numitorului lui y. Pentru $x=x'_1$ și $x=x''_1$ numitorul anulîndu-se avem $y=\pm\infty$. Observăm că x trecînd prin x'_1 sau x''_1, y va trebui să sară de la $+\infty$ la $-\infty$ sau vice-versa, căci dacă x trece prin o rădăcină a nu-

mitorului îi schimbă sensul acestuia. Cu aceste date putem construi curba.

Plecînd de la c' ($x=-\infty, y=1$ curba se ridică în sus, atinge aa') în α care e maximum său, se coboară în jos și atinge mm' la $-\infty$; sau la $+\infty$ se coboară pînă în β unde atinge minimum său, x se ridică în sus și atinge nn' la $+\infty$; sare la $-\infty$ și se ridică în sus atingînd cc' la $+\infty$.



Aceasta este singura *formă* posibilă a curbei în condițiunile enunciate mai sus, ținînd seamă că y este o funcțiune continuă de x afară de $x=x'_1$ și $x=x''_1$, că curba n'are nici un punct între aa' și bb' și că n'are alte maxime și minime. Examinînd curba vedem că ea taie axa xx' în afara dreptelor mm', nn'. Așa dar zerorile și infinitele lui y se aranjează în modul următor:

$$0 \quad \infty \quad \infty \quad 0$$

de unde avem pentru aranjarea rădăcinilor ecuațiunilor date

$$x'_2 < x'_1 < x''_1 < x''_2.$$

5. Se poate vedea că în adevăr acesta este aranjamentul rădăcinilor, rezolvind ecuațiunile date, ceea ce se poate face ușor în acest caz. Vom găsi că rădăcinile ecuației întîia sînt 1 și 3 și a celei de a doua -4 și 6, așa că avem aranjamentul:

$$-4 < 1 < 3 < 6.$$

(Va urma) **I. Ionescu.**

BIBLIOGRAFIE.

Règle à calcul, modèle spécial par **A. Beghin.** Editura *E. Bernard,* 53ter Quai des Grands-Augustins, Paris. Prețul 1.50 fr.

Nu e de cât foarte scurt timp de cînd D-l *A. Beghin,* directorul Institutului industrial din Roubaix (Nord, Franța), a dat la lumină o nouă

dispoziţiunea liniei de calcul, care permite o aproximaţie de două ori mai mare de cît linia de calcul ordinară de aceiaşi lungime. Ast-fel pe cînd linia de calcul ordinară de 26 cm. luungime nu permite citirea cifrei a treia a unui număr cînd prima cifră a lui e mai mare ca 4, cu noua linie această evaluare se face cu înlesnire. Pe lîngă aceasta modul de dispositie al scărilor permite a efectua prin o singură mişcare a linioarei produsul a trei factori şi cîtul unui număr prin produsul altor două; în aceste cazuri aproximaţia devine deci de patru ori mai mare, iar economia de timp dublă.

Fără a voi să intrăm în teoria şi aplicaţiunile noei linii de calcul, ceia ce face obiectul broşurei indicate ce serveşte ca instrucţiune pentru manipularea ei, ne vom mărgini a da o descripţiune sumară a dispositiunei scărilor şi un exemplu suficient ce va permite a face o comparaţiune între vechea şi noua riglă de calcul.

Instrumentul se compune din o linie de lemn de 26 cm. lungime, în culisa căreia lunică o linioară. Linia şi linioara poartă fie-care o scară superioară şi alta inferioară. Diviziunile scărilor, ca şi în vechea linie [1]) sînt proporţionale cu logaritmii numerilor corespunzătoare înscrise.

Să considerăm mijlocul liniei. La stînga avem o gradaţiune complectă de la 1 la 10, din care jumătate, adică de la 1 la $3.162 = \sqrt{10}$ pe scara inferioară, iar cealaltă jumătate pe cea inferioară (de la 3.162 la 10). La dreapta se găseşte aceiaşi gradaţiune dispusă în mod invers, adică prima jumătate pe scara superioară şi a două jumătate pe cea inferioară.

Cu modul acesta scara superioară a liniei e divizată de la 3.162 la 10 şi de la 1 la 3.162 în continuare, iar cea inferioară de la 1 la 10.

Mărimea acestor gradaţiuni este aceiaşi ca aceia a diviziunilor scărei inferioare din linia veche de 26 cm. lungime, de unde rezultă că aproximaţiunea va fi dublă. Scările superioară şi inferioară ale liniuţei sînt identice cu ale liniei şi aşezate în acelaşi mod, dar aici liniora mai posedă în mijloc o scară inversată de la 10 la 1, ale cărei diviziuni sînt deci proporţionale cu cologaritmii numerilor înscrise. Trecerea de la scările inferiore la cele superioare şi invers, sau la cea mijlocie a linioarei se face cu ajutorul unui cursor de sticlă, care joacă un rol mult mai important de cît în linia veche. In fine linioara posedă pe dos o scară a patratelor şi una pentru sinusuri.

Din punct de vedere al execuţiunei linia nu lasă nimic de dorit fiind construită de una din casele cele mai vechi franceze *Tavernier-Gravet*, 19 rue Mayet, Paris), Costul riglei e de 14 franci.

Exemplu. A se divide 10850 şi 19650 prin 477. Cu o singură mişcare a linioarei, linia ne dă în mod clar ca cîturi 22.8 şi 41.2. Cu linia veche întrebuinţînd scările superioare se poate evalua în acelaşi timp 22.7 sau 22.8 pentru primul cît şi 41.1; 41,2 sau 41.3 pentru al doilea fără a putea precisa care din ele este cea exactă.

[1]) A se vedea «*Gazeta Matematică*» vol. I. pag. 116.

Față de acest avantagii ale noii linii, am crezut de datoria noastră de a o semnala cititorilor noștri și în special Domnilor Ingineri, Calculatori și Elevi.

