GAZETA MATEMATICA

APARE O DATĂ PE LUNĂ

ANUL IV.

NUMĂRUL 6. — MARTIE 1899.

SUMARUL

1. Comparațiunea rădăcinelor mai multor ecuațiuni de gradul al doilea . . . . . *I. Ionescu.*
2. Bibliografie . . . . . *I. G. I.*
3. Chestiuni de examen. -
4. Generalizarea problemei 371 . *C. Titeică, G. G. Urechiă.*
5. Probleme rezolvite: 306, 311, 323, 329, 335, 338, 343, 351, 352, 359, 376, 377.
6. Probleme propuse: 408–416.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

STAB. GRAFIC I. V. SOCECĂ, STRADA BERZEI 59.

1899.

Prezentul număr are 8 pag. mai mult ca formatul obișnuit.

Redacția *«Gazetei Matematice»* se compune din următoarele persoane:

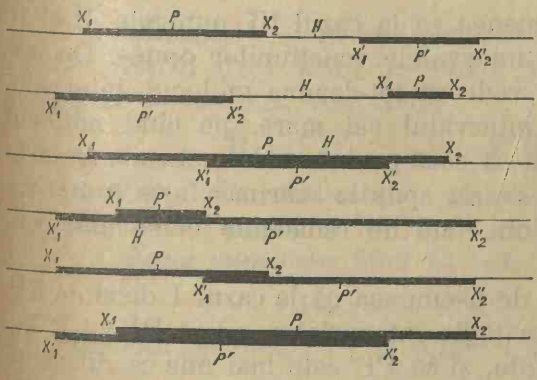
Alexandrini Octav,	Inginer.
Constantinescu Tancred,	Inginer.
Cristescu Vasile,	Inginer.
Davidescu Emanoil,	Inginer.
Erbiceanu Caton,	Inginer.
Ioachimescu Andrei,	Inginer, *licențiat în matematici.*
Ionescu Bogdan,	Profesor, *licențiat în matematici.*
Ionescu Ion,	Inginer.
Lupu Constantin,	Inginer.
Nicolescu Nicolae,	Inginer.
D-ra Pompilian Constanța	Directoară de Institut, *licențiată în matematici.*
Roco Mihail,	Inginer.
Țițeica Gheorghe,	Profesor, *licențiat în matematici.*
Zottu G. Ion,	Inginer.

*Comparațiunea rădăcinelor mai multor ecuațiuni de gradul al doilea

REPREZENTARE GRAFICA

Pentru a face mai concrete diferențele dintre cele trei cazuri generale precum și particularitățile fie-căruia din cazurile generale sau speciale, vom da următoarea reprezentare grafică a neegalităților (A), (A'), (B), (B'), (C), (C').

Pe o dreaptă indefinită luăm un punct fix O numit *origină*, și purtăm de la acest punct spre dreapta rădăcinile pozitive și spre stînga pe cele negative, considerînd rădăcinile ca măsura unor lungimi. Extremitățile ast-fel obținute le vom considera ca *puncte reprezentative* ale rădăcinilor și le vom însemna cu literile mari conrespunzătoare literilor mici cu care am reprezentat rădăcinile, dîndu-le aceleași accente și aceiași indice. Așa de exemplu rădina x_1'' o vom însemna pe figură cu X_1''. De aci reese imediat că dreapta care unește două puncte reprezentative ale rădăcinilor unei ecuațiuni va reprezenta diferența acelor rădăcini, adică intervalul rădăcinilor ecuațiunei considerate. Condițiunea ca o rădăcină să fie mai mică sau mai mare ca alta, se va traduce pe figură prin condiția ca punctul reprezentativ al primei rădăcini, să fie la stînga sau la dreapta punctului reprezentativ al celei de a doua rădăcini.



Vom avea ast-fel următoarele 6 figuri conrespunzînd celor 6 cazuri generale Egalitatea unor rădăcini se va traduce pe figură evident prin coencidența punctelor lor reprezentative.