C. E.

PROBLEME REZOLVITE

* **Problema 274.** *Fie* SABC *un tetraedru.* M, N, M, Q *punctele de intîlnire ale medianelor triunghiurilor* ABC, SBC, SCA, SAB. *Prin aceste puncte se ridică perpendiculare pe fețele tetraedrului respectiv considerate. Pe aceste perpendiculare se iau lungimile* MS_1, NA_1, PB_1, QC_1 *astfel că:*

$$\frac{MS_1}{supr.\ ABC}=\frac{NA_1}{supr.\ SBC}=\frac{PB_1}{supr.\ SCA}=\frac{QC_1}{supr.\ SAB}.$$

Să se arăte că medianele tetraedrelor SABC *și* $S_1A_1B_1C_1$ *se întîlnesc în același punct.*

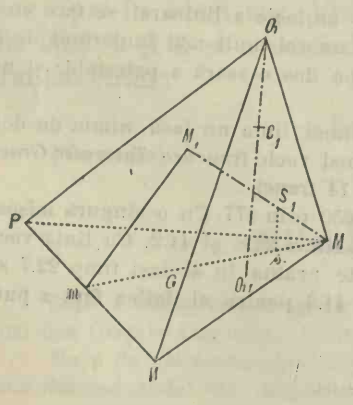
(A. Iliovici)

Soluție dată de D-nul *I. Moscuna.*

Să considerăm tetraedrul MNPQ. Dreptele MS_1, NA_1, PB_1, după enunț proporționale cu fețele ABC, SBC, SCA, sînt proporționale cu noimile (1:9) lui NPQ, MPQ, MNQ, și prin urmare invers proporționale cu înălțimile MM_1, NN_1, PP_1 corespunzătoare acestor fețe în tetraedrul MNPQ.

Avem deci:

$$MS_1\times MM_1=NA_1\times NN_1=PB_1\times PP_1 \qquad (1)$$



Fie m piciorul înălțimei triunghiului MNP scoborîtă din M; s protecțiunea punctului S_1 pe fața MNP. Avem, observînd că punctele M, S_1, M_1, m, s, sînt într'un același plan (planul perpendicular pe NP dus prin M), și că patrulaterul S_1M_1ms, în care unghiurile opuse M_1, s sînt drepte, este inscriptibil:

$$MS_1 \times MM_1 = Ms \times Mm$$

Tot ast-fel, cu raționamente analoage, avem:

$$NA_1 \times NN_1 = Na \times Nn \qquad PB_1 \times PP_1 = Pb \times Pp$$

Aceste egalități comparate cu egalitățile (1) ne dau:

$$Ms \times Mm = Na \times Nn = Pb \times Pp$$

de unde, fiind-că:

$$PN \times Mm = PM \times Nn = MN.\ Pp = 2\ supr.\ MNP:$$

$$\frac{Ms}{PN} = \frac{Na}{PM} = \frac{Pb}{MN}$$

Dreptele Ms, Na, Pb pot fi deci considerate ca egale și paralele cu laturile unui triunghiu asemenea cu triunghiul MNP. Deci, după o proprietate cunoscută [1]), triunghiurile MNP, *sab* au același punct de întîlnire G al medianelor. In acest punct se proectează punctul de întîlnire al medianelor triunghiului $S_1A_1B_1$, triunghiu a cărui proecțiune pe fața MNP este *sab*.

Acestea fiind stabilite, se vede ușor că punctele de întîlnire a medianelor tetraedrelor MNPQ și $S_1A_1B_1C_1$ se proectează pe fața MNP într'un același punct, anume în punctul care împarte dreapta GQ_1 în raportul de 1:4 (Q_1 fiind piciorul perpendicularei scoborîtă din Q pe fața MNP.

Tot ast-fel, considerînd cele-l'alte fețe ale tetraedrului MNPQ se poate vedea că cele două puncte considerate mai sus, au aceiași proiecțiune pe cele-l'alte fețe; deci aceste două puncte coincid.

Problema este deci demonstrată, căci tetraedrele MNPQ și SABC au același punct de întîlnire al medianelor.

D-nul *G. G. Urechiă* a dat o soluțiune trigonometrică acestei chestiuni.

---

[1]) A se vedea *Gazeta Matematică*, Anul III, pag. 59, *problema 211.*

* **Problema 297.** *Să se aranjeze în ordinea mărimei relative rădăcinile ecuațiunilor:*

$$x^2-2mx+2m-1=o,$$
$$x^2+2(m-1)x-(2m+5)=o,$$

în care m *variază de la* $-\infty$ *la* $+\infty$. (I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii *G. G. Urechiă, C. Țițirigă* și *I. Sichitiu* (Sc. Sp. de Art. și Geniu); *N. G. Muzicescu* și *V. V. Cambureanu* (An. Prep. Sc. Pod. și Șosele); *E. Nițescu* (Lc. Iași) și *I. Nicolaescu* (Lc. Craiova). Avem mai întâiu:[1])

$$R_1=m^2-2m+1=(m-1)^2>0,$$
$$R_2=m^2-2m+1+2m+5=m^2+6>0.$$

Să formăm acum eliminantul. Vom avea:

$$E=(4m+4)^2+4(2m-1)(2m^2-3m+1-2m^2-5m),$$
$$E=16(m+1)^2+4(2m-1)(1-8m)=4(4m^2+8m+4+2m-1-16m^2+8m),$$
$$E=4(-12m^2+18m+3)=12(-4m^2+6m+1).$$

Rădăcinile trinomului din paranteză sînd date de ecuația:

$$4m^2-6m-1=0,$$

care ne dă:

$$m=\frac{3\pm\sqrt{13}}{4}.$$

Coeficientul lui m^2 fiind negativ E va fi pozitiv cînd m este coprins între aceste rădăcini și negativ în caz contrariu.

Avem apoi:

$$S=2m-1-2m-5+2m^2-2m=2(m^2-m-3).$$

Rădăcinile lui S sînt $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Deci S va fi pozitiv pentru m afară din aceste rădăcini și negativ pentru m coprins între aceste rădăcini.

Avem în fine:

$$D=-m-m+1=-2m+1,$$
$$I=R_1-R_2=m^2-2m+1-m^2-6=-(2m+5).$$

Așa dar D este pozitiv sau negativ după cum m este mai mic sau mai mare ca $\frac{1}{2}$, iar I este pozitiv sau negativ

---

[1]) A se vedea articulele publicate în volumul III al *Gazetei Matematice* relativ la *Compararea rădăcinilor mai multor ecuațiuni de gradul II.*

după cum m e mai mic sau mai mare ca $-\frac{5}{2}$. Să aranjăm acuma în ordinea mărimei diferitele valori particulare găsite pentru m.

Avem ast-fel:

$$-\frac{5}{2},\ \frac{1-\sqrt{13}}{2},\ \frac{3-\sqrt{13}}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3+\sqrt{13}}{4},\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Am introdus aci și valoarea 1 care anulează pe R_1. Cu modul acesta putem forma următorul tablou pentru toate cazurile ce se pot întîmpla.

VALORILE LUI m	R_1	R_2	D	I	S	E	GRUPAREA
$-\infty < m < -\frac{5}{2}$	+	+	+	+	+	−	$x'_1 < x'_2 < x''_1 < x''_2$.
$m = -\frac{5}{2}$	+	+	+	0	+	−	
$-\frac{5}{2} < m < \frac{1-\sqrt{13}}{2}$	+	+	+	−	+	−	
$m = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$	+	+	+	−	0	−	
$\frac{1-\sqrt{13}}{2} < m < \frac{3-\sqrt{13}}{4}$	+	+	+	−	−	−	
$m = \frac{3-\sqrt{13}}{4}$	+	+	+	−	−	0	$x'_1 = x'_2 < x''_1 < x''_2$.
$\frac{3-\sqrt{13}}{4} < m < \frac{1}{2}$	+	+	+	−	−	+	$x'_1 < x'_2 < x''_1 < x''_2$.
$m = \frac{1}{2}$	+	+	0	−	−	+	
$\frac{1}{2} < m < 1$	+	+	−	−	−	+	
$m = 1$	0	+	−	−	−	+	$x'_2 < x'_1 = x''_1 < x''_2$.
$1 < m < \frac{3+\sqrt{13}}{4}$	+	+	−	−	−	+	$x'_2 < x'_1 < x''_1 < x''_2$.
$m = \frac{3+\sqrt{13}}{4}$	+	+	−	−	−	0	$x'_2 < x'_1 < x''_1 = x''_2$.
$\frac{3+\sqrt{13}}{4} < m < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$	+	+	−	−	−	−	$x'_2 < x'_1 < x''_2 < x''_1$.
$m = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$	+	+	−	−	0	−	
$\frac{1+\sqrt{13}}{2} < m < +\infty$	+	+	−	−	+	−	

De aci deducem că avem:

Cazul (C) pentru $-\infty < m < \frac{3-\sqrt{13}}{4}$,

„ (B′) „ $\frac{3-\sqrt{13}}{4} < m < \frac{3+\sqrt{13}}{4}$,

„ (C′) „ $\frac{3+\sqrt{13}}{4} < m < +\infty$.

Apoi avem următoarele cazuri particulare:

Rădăcinile cele mici egale pentru $m = \frac{3-\sqrt{13}}{4}$.

„ „ mari „ „ $m = \frac{3+\sqrt{13}}{4}$.

„ ecuației (1) „ „ $m = 1$.

Semi-sumile rădăcinilor „ „ $m = \frac{1}{2}$.

Intervalele „ „ „ $m = \frac{5}{2}$.

Soluție dată de D-nul *G. C. Dobrovici.*

Rezolvind prima ecuație găsim:

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - 2m + 1} = m \pm (m-1)$$
$$x' = 2m - 1 \quad , \quad x'' = 1.$$

Înlocuim aceste valori în a doua ecuație și avem:
$(2m-1)^2 + 2(m-1)(2m-1) - (2m+5)$, $1 + 2(m-1) - (2m+5)$
cari se reduc la: $8m^2 - 12m - 2$, -6,
sau: $2(4m^2 - 6m - 1)$, -6.

Rezultatul substituirei lui x' în ecuația a doua fiind totdeauna negativ x'' e tot-deauna cuprins între rădăcinile ecuației a doua. Rădăcinile trinomului $4m^2 - 6m - 1$ sînt $\frac{3+\sqrt{13}}{4}$. Cînd $-\infty > m < \frac{3+\sqrt{13}}{4}$ trinomul e positiv; cînd $\frac{3-\sqrt{13}}{4} < m < \frac{3+\sqrt{13}}{4}$ trinomul e negativ și cînd $\frac{3+\sqrt{13}}{4} < m < +\infty$ trinomul e positiv. In primul caz x'' este afară din rădăcinile ecuației și anume mai mic ca cea mai mică de óre-ce x'' care e mai mare ca x' ca fiind positiv e intre rădăcini. In cazul al doilea trebue să distingem dacă x' e înainte sau

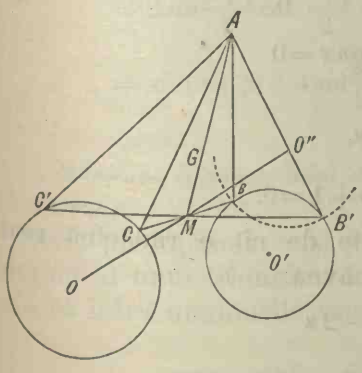
după x''. Aceasta depinde de valórea lui $2m-1$ față de 1, adică de valoarea lui m față cu 1. Deci dacă $\frac{3-\sqrt{13}}{4} < m < 1$ atunci $x' < x''$ și dacă $1 < m < \frac{3-\sqrt{13}}{4}$ atunci $x'' < x'$. In cazul al treilea x' e afară din rădăcinile ecuației a doua și mai mare ca cea mai mare de oare-ce x'' e între rădăcini. Dacă $m=1$ avem $x'=x''$. Dacă $m=\frac{3-\sqrt{13}}{4}$ atunci x'' e egal cu rădăcina cea mică a ecuației a doua, iar dacă $m=\frac{3+\sqrt{13}}{4}$ x'' e egal cu rădăcină cea mare a ecuației a doua.

Problema 312. *Să se construească un triunghiu având un vîrf într'un punct dat, cele alte două vîrfuri pe două circonferințe date și cunoscînd poziția punctului de întîlnire a medianelor triunghiului.*

(Bogdan Ionescu.)

Soluție dată de D-șoara *M. G. Rugescu* și D-nii: *G. G. Urechiă, N. G. Muzicescu* (Iași), *V. V. Cambureanu,* (Bărlad), *N. G. Alexandrescu* și *G. C. Dobrovici* (Bărlad), *G. Manoliu, St. Popovici, Al. Oprescu.*

Fie A, vîrful dat, G punctul de întîlnire a medianelor și O, O cercurile pe care se vor afla respectiv vîrfurile B.C. se prelungește AG pînă în M, așa ca $GM=\frac{AG}{2}$; M e



mijlocul laturei BC. Vîrful triunghiului, care se află pe cercul O' e simetric, în raport cu M, vîrfului care se află pe cercul O; însă simetricul ori cărui punct al cercului O, în raport cu M, se află pe un cerc O'', cu o rază egală cu a cercului O și așa ca $O''M=OM$. Cercul O'' tae cercul O' în punctele B, B', ale căror simetrice, în raport cu M, sunt punctele C și C' de pe cercul O; solutiunele problemei sînt triunghiurile ABC și AB'C'.

Dacă cercurile O'', O' ar fi fost tangente am fi avut o soluție, și dacă nu s'ar fi tăiat, nu am fi avut nici una.