Pe aceste figuri nu s'a însemnat origina, de oare-ce aceasta nu ne interesează, căci ne ocupăm numai de mărimile relative ale rădăcinilor, iar nu chiar de aceste mărimi

în raport cu zero. Pe figuri, punctele P și P′ sînt mijloacele liniilor $X_1'X_1''$, $X_2'X_2''$. Se poate demonstra foarte ușor, că, ori-care ar fi poziținea originei, punctele P și P′ reprezintă în mărime și semn semisuma algebrică a rădăcinilor ecuațiunilor date, sau cu alte cuvinte că ele reprezintă cantitățile $(-p)$ și $(-p')$.

Pe aceste figuri se poate vedea foarte ușor cele mai multe dintre diferențele ce există între cele 3 cazuri generale. Așa de exemplu se vede că la cazul I rădăcina cea mai mică o are ecuațiunea în care P sau P′ e mai la stînga, adică în care coeficientul lui x e cel mai mic. Același lucru și pentru cazul III.

Existența cantității h, de care am vorbit la studiul separantului, conrespunde posibilității ca la cazul I să găsim un punct H, care să nu cază pe nici unul din intervale, dar care să fie coprins între P și P′ iar la cazul II să găsim un punct H pe ambele intervale, dar afară din linia PP′. Cantitatea R de care ne-am servit în demonstrațiunea ultimului caz este distanța de la H la cel mai apropiat din punctele P și P′.

Se vede de asemenea că la cazul III punctele P și P′ pot cădea sau nu pe intervalele ecuațiunilor opuse. De asemenea la cazul II se vede că tot-deauna mijlocul intervalului cel mic cade pe intervalul cel mare, pe cînd mijlocul acestuia poate sau nu să cază pe intervalul cel mic. Aceasta corespunde cu cele ce s'a spus la mărimea semisumei rădăcinilor unei ecuațiuni, față de rădăcinile celei-l'alte ecuațiuni.

Se poate vedea de asemenea că la cazul I distanța PP′ este mai mare ca jumătățile intervalelor, adică $PX_1''+P'X_2'$. la cazul (A) de exemplu, și că PP′ este mai mic ca diferența jumătății intervalelor, adică ca $PX_1''-P'X_2''$, căci această diferență se mai compune și din $X_2''X_1''$. Acestea, ca și concluziunile ce se pot deduce în cazurile particulare, corespund tabloului dat la studiul eliminantului, căci e ușor de văzut că avem:

$$D=PP',\quad PX_1'=PX_1''=\sqrt{R_1},\quad PX_2'=PX_2''=\sqrt{R_2}.$$

Toate aceste observațiuni se pot concretiza și mai bine, dacă pe intervalele $X_1'X_1''$ și $X_2'X_2''$, ca diametre, descrim cîte o circonferență. Cercurile conrespunzătoare le vom numi *cercurile ecuațiunilor* și le vom numerota cu aceleași numere. Se vede atunci imediat că cele trei cazuri generale și cazurile particulare nu depind de cît de poziția relativă a acestor cercuri unul de altul, iar că tabloul dat la studiul eliminantului, nu e alt-ceva de cît relațiunile dintre razele cercurilor și distanța centrelor. Așa cazurile I, II, III conrespund cercurilor *exterioare*, *interioare* și *secante*; cazurile particulare conrespund cercurilor *tangente* dacă eliminantul e nul și cercurilor *nule* dacă unul sau ambii realizanți sînt nuli.

Este interesant a se vedea cum se traduc pe figură diferitele criterii găsite pentru separarea rădăcinilor. Vom examina succesiv acele criterii.

1. *Depărtarea* fiind PP' *reprezintă distanța centrelor*, ceea ce justifică și numirea de depărtare dată la început. Depărtarea e deci pozitivă sau negativă după cum cercul I e la stînga sau la dreapta cercului II. Dacă $D=0$, cercurile sînt concentrice.

2. *Realizanții* R_1 și R_2 *sînt patratele razelor cercurilor* ecuațiunilor. Ast-fel dacă luăm un punct M pe circonferența I și altul M' pe a doua, vom avea:

$$R_1=\overline{PM}^2, \qquad R_2=\overline{P'M'}^2.$$

Dacă unul din realizanți e nul, cercul conrespondent se reduce la un punct.

3. *Criteriul intervalelor* fiind R_1-R_2, avem:

$$I=\overline{PM}^2-\overline{P'M'}^2.$$

Să luăm pe linia PP' un punct I' așa că:

$$I=\overline{PM}^2-\overline{P'M'}^2=\overline{PI}^2-\overline{P'I'}^2.$$

Se știe că acest punct I' este *piciorul axei radicale* a celor două cercuri, care e coarda comună în caz cînd cercurile sînt secante. Așa dar I este pozitiv, nul sau negativ după cum axa radicală e mai aproape de centrul cercului I, la

egală distanță de cele 2 centre, sau mai aproape de centrul cercului II.

Zicem că punctul Γ reprezintă pe figură expresiunea *rădăcinei comune* γ. In adevăr am avut relațiunea:

$$\overline{P\Gamma}^2-\overline{P'\Gamma}^2=I=R_1-R_2.$$

Avem apoi: $P\Gamma+P'\Gamma=PP'=D.$

Divizînd acestea avem:

$$P\Gamma-P'\Gamma=\frac{R_1-R_2}{D},$$

și adunînd aceasta cu egalitatea precedentă avem:

$$2P\Gamma=D+\frac{R_1-R_2}{D}=\frac{D^2+R_1-R_2}{D}.$$

de unde, înlocuind pe D_1, R_1, R_2 în funcțiune de p, p', q, q' avem:

$$2P\Gamma=\frac{p^2+p'^2-2pp'+p^2-q-p'^2+q'}{p-p'}=\frac{2p(p-p')-(q-q')}{p-p'}.$$

sau:
$$P\Gamma=p-\frac{q-q'}{2(p-p')}=p+\gamma.$$

Raportînd Γ la origină avem:

$$O\Gamma=OP+P\Gamma=-p+p+\gamma=\gamma.$$

Așa dar *piciorul axei radicale (sau coardei comune cînd există) ne reprezintă rădăcina comună.* De aci se poate deduce diversele proprietăți ale lui γ. Se știe că axa radicală trece printre cercurile exterioare, trece prin punctele de întîlnire a cercurilor secante și trece afară din cercurile interioare.

Așa dar Γ este afară din cercuri la cazul I și II și în ambele cercuri la cazul III. De aci reese următoarea proprietate a cantității γ. *Cantitatea γ este coprinsă sau nu între rădăcinile unei ecuațiuni, după cum este sau nu este coprinsă între rădăcinile celei-l'alte.* Se știe apoi că la cercurile tangente axa radicală trece prin punctul de contact și deci Γ reprezintă atunci rădăcina comună.

4. *Separantul* fiind egal cu $D^2-R_1-R_2$ avem:

$$S=\overline{PP'}^2-(\overline{PM}^2+\overline{P'M'}^2).$$

Fie l lungimea ipotenusei triunghiului dreptunghiu con-

struit cu razele PM și P'M' drept catete. Expresiunea precedentă devine atunci:

$$S=\overline{PP'}^2-l^2.$$

De aci reese că S e pozitiv, nul sau negativ după cum distanța centrelor e mai mare, egală sau mai mică ca l. Se știe însă că distanța centrelor face cu razele duse la punctul comun un triunghiu dreptunghiu cînd *cercurile* sînt *ortogonale*. Așa dar putem zice că separantul e pozitiv, nul sau negativ după cum cercurile sînt mai depărtate ca spre a fi ortogonale sau mai apropiate ca pentru a fi ortogonale. De aci se vede imediat că $S>0$ la cazul I, cercurile exterioare fiind mai depărtate ca ortogonale; $S<0$ la cazul II, cercurile interioare fiind mai apropiate ca ortogonale și că nu putem avea $S=0$, de cît cînd cercurile sînt ortogonale, adică dacă se taie, ceea ce se întîmplă la cazul III.