* **Problema 316.** *Să se rezolve ecuația*

$$\sin x + \sec x + tg\, x + \operatorname{cosec} 2x = \operatorname{cotg} 2x - \cos 2x$$

(C. Țițiriga)

Soluție dată de D-nii: *C. Popovici* (Student, Iași) și *V. V. Cambureanu* (El. Șc. P. și Ș.); *Emil Nițescu, N. Alexandrescu, I. Niculaescu.*

Ecuațiunea dată poate fi scrisă:

$$\sin x + \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \cos 2x$$

sau

$$\frac{1}{\cos x}(1+\sin x) + \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x + (1+\sin x)(1-\sin x) - \sin^2 x = 0$$

sau

$$(1+\sin x)\left[\frac{1}{\cos x} + 1 - \sin x\right] + \sin x\left[\frac{1}{\cos x} + 1 - \sin x\right] = 0$$

Această ecuațiune se descompune în:

$1 + 2\sin x = 0$, care dă: $x = 2K\pi - \frac{\pi}{6}$, $x = (2K+1)\pi + \frac{\pi}{6}$.

și în:
$$\frac{1}{\cos x} + 1 - \sin x = 0$$

Punînd:
$$tg\frac{x}{2} = y,$$

ea devine:
$$2y^3 + 2y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Această ecuațiune nu admite de cît o rădăcină reală coprinsă între -1 și -2. Vom avea:

$$x = 2K\pi - 2\alpha$$

α fiind coprins între $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{2}$.

* **Problema 318.** *Să se demonstreze trigonometriceşte sau geometriceşte relaţia.*

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Să se deducă de aci condiţiunile pentru ca $\sin(\alpha+\beta)$ *să fie egal, mai mare sau mai mic ca* $\sin\alpha+\sin\beta$. **(I. Ionescu)**

Soluţiune trigonomotrică dată de D-nii *C. Ţiţirigă, G. G. Urechiă* şi *G. Giuşcă* (Elevi ai şcoalei speciale de Artilerie şi Geniu); *M. Bacan* (Lc. Lazăr, Bucureşti); *C. N. Georgescu* (Cl. VII Lc. Ploeşti); *Petre Dumitrescu* (Şcoala militară, Craiova); *I. Wittner* (El. Sc. de Pod. şi Şosele); *V. V. Cambureanu* (An. preparator Şc. de Poduri şi Şosele); *N. Alexandrescu* (Ib), *L. Hermann* (Ib); *I. Nicolaescu* (Lc. Carol I, Craiova; *G. Oprescu* (Şcoala Militară Iaşi), *Al. Oprescu* (Ploeşti).

Avem succesiv:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right),$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right),$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$=\sin(\alpha+\beta)+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

C.C.E.D.D.

Soluţiune trigonometrică dată de D-nii *I. Nicolaescu* şi *C. N. Georgescu.*

Să presupunem α şi β mai mici ca 90^0 şi fie γ al treilea unghiu al unui triunghiu în care cele-l'alte ar fi α şi β. Se ştie că între unghiurile unui triunghiu avem relaţiunea:

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Dacă aci, înlocuim pe γ prin valoarea sa $180^0-(\alpha+\beta)$

și trecînd $\sin\gamma$ în membrul II, avem tocmai relațiunea ce ni se cerea să demonstrăm.

Notă. — Neprimindu-se nici o soluțiune geometrică, iar din discuțiunile date nefiind nici una completă, vom mai lăsa această problemă ca nerezolvită.

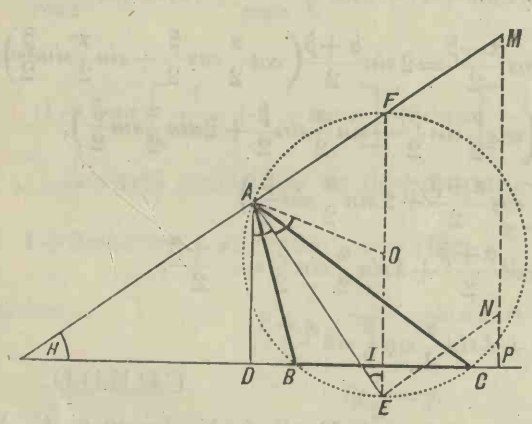
I. I.

* **Problema 324.** — *Să se construiască un triunghiu cunoscînd unghiul format de bisectrița și înălțimea corespunzătoare unghiului A, raza cercului circumscris și lungimea bisectriței exterioare unghiului A.*

G. G. Urechiă

Soluțiune dată de D-nii *N. G. Muzicescu* (Elev An. preparator al Școalei de Poduri și Șosele), *G. C. Dobrovici* (Bărlad), *I. Nicolaescu* (Cl VII Lc. Carol I, Craiova) și *G. C. Măinescu* (Ib. Cl. VI).

Pe o dreaptă oare-care luăm lungimea AH egală cu bisectrița exterioară dată. Bisectrița interioară și cea exterioară fiind perpendiculare una pe alta, găsim direcțiunea celei interioare ducînd în A perpendiculara AE pe AH. În A facem apoi unghiul EAD egal cu unghiul dat și obținem ast-fel direcțiunea înălțimei AD. Din H coborîm o perpendiculară pe AD, și avem ast-fel direcțiunea laturei BC. Să determinăm acum centrul cercului circumscris. Pentru aceasta să presupunem problema rezolvită și fie O centrul cercului, E punctul unde bisectrița interioară taie din nou circonferința și B și C vîrfurile căutate. Unghiurile BAE, CAE fiind egale avem $arc BE = arc CE$ și deci OE este perpendicular pe BC și prin urmare paralel cu AD. Unghiurile alterne-interne DAE, AEO sînt deci egale. Dar unghiurile OAE, OEA ale triun-



ghiului isoscel AOE fiind egale rezultă că $\sphericalangle OAE = \sphericalangle DAE$ [1]). De aci rezultă imediat construcția următoare. In punctul A facem unghiul OAE egal cu unghiul dat, luăm AO egal cu raza dată, și din O cu această rază descrim o circonferență, care trece prin A și determină pe dreapta HD vîrfurile B și C ale triunghiului căutat.

Soluțiune dată de D-l *C. Țițiriga* (Școala Sp. de Art. și Geniu).

Descriem o circonferință cu raza dată. Ducem o rază OE, facem $\sphericalangle OEA$ egal cu unghiul dat, ducem AH perpendicular pe AE, luăm AH egal cu lungimea dată, facem $\sphericalangle AHD$ egal cu unghiul dat, (căci el e egal cu EAD ca avînd laturile perpendiculare), și obținem vîrfurile B și C la intersecția laturei DH a acestui unghiu cu circonferența. Demonstrația reese din cele spuse mai sus.

Soluțiune dată de D-nii *N. G. Alexandrescu* și *G. C. Dobrovici* (Bărlad).

Pentru a găsi centru O putem proceda în modul următor, triunghiul AHD fiind construit ca la prima soluțiune. Observăm că punctul F diametral opus lui E e pe prelungirea lui HA de oare-ce unghiul EAH e drept și prin urmare FAE, care e înscris în circonferență e suplimentul său.

Așa dar dacă din un punct M al prelungirei lui HA ducem MP perpendicular pe HD, dacă luăm MN egal cu de 2 ori raza dată, și dacă din M ducem NE paralel cu MA, această dreaptă întîlnește pe AE în punctul E, și ducînd EF perpendicular pe HD obținem un diametru al cercului, al cărui mijloc va fi centrul căutat.

Soluțiune dată de D-l *L. Hermann* (An. Prep. Sc. de P. și Ș.).

Construim triunghiul drept-unghiu AFE în care cunoaștem unghiul din E și ipotenusa FE, prelungim FA și luăm AH egal cu lungimea dată, facem $\sphericalangle AHD$ egal cu unghiul dat, și descriem și circonferența OA, care cu latura HD ne dă punctele B și C.

---

[1]) A se vedea și *Exercices de Géométrie par F. T.* pag. 274.

Au mai rezolvit geometriceşte această problemă şi D-nii *I. Wittner* şi *V. V. Cambureanu*. D-nii *V. V. Cambureanu* şi *E. G. Niţescu* au rezolvit problema cu ajutorul trigonometriei, iar D-l *A. I. Pinchis* cu ajutorul algebrei.

Discuţie dată de D-l *C. Ţiţirigă.*

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca unghiul dat α să fie mai mic ca 90^0, pentru ca triunghiul AHI să poată fi construit, căci acest triunghiu are deja un unghiu drept. Apoi trebue ca circomferinţa OA să taie dreapta HD. Fie R raza dată şi L lungimea dată a bisectriţei exterioare.

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca AI să fie mai mic ca AE. Dar avem:

$$AI = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{AH\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{L\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$AE = 2AO\cos\alpha = 2R\cos\alpha$$

Deci condiţiunea de posibilitate este:

$$2R\cos\alpha > \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

sau:

$$L < 2R\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Cînd neegalitatea devine egalitate triunghiul se reduce la o dreaptă.

* **Problema 365.** *Produsul a două numere consecutive sporit cu dublul patratului celui mai mic, este egal cu diferenţa a două cuburi, micşorată cu diferenţa a două patrate.*

(St. N. Corbeanu)

Soluţiune dată de D-nii: *T. M. Aristide, N. C. Atanasiu, I. Banciu, D. Focşa, M. Feinsilber, S. I. Gheorghiu, G. Ghimbăşeanu, G. Grămescu, G. G. Lintes, I. Nicolaescu, C. N. Georgescu, G. Giuşcă, G. Oprescu, P. Pompilian, N. Sichitiu, G. G. Urechiă, C. M. Utză, N. Alexandrescu, P. Dumitrescu, C. Grigorescu, L. Rabinovici, M. Smărăndescu, St. N. Mirea, C. Zaharia, Mehedinţi I. Dumitru, V. Vintilă, V. Hilmu, M. Polcovnicu, A. Negulescu, Al. Oprescu, Al. Matcescu.*

Avem succesiv:

$$n(n+1)+2n^2=3n^2+n=n^3+3n^2+3n+1-n^3-2n-1$$
$$=(n+1)^3-n^3-(2n+1)=(n+1)^3-n^3$$
$$-(n^2+2n+1-n^2)$$
$$=[(n+1)^3-n^3]-[(n+1)^2-n^2].$$

C.C.E.D.D.

* **Problema 368.** *Cînd într'un triunghiu se dă relația:*

$$\alpha\beta=p(p-b),$$

triunghiul este isoscel.

α și β reprezintă razele cercurilor exînscrise corespunzătoare laturilor a și b. **(I. Niculaescu)**

Soluțiune dată de D-nii: *I. Tutuc* (Cîmpulung); *V. V. Cambureanu* și *N. G. Muzicescu* (An. Prep. Sc. Pod. și Șos.); *St. N. Mirea, I. Banciu* și *Al. Oprescu* (Lc. Ploești); *G. Grămescu* (Lc. Craiova), *C. P. Ioneseu* (Lc. Galați), *C. M. Utză* și *N. Sichitiu* (Sc. Mil. Craiova); *A. I. Pinchis* (Lc. Iași), *Gh. Gh. Lintș* (Sc. Mil. Iași); *C. Grigorescu* (Student București), *P. Pompilian, T. Grigorescu, C. I. Zaharia* (Student Bucuresci); *I. D. Mehedinți* (Șc. Mil. Iași); *V. Vintilă* (Șc. de ofițeri); *V. Hilmu, A. Negulescu, C. N. Georgescu.*

Se știe că:

$$\alpha=\frac{S}{p-a}\ ,\quad \beta=\frac{S}{p-b}\ ,$$

deci:

$$\alpha\beta=\frac{S^2}{(p-a)(p-b)}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)}=p(p-c).$$

Relația dată devine deci:

$$p(p-c)=p(p-b),$$

care ne dă:

$$b=c.$$

Soluție dată de D-nii: *Gh. Gh. Urechiă* și *Petre Dumitrescu* (Șc. Sp. de Art. și Geniu); *N. G. Alexandrescu* (Bîrlad) și *G. Oprescu* (Șc. Mil. Iași).

Avem:

$$\alpha = p\,tg\frac{B}{2},\ \beta = (p-b)\,cotg\frac{C}{2}.$$

Deci:

$$\alpha\beta = p(p-b)\,tg\frac{B}{2}\,cotg\frac{C}{2}.$$

Relația dată se reduce deci la:

$$tg\frac{B}{2}\,cotg\frac{C}{2} = 1,$$

sau:

$$tg\frac{B}{2} = tg\frac{C}{2},$$

care ne dă:

$$\frac{B}{2} = \frac{C}{2} + K\pi,$$

sau:

$$B = C + 2K\pi,$$

și cum unghiurile unui triunghiu sînt mai mici ca π trebue să luăm $K = 0$ și ne rămîne:

$$B = C.$$

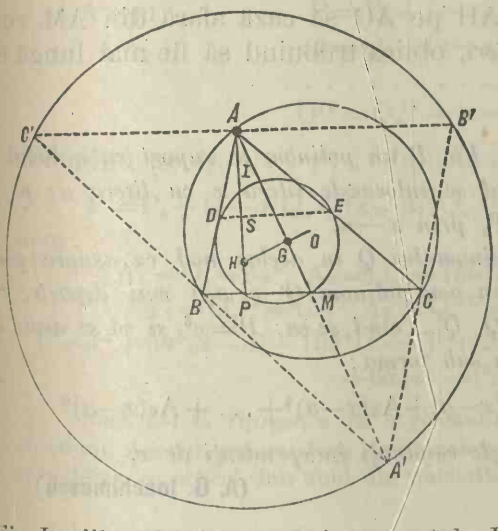
* **Problema 369.** *Să se construiască un triunghiu avînd vîrful, punctul de întîlnire al medianelor și punctul de întîlnire al înălțimilor în 3 puncte date.*