5. *Eliminantul*, după cum am văzut, este cîtul înlocuirei lui γ în una din ecuațiuni prin $4D^2$, și că semnul lui depinde de semnul acelei înlocuiri. Ecuația (1) însă, care se poate scrie la membrul I supt forma produsului $(x-x_1')(x-x_1'')$ dă, înlocuind pe x cu γ:

$$(\gamma-x_1')(\gamma-x_1''),$$

care se traduce pe figură prin produsul liniilor $X_1'\Gamma$, $X_1''\Gamma$. Așa dar dacă Γ este de aceiași parte a lui X_1' și X_1'', atunci E e pozitiv, iar dacă Γ e între X_1' și X_1'' atunci E e negativ.

Același lucru se poate stabili și pentru ecuația II. Așa dar eliminantul este pozitiv, nul, sau negativ după cum Γ este afară din cercuri pe circonferența unui cerc, sau în interiorul ambelor cercuri. Am văzut că Γ nu poate fi în interiorul unui cerc și exterior altuia. Acestea ne explică imediat că $E>0$, cazul I și II; $E<0$ la cazul III și $E=0$ cînd avem o rădăcină comună. In acest caz se poate demonstra că partea comună a intervalelor e egală cu raza cercului înscris în triunghiul format de raze și PP'.

6. Expresiunile $S+R_1$ și $S+R_2$, egale cu D^2-R_2 și D^2-R_1 se reduc la:

$$\overline{PP'}^2-\overline{PM'}^2 \text{ și } \overline{PP'}^2-\overline{PM}^2.$$

Prima de exemplu este pozitivă, nulă sau negativă după cum $PP' > P'M'$, $PP' = P'M'$ și $PP' < P'M'$, adică după cum P este exterior, pe, sau în interiorul circomferenței II. De aci rezultă imediat proprietatea ce are suma $S + R_1$ de-a indica cum stă semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1) față de rădăcinile ecuațiunei II.

In mod analog se pot interpreta și cele-l'alte proprietăți studiate mai înainte. In particular cazurile date la separant și eliminant pentru a fixa une-ori semnul acestora fără a-i mai calcula valoarea se vede imediat prin reprezentarea grafică. Pentru aceasta e de observat că q și q' sînt pozitivi cînd *origina* O e exterioară cercurilor respective și negativi în caz contrar, că p și p' sînt pozitivi dacă P și P' sînt la stînga lui O și negativi în caz contrariu.

Așa de exemplu, *dacă q și q' sînt pozitivi iar p și p' de semne contrare* atunci origina e exterioară ambelor cercuri și între ele. Cercurile sînt deci exterioare, avem cazul I și prin urmare E și S sînt pozitivi. De asemenea *dacă q și q' sînt de semne contrare iar p și p' de același semn iar coeficientul lui x din ecuația în care ultimul termen e negativ e mai mare în valoare absolută ca coeficientul lui x din cea-l'altă ecuațiune,* atunci origina e în interiorul unui cerc și în exteriorul celui-l'alt, centrele sînt de aceiași parte a originei, și cum centrul primului cerc e mai aproape de origină ca al celui d'al doilea rezultă că acesta coprinde în sine pe primul căci cuprinde un punct exterior lui de cea-l'altă parte a centrului. Avem deci cazul II și prin urmare $E > 0$, $S < 0$.

In același mod se poate da interpretarea și altor cazuri.

(Va urma). **I. Ionescu.**

BIBLIOGRAFIE.