(I. Wittner)

Soluțiune dată de D-nii: *N. G. Alexandrescu* (Bărlad); *V. V. Cămburcanu* (An. Prep. Sc. Pod. și Șos.); *T. Grigorescu* (București); *A. I. Pinchis* (Lc. Iași); *I. Nicolaescu* (Lc. Craiova); *M. Feinsilber* (Iași); *G. I. Gheorghiu, I. E. Dupont, G. Zamfirescu, D. Focșa, G. Ghimbășanu, A. C. Nestor, G. Opresco* și *C. Stamatopulo* (Șc. Mil. Iași); *Al. Opresco* și *St. N. Mircu* (Lic. Ploești); *M. Polcovnici* (Șc. Mil. Iași); *Al. Matecescu, V. Vintilă, I. Tatuc.*

Fie A vîrful dat, H punctul de întîlnire al înălțimilor și G punctul de întîlnire al medianelor. Ducem AG și luăm $GM = \frac{1}{2}AG$, de oare-ce se știe că G e la $\frac{2}{3}$ a lui AM plecînd din A. Din M coborîm dreapta CMB perpendiculară pe AH și avem direcțiunea laturei BC. Ducem HG și luăm

$GO=\frac{1}{2}HG$. Punctul O este centrul cercului circumscris căci se știe că centrul cercului circumscris O, centrul de greutate G și orto-centrul H e pe aceiași dreaptă și așa că $HG=2HO$. Din O cu OA ca rază descrim o circonferență care taie pe BC în B și C. cele-l'alte două vîrfuri ale triunghiului.



Soluțiune dată de D-nii: *I. Tutuc* (Cîmpulung); *G. G. Urechiă* (Șc. Sp. de Art. și Geniu) și *N. Sichitiu* (Șc. Mil. Craiova).

Construim ca și mai sus dreapta BC. Fie I mijlocul lui AH. Prin punctele I, A, M ducem o circonferință care limitează cercul celor 9 puncte al triunghiului căutat. Prin mijlocul înălțimei ducem o perpendiculară pe ea, care taie circonferința în aceleași puncte D și E în care ea e tăiată de laturile AC și AB. Unind A cu acele puncte, avem deci triunghiul căutat ABC.

Soluțiune dată de D-l *V. V. Camburcanu.*

Să considerăm triunghiul A'B'C' obținut ducînd prin vîrfuri paralele la laturile opuse. Acest triunghiu poate fi ușor construit căci cunoaștem mijlocul A al unei laturi, centru cercului circumscris H și centrul de greutate M. Luăm deci $A'G=2AG$, din H ca centru cu HA ca rază descrim o circonferență, ducem B'C' perpendicular pe AH și avem B'C'. Ducem prin A paralele cu A'B' și A'C' și obținem punctele B și C.

Pentru a găsi condițiile de posibilitate ale problemei să punem: $AH=h$, $AG=m$, $HAG=\alpha$.

Pentru posibilitate trebue ca $HA' > HA$, care ne dă:

$$h^2 + 9m^2 - 6mh\cos\alpha > h,$$

sau:

$$3m > 2h\cos\alpha.$$

adică poecțiunea lui AH pe AG să cază afară din AM, condițiune evidentă *a priori*, oblica trebuind să fie mai lungă ca perpendiculara.

* **Problema 371.** *Fie P un polinom în raport cu o literă x, P_a rezultatul obținut cînd se înlocueşte litera x cu litera a; fie Q cîtul diviziunii lui $P - P_a$ prin $x - a$.*

Operînd asupra polinomului Q în acelaş mod ca asupra polinomului P, vom obține un nou polinom Q' şi aşa mai departe. Să se calculeze polinoamele Q, Q'... cînd se ea: $P = x^6$ şi să se arate că polinomul P poate fi pus sub forma:

$$P = x^6 = a^6 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_6(x-a)^6$$

A_1, A_2, ... A_6 fiind niște coificenți independenți de x.

(A. G. Ioachimescu)

Soluție dată de D-ra *Elena Mihalopol* şi de D-nii: *N. Alexandrescu* (El. Sc. de P. şi S); *G. Giuşcă*, *C. Țițirigă* şi *G. G. Urechiă* (Şc. Sp. de Art. şi G.); *D. Focşa*, *G. Ghimbăşeanu*, *C. M. Utză*, (Şc. Militară, Iaşi); *T. Grigorescu* (București); *A. I. Pinchis* (Lic. Național, Iaşi), *C. I. Zaharia* (Student, București), *St. N. Mirea* (Lic. Ploești); *N. Sichitiu*, *C. N. Georgescu*, *C. Zaharia*.

Avem:

$$P - P_a = x^6 - a^6 = (x-a)(x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5)$$

deci:

$$Q = x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5.$$

$$Q - Q_a = x^5 - a^5 = a(x^4 - a^4) + a^2(x^3 - a^3) + a^3(x^2 - a^2) + a^4(x - a)$$

ear cîtul diviziunii prin $x - a$ adică Q' va fi:

$$Q' = x^4 + 2ax^3 + 3a^2x^2 + 4a^3x + 5a^4.$$

$$Q' - Q_a' = x^4 - a^4 + 2a(x^3 - a^3) + 3a^2(x^2 - a^2) + 4a^3(x - a),$$

deci: $$Q''=x^3+3ax^2+6a^2x+10a^3.$$

$$Q''-Q_a''=(x^3-a^3)+3a(x^2-a^2)+6a(x-a)$$

$$Q'''=x^2+4ax+10a^4$$

In mod analog: $Q^{IV}=x+5a$ și $Q^V=1$.