Curs de Algebră, partea I, de D-l *V. Teodoreanu,* profesor la Școala militară din Iași, și D-l locotenent *I. Martac,* ajutor. (Curs poligrafiat, pentru uzul elevilor din Școala militară, Iași).

O carte didactică trebue mai ales judecată după modul cum ea inițiază pe începători în primele principii ale științei despre care tratează. Din

acest punct de vedere, expunerea D-lui Teodoreanu se îndepărtează sensibil de acea obișnuită în cărțile de *Algebră elementară;* ear dispoziția adoptată de D-sa mi se pare foarte nemerită, atît din punctul de vedere al clarității, cît și al logicei.

D-sa începe prin a introduce noțiunea de număr negativ, primul element de care e nevoe în studiul Algebrei, și se servește pentru aceasta de concepția *empirică*, sistem preferabil într'o carte destinată începătorilor. Ar fi fost poate de dorit ca în vre-o notă sau observație, să se spue că precum în aritmetică se studiază numerile *intrensec,* abstracție făcînd de proveniența lor, tot asemenea numerile negative pot fi concepute și studiate independent de considerația măsurătoarei unui segment de dreaptă într'un sens sau în altul. Negreșit că o asemenea observație nu ar însemna mult pentru un începător, însă cursul D-lui Teodoreanu, ast-fel cum e redigeat, poate fi consultat cu folos și de aceia care fac un studiu mai amănunțit al Algebrei elementare; și pentru aceștia e foarte util a-și da seama ca numerile negative pot fi concepute independent de ori-ce considerație de măsură, și în acelaș timp i-ar fi lăsat să întrevadă că afară de numerile pozitive și negative mai putem să ne închipuim și altele. O asemenea observație ar fi putut fi pusă și la discuția rădăcinilor ecuațiunei de gradul al II-lea, cînd se întîlnesc numerile *zise imaginare.*

După ce s'a generalizat noțiunea de număr se trece la operațiunele cu aceste numere, fără ale combina prealabil cu semne de operațiuni. Această dispoziție mi se pare foarte logică, căci trebuește mai întîiu cunoscută semnificarea fie-cărei operațiuni elementare înainte de a forma expresiuni algebrice, care implică cunoașterea operațiunelor cu numere generalizate. D-l Teodoreanu evită definițiunele lucrurilor ce nu se pot defini clar și precis în cîte-va cuvinte: ast-fel nu se definește nici algebra, nici adunarea, nici înmulțirea, sau mai exact pentru aceste din urmă se ea drept definițiuni regulele lor de operațiuni, ceea ce nu este mai arbitrar ca definițiunele ce se dau obișnuit și au avantagiul a fi mai clare; D-sa se mulțumește a *justifica* de ce se adoptă aceste definițiuni și nu altele și ca rezultatele la care se ajunge ast-fel sînt tot-d'auna bine determinate. La împărțire pentru a avea rezultate generale se introduce de la început noțiunea de număr *infinit* și nedeterminat, avînd grija a specifica într'o observațiune, că aceste numere nu trebuesc asimilate cu cele-l'alte, ci ele se introduc numai pentru a avea rezultate generale și a evita perifrazele. La radicale se dă o noțiune destul de clară de numerile iraționale, ceea ce obișnuit se neglige a se face sau chiar a se menționa de și se procede la operațiuni cu asemenea numere.

După definițiunea operațiunelor cu numere generalizate (prefer această denumire, căci acea de *număr algebric* are un sens mai general), se trece la formarea expresiunelor algebrice, definindu-se diferitele numiri întrebuințate și introducînd de la început noțiunea de identitate și funcțiune de o variabilă, servindu-se de exemple apropiate. Procedeul de a se introduce