Avem: $$P=P_a+(x-a)Q$$

$$Q=Q_a+(x-a)Q'$$

. . . . . .

$$Q^{IV}=Q_a^{IV}+(a-x),$$

eliminînd pe Q, Q'. . . . , obținem:

$$P=P_a+(x-a)Q_a+(x-a)^2Q_a'+\ldots+(x-a)^6Q^{IV}$$

deci:

$$A_1=Q_a=6a^5,\ A_2=Q_a'=15a^4,\ A_3=Q_a''=20a^3,$$

$$A_4=Q_a'''=15a^2\ A_5=Q_a^{IV}=6a\ A_6=1,\ \text{ear}$$

$$P=a^6+3a^5(x-a)+15a^4(x-a)^2+20a^3(x-a)^3+15a^2(x-a)^4+6a(x-a)^5.$$

Notă. D-l *C. Țițirigă*, a dat o generalizgre foarte interesante acestei chestiuni. Această generalizare, împreună cu altele ce vom mai primi se va publica, ca articol, într'unul din numerile viitoare ale *Gazetei*.

A. G. I.

* **Problema 381.** *Se dă ecuația:*

$$x^2+px+q=0.$$

Să se găsească relațiunea dintre rădăcini cînd ele sînt proporționale cu coeficientii p și q. Pentru o valoare dată unuia din acești coeficienți cîte valori poate avea cel-l'alt pentru ca relația să fie satisfăcută? **(I. Ionescu)**

Soluțiune dată de D-nii *N. G. Alexandrescu* (Bîrlad); *G. G. Urechiă*, *C. Țițirigă* și *P. Dumitrescu* (Șc. Sp. de Art. și Geniu); *Pinchis S. Avram* (Lc. Iași); *I. Niculaescu* și *G. Grămescu* (Lc. Craiova); *A. C. Nestor*, *G. G. Linteș*, *G. Oprescu* și *M. G. Polcovnicu* (Șc. Mil. Iași); *St. N. Mirea* și *Al. Oprescu* (Lc. Ploești); *C. N. Georgescu*, *D. Focșa*, *G. Ghimbășeanu*.

Fie x' și x'' rădăcinile ecuației date. Avem:

$$x'+x''=-p,\quad x'x''=q.$$

După cum avem:

$$\frac{x'}{p}=\frac{x''}{q},$$

care ne dă:

$$\frac{-p}{p+q}=\frac{x'+x''}{p+q}=\frac{x'}{p}=\frac{x''}{q}=\frac{\sqrt{x'x''}}{\sqrt{pq}}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}\sqrt{q}}=\frac{1}{\sqrt{p}},$$

de unde:

$$(p+q)=p\sqrt{p},$$
$$(p+q)^2=p^3$$
$$q^2+p^2q+p^2-p^3=0.$$

Aceasta e relațiunea căutată.

Notă. Partea a doua a acestei chestiuni, pentru care nu s'a primit nici o soluție complectă pînă acum, o vom publica mai tîrziu.

I. I.

PROBLEME PROPUSE

* 398. Fie S și S′ cele două centre de asemănare a două cercuri C și C′. Să se demonstreze că cercurile C, C′ și cercul descris pe SS′ ca diametre au toate același ax radical. (T. Chollet).

* 399. Să se găsească un număr de patru cifre care să îndeplinească următoarele condițiuni: 1) Numărul format de primele două cifre să fie dublul ultimei cifre; 2) Numărul format de primele trei cifre să difere de dublul numărului format de ultimele două cu suma celor d'întîiu două cifre. (I. Ionescu)

* 400. Să se arate că pentru unele valori întregi ale lui x una din expresiunele:

$$3^x+1 \text{ sau } 3^x-1$$

e divizibilă cu 1898 și că cea-l'altă nu poate fi divizibilă cu acest număr pentru nici o valoare a lui x.

(V. V. Cambureanu)

* 401. O navă cu o viteză de 3^m pe secundă, înconjoară un far înalt de 30^m, ast-fel că lumina acestui far pare ca o scînteie ce plutește pe apă de la observatorul de pe navă, care se găsește la 3^m deasupra nivelului apei. In cît timp va ajunge nava de la un punct, la punctul opus față de far. (I. Vancea)

402. Să se arate că diferența:

$$\sum_{n=1}^{n=p}\left(\frac{n^2+n+3}{n\,(n+1)}\right)-\frac{(p+1)^2}{p}$$

tinde către 1 când p tinde către infinit.

(A. G. Ioachimescu)

* 403. Să se arate că dacă a este un număr nepereche prim cu 3 și 11, expresia:

$$a^{12}-a^{10}-a^2-1=0$$

este divizibilă cu 6336[1]. (V. Cristescu)

* 404. Se dă un patrulater inscriptibil ABCD situat într'un plan P; să se găsească toate planele P' pe care proecția ortogonală a patrulaterului ABCD să fie un patrulater iarăși inscriptibil. (G. Țițeica)

* 405. Să se construiască un triunghiu cunoscînd latura AB, înălțimea ce pleacă din A și mediana ce pleacă din B. (I. Ionescu)

406. Se dă un cerc fix cu centrul O și un diametru fix AB al său. Un al doilea cerc are centrul său C pe circonferința primului și trece tot-d'auna prin B. Fie D al doilea punct de întîlnire al celor două circonferințe și E punctul unde AB întîlnește din nou circonferința C. Se cere să se arate:

1. Că locul punctului M comun dreptelor AC, BD este o *strafoidă*.

---

[1]) A se vedea problema No. 386 din numărul precedent.

2. Că locul punctului N comun dreptelor OC, BD este o *circonferință*.

3. Că locul punctului R comun dreptelor CE, BD este un caz particular al *curbei* care face obiectul *problemei 236 (Gazeta Matematică* anul IV pag. 47).

4. Că locul punctului P comun dreptelor DE, BC e un *melc al cui Pascal*.

5. Că locul punctului V comun AD, BC e o *circonferință*.

(A. Liovici)

407. Să se determine curba pentru care ordonata la origină a tangentei e egală cu abscisa la origină a normalei conrespondente și să se indice un mijloc pentru a duce o tangentă în un punct al acelei curbe. (I. Ionescu)

Articolele și problemele însemnate cu * se referă la matematicele elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1. Articolele trimese de D-nii: **C. Țițirigă** și **G. G. Urechiă**.

2. Problemele propuse de D-nii: **N. G. Alexandrescu, F. Dubesset, N. G. Georgescu, Gr. N. Makarie, I. Nicolescu, E. Nițescu, C. Popovici, C. Țițirigă, G. G. Urechiă, I. Vancea** și **C. Zaharia**.

3. Probleme rezolvite de D-nii: **N. Alexandrescu** (311, 12, 24, 25, 26, 28, 35, 37, 38, 40, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 55, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 68, 69, 71, 78, 81, 84, 85, 86, 88, 91, 95); **V. G. Angelescu** (351); **I. Banciu** (368); **V. V. Cambureanu** (312, 17, 24, 26, 28, 29, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 59, 61, 62, 63, 66, 68, 69, 71); **G. Constantinescu** (317, 26, 28, 37); **St. N. Corbeanu** (302, 40, 43, 44, 59, 62, 76, 77); **G. C. Dobrovici** (302, 12, 17, 24, 25, 26, 28, 36); **P. Dumitrescu** (344, 62, 68, 71, 75, 76, 77, 81, 83); **I. E. Dupont** (369); **M. Fainzilber** (369, 71, 83); **C. Florescu** (375, 76, 77, 83); **D. Focșa** (369, 81, 83, 85); **V. Halmu** (383, 86); **C. N. Ceorgescu** (311, 338, 43, 44, 56, 68, 71, 76, 77, 81, 82, 86); **N. G. Georgescu** (344, 52, 55, 71, 95); **G. I. Gheorghiu** (369, 76, 77); **G. Ghimbășeanu** (369, 81, 83, 85); **G. Grămescu** (368); **G. Ciuscă** (328, 52, 53, 55, 59, 71); **C. Grigorescu** (311, 29, 52, 60, 61, 62, 68); **T. Grigorescu** (368, 69, 71); **L. Herman** (265, 302, 06, 11, 12, 17, 24, 26, 28, 29, 35, 40, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 59); **A. Iliovici** (284, 94, 302); **C. Ionescu** (Galați) (323, 61, 68); **C. Ionescu** (Ploești) (351); **Virg. Ionescu** (323); **G. G. Linteș** (368, 81, 83, 85); **G. C. Măinescu** (317, 24, 29, 38, 53); **A. A. Makarovici** (329, 92); **G. Manoliu** (312); **Al. Matescu** (369); **D. I. Mehedinți** (376, 77, 83, 94); **D-ra Elena Mihalopol** (371); **St. N. Mirea** (344, 52, 53, 62, 63, 68, 69, 75, 76, 77, 81, 83, 84, 85); **I. Moscuna** (274); **N. G. Muzicescu** (176, 302, 06, 12, 17, 24, 26, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 45, 48, 52, 59, 60, 61, 63, 68, 70, 71); **A. Nestor** (369, 71, 81, 83, 85); **I. Nicolaescu** (302, 04, 17, 24, 26, 28, 29, 35, 37, 38, 39, 40, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 62, 66, 69, 71, 75, 78, 81, 83, 84, 85, 86); **M. P. Niculescu** (317); **E. Nițescu** (306, 23, 24, 25, 29, 35, 37, 39, 43, 45, 51, 52, 53, 54, 64); **A. Oprescu** (312, 23, 40, 52, 53, 61, 62, 63, 68, 69, 75, 76, 77, 80, 81, 83, 84, 94); **G. Oprescu** (340, 52, 62, 66, 68, 69, 71, 75, 76, 77, 83, 84, 85); **A. I. Pinchis** (302, 06, 23, 24, 26, 28, 29, 35, 38, 42, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 59, 61, 62, 63, 66, 68, 69, 71, 76, 77, 78, 81, 83, 84, 85, 86, 91, 92); **I. Pitețeanu** (284); **M. G. Polcovnicu** (381, 83); **P. Pompilian** (368); **C. Popovici** (293, 305); **D-ra M. Rugescu** (284, 302, 12, 41, 48); **N. Sichitiu** (317, 28, 62, 68, 69, 71); **C. Stamatopol** (369, 71); **G. V. Stănescu** (306); **A. M. Tănăsescu** (394); **C. Țițirigă** (176, 253, 84, 94, 302, 03, 08, 15, 19, 20, 24, 27, 31, 35, 40, 41, 50, 51, 52, 54, 56, 59, 71, 73, 81, 82, 90, 95); **I. Tutuc** (368, 69 73); **G. C. Urechiă** (206, 53, 74, 75, 84, 302, 03, 05, 06, 08, 12, 17, 19, 20, 26, 27, 31, 36, 40, 41, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 59, 61, 62, 68, 69, 71, 73, 76, 77, 81, 82, 83, 90); **C. M. Utză** (368, 71); **I. Vancea** (394); **C. Vasilescu** (394); **C. Vintilă** (302, 06, 45, 52); **V. Vintilă** (302, 06, 35, 45, 52, 69); **Th. M. Vladimirescu** (293, 94, 305, 11, 41); **J. Wittner** (324, 29, 31, 37, 38, 39, 43, 44, 45); **C. Zaharia** (371); **G. Zamfirescu** (371, 81, 83).

Probleme nerezolvite: 22, 106, 110, 113, 118, 127, 171, 172, 204, 249, 258, 282, 295, 318, 332, 346, 349, 357, 361, 367, 374, 379, 387, 389, 397.

Notă. Din cauza neapariției numărul din Ianuarie, despre care am înștiințat pe cititori noștri din ce cauză a provenit, pentru a complecta lipsa, viitoarele trei numere, care vor aparea regulat ca și în trecut, la 15 ale fiecărei luni, vor avea cîte o jumătate coală (8 pagini) mai mult. Credem că cititori noștri vor prefera această soluțiune, în loc de a le da două numere în același lună, sau un număr dublu.

SPRE ŞTIINŢA

Soluţiunile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco: D-lui V. Cristescu, inginer, serviciul liniei Cernavoda-Constanţa, la Cernavoda; sau D-lui A. G. Ioachimescu Inginer, Sub-Directorul Fabricei de Tutun, Belvedere, Bucureşti; sau D-lui Bogdan Ionescu, Profesor la Gimnaziu, Rîmnicu-Vîlcei; sau D-lui I. Ionescu inginer Strada Căluşei 19, Bucureşti sau D-lui Nicolescu, Inginer, Strada Mihai-Vodă 9, Bucureşti.

Ele trebue să fie scrise citeţ şi pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit şi să fie precedată de enunţul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi pe hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugaţi de a da o dată cu enunţurile şi o schiţă a soluţiunilor.

Articole şi chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu iniţiale, nu se vor publica de cît dacă redacţia va cunoaşte numele adevărat şi adresa trimiţătornlui.

Se vor primi soluţiuni la problemele propuse, pănă la aparţia soluţiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute cu copertă ca rezolvite. După apariţiune se vor primi numai soluţiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Anul I, II şi III al Gazetei matematice formează trei volume broşate de 288. 296 şi 300 pagini şi se vinde cu preţul de 10 lei fie-care volum.

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an şi se plăteşte înainte. Abonamentele, schimbările de adrese şi reclamaţiunile trebuesc trimise D-lui I. ionescu, Inginer, Strada Căluşei 19, Bucureşti