de la început noţiunea de identitate şi funcţiune mi se pare foarte nemerit, aceste noţiuni sînt destul de simple pentru a putea fi pricepute de începătorii şi introducerea lor înlesneşte foarte mult înţelegerea mecanismului calculului algebric şi adevăratului rol al Algebrii [1]). După aceste noţiuni se procede la calculul Algebric propriu zis, a cărui expunere este foarte clară şi însoţită de numeroase exemple. Menţionăm numai că pe alocuri s'a întrebuinţat cuvîntul de *funcţiune întreagă* în loc de *polinom;* de asemenea la teoria fracţiunelor algebrice la teorema relativă la *nedeterminare aparentă* cred că ar fi fost preferabil să se întrebuinţeze noţiunea de limită, deja introdusă mai nainte; căci o expresiune care se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ este absolut nedeterminată, cînd se presupune că se da literilor chiar acele valori pentru care expresiunea devine $\frac{0}{0}$, şi pentru a ridica nedeterminarea nu avem dreptul a împărţii numărătorul şi numitorul cu un factor care ar fi riguros zero.

După calculul Algebric, care ocupă aproape jumătate din curs, şi cu drept cuvînt căci aceasta e partea cea mai importantă, temelia Algebrei, se procede la teoria ecuaţiunelor şi inecuaţiunelor de gradul I, luîndu-se împreună. Regretăm că lipsa de spaţiu ne împedică a face o dare de seamă mai amănunţită a acestei părţi, unde se vede o constantă preocupare de claritate, rigurozitate şi generalitate în expuneri. Semnalăm în particular: rezoluţia sistemelor de gradul I-iu, probleme care conduc la ecuaţii de gradul I, artificii de calcul; studiul detaliat al trinomului de gradul al II-lea, reprezentarea grafică a funcţiunelor de o variabilă etc.

In rezumat cursul D-lor *Teodoreanu* şi locot. *Martac* indică mult efort personal, de a expune lucrurile sub forma cea mai logică şi cea mai clară, căutînd a trata chestiunele în mod cît mai complect şi mai general şi din acest punct de vedere poate că pe alocurea începătorii întîinesc oare-care dificultăţi studiind acest curs, în schimb însă el poate fi consultat cu profit de acea care fac un studiu de revizie al Algebrei elementare.

Terminînd ţinem a mulţumii D-lui Teodoreanu de atenţia D-sale, împrumutînd mai multe probleme din „Gazeta Matematică“ şi indicînd origina.

A. G. I.

CHESTIUNI DE EXAMEN

(Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti)

(Examenele din Ianuarie 1899)

ALGEBRĂ

I. Să se studieze natura rădăcinelor ecuaţiunei:

$$f(x)=x^4-4\alpha x^3+4\alpha^2x^2+\beta=0;$$

(Presupunînd că α şi β reprezintă coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor).

1) De alt-fel aceasta este şi dispoziţia care s'a indicat expres, pentru a fi urmată, în noile programe ce s'au făcut, pentru studiul Algebrei în liceu.

Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinele ecuațiunei date, să se calculeze valorile expresiilor:

$P=(x_1+x_2+x_3-x_4)(x_2+x_3+x_4-x_1)(x_3+x_4+x_1-x_2)(x_4+x_1+x_2-x_3)$

$Q=(x_1^2+x_2^2+x^2{}_3-x^2{}_4)(x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1^2)(x_3^2+x_4^2+x_1^2-x_2^2)(x_4^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2)$.

Notă. — Partea închisă în parantesă nu era obligatorie pentru candidați.

II. Să se arate că seria:

$$\frac{C_2^2}{2^2}+\frac{C_3^2}{2^3}+\ldots+\frac{C^2_n}{2^n}+\ldots$$

este convergentă și să se calculeze suma ei. (C^2_n reprezintă numărul combinărilor de n obiecte luate câte două).

GEOMETRIE ANALITICĂ

Plană

Se dă un triunghiu echilateral și se consideră conicele circumscrise acestui triunghiu și tangente la o dreaptă trecînd prin unul din vîrfuri paralel cu latura opusă.

Se cere locul geometric al centrelor acestor conice, și să se distingă părțile locului care corespund la centre de elipsă sau de hiperbolă.

Spațiu

Se dau două plane P_1 și P_2 și pe ele câte un punct A_1 și A_2. Se cere locul centrelor cuadricelor tangente la cele două plane P_1 și P_2 în punctele A_1 și A_2 și avînd punctul A_1 ca ombilic.

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

I

(Primul examen).

Se dă în planul orizontal un patrat COST, avînd laturile lui de lungimea l. Se definesc două conuri, în proecțiune orizontală: unul cu vîrful în S și baza un cerc cu centrul O și raza r; altul cu vîrful în T și baza un cerc cu centrul C și raza tot r. Cota punctului S d'asupra planului orizontal de proecțiune este H. ear cota punctului T este $h=\frac{1}{2}$H.

Se cere: 1) Să se găsească și să se discute relațiunea între l și r pentru ca curba de intersecțiune a celor două conuri să prezinte sau nu ramuri infinite.

2) Să se găsească și să se discute tot relațiunea între l și r, pentru ca să se poată determina, prin metoda generală cunoscută, punctul cel mai sus și cel mai jos, al curbei de intersecție.

3) Să se determine care este linia de verificare a punctelor duble aparente ale intersecțiunei, în proecțiune orizontală.

II

(Al doilea examen)

1. Curba de umbră a elicoidului strîmb ori-care, în proecțiune orizontală, razele luminoase fiind paralele cu o direcție dată. Să se discute

forma curbei, în cazurile cînd parametrul de umbră Z este *mai mic* și cînd este egal cu parametrul de tangență p.

2. *Perspectivă* (Proecțiune conică). Un plan fiind determinat prin trei puncte oare-care, se cere:

a) Să se figureze linia de fugire și urma geometrală a planului;

b) Să se găsească intersecția acestui plan cu o dreaptă oare-care.

CALCULUL DIFERENȚIAL

1. Să se determine maximul și minimul funcțiunei:

$$f(x,y)=2x^3-y^3-3x^2y+12y+1.$$

2. Să se calculeze planul osculator al helicei circulare:

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=k\theta,$$

și să se probeze că acest plan este tangent la suprafața: $z=k\,arctg\frac{y}{x}$, în fie-care punct al helicei.

CALCULUL INTEGRAL

1. Să se găsească ecuațiunea generală a suprafețelor, care se bucură de proprietatea că planul tangent dus la una din aceste suprafețe într'un punct M, întîlnește axa $0z$ într'un punct P a cărui distanță de planul xy este egală cu de două ori distanța punctului M de acelaș plan. Să se determine funcțiunea arbitrară ast-fel ca suprafața să fie de revoluție în jurul lui $0z$.

2. Să se determine volumul născut din învîrtirea în jurul axei $0x$ a suprafeței al cărui centru este format din elipsa:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ din parabola: $y^2=\frac{3b^2}{2a}x$ și din axa de revoluție.

EXEMENUL DE LICENȚĂ

(Sesiunea Ianuarie 1899)

GEOMETRIE ANALITICĂ

Se dă un paraboloid hiperbolic și se consideră locul normalelor la această suprafață în lungul unei generatrice. Se știe că această suprafață este iarăși un paraboloid hiperbolic. Se cere să se determine linia de strictiune a acestui paraboloid hiperbolic, relativă la generatricea considerată și locul acestei linii cînd trecem de la o generatrice la alta, din același sistem, a primului paraboloid.

ANALIZĂ

1) Să se determine liniile asemptotice ale suprafeței: $z^2(x^2+y^2)=a^4$.

2) Se consideră două semicirconferințe ACB și acb, avînd centrul lor comun în origine și drept raze respective R și r ($1<R<2$, $r<1$); cea dintăiu semicirconferință este situată d'asupra axului $0x$ (axa reală), ear cea de a doua dedesuptul acestei axe, se cere să se calculeze integrala:

$$\int \frac{cotg\ i\pi z}{z^2+1}dz,$$

cînd z descrie conturul $A\,acb\,BCA$.

MECANICĂ

1) Se consideră un plan fix P, în acest plan un cerc cu centrul O și pe circonferința lui un punct A: punctul A și cercul O sînt presupuse fixe. Un plan mobil P′ se mișcă pe planul P în modul următor: O dreaptă BB′ fixă în planul P′, trece în tot timpul mișcării prin punctul A, pe cînd unul din punctele sale B′ fix, descrie circonferința O. Se cere *baza* și *ruleta*.

2) Să se găsească figura de echilibru a unui fir flexibil și inextensibil, fără greutate, traversat de un curent și supus acțiunei polului unui magnet.

Se presupune această acțiune învers proporțională cu patratul razei vectore, direct proporțională cu sinusul unghiului razei vectoare cu elementul de fir, și perpendiculară atît pe direcția acestui element cît și pe a razei vectoare dusă la pol.

EXAMENUL PENTRU BURSELE FACULTĂȚII

(Primul examen)

1. Să se studieze în mod elementar, variațiunea expresiunei:

$$y=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x-2},$$

cînd x variază de la $-\infty$ la $+\infty$; să se deducă valorile lui x pentru care y rămîne coprins între 0 și 2.

2. Se dă un triunghiu ABC, dreptunghiu în A. Pe laturile triunghiului ca diametre se descriu cîte o jumătate de circonferință, situate de aceiași parte a ipotensei și trecînd prin A. Să se arate că suma suprafețelor curbilinii, mărginite respectiv de semicirconferințele descrise pe AC și AB și de circonferința descrisă pe ipotenusă, este echivalentă cu suprafața triunghiului dat.

(Al doilea examen)

1) Să se studieze variațiunea funcțiunei:

$$y=x+\frac{1}{2}arc\,tg\,x+\mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}$$

2) Se dau două drepte fixe și un punct fix în plan, prin care se duce o dreaptă variabilă, care formează cu cele dintăiu două un triunghiu. Se cere locul centrelor cercurilor circumscrise acestui triunghiu, cînd dreapta variabilă se învîrtește în jurul punctului dat.

Notă. Numărul burselor pentru care s'a ținut aceste examene a fost de trei: două pentru științele fizice și una pentru matematici. La primul examen a reușit D-nii *Balaban* și *Anastase*, ear pentru cea de a treia bursă s'a ținut un nou examen la care au reușit, aproape egali, D-nii *C. Popescu* și *C. Zaharia* între care s'a împărțit bursa.

Această problemă poate fi enunțată, în mod general, ast-fel:

Fie P un polinom de un grad m în raport cu o literă x, P_a rezultatul obținut cînd se înlocuește litera x cu litera a; fie P_1 cîtul divizinnei lui $P-P_a$ prin $x-a$. Operînd asupra polinomului P_1 în acelaș mod ca asupra polinomului P, vom obține un nou polinom P_2 și așa mai departe. Să se calculeze polinoamele P_1, P_2 . . . . P_m, și să se arate că polinomul dat poate fi pus sub forma:

$$P = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_m(x-a)^m,$$

A_0, A_1 . . . A_m fiind niște coificente independenți de x.

1. Partea a doua a acestei chestiuni rezultă imediat, căci avem:

$$(1)\quad \begin{cases} P = P_a + P_1(x-a) \\ P_1 = P_{1,a} + P_2(x-a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n = P_{n,a} + P_{n+1}(x-a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{m-1} = P_{m-1,a} + P_m(x-a), \end{cases}$$

multiplicînd aceste relațiuni succesiv prin: 1, $x-a$, $(x-a)^2 \ldots (x-a)^{m-1}$ și adunînd, polinoamele P_1, P_2 . . . P_{m-1} se reduc și rămîne:

$$(2)\quad P = P_a + P_{1,a}(x-a) + P_{2,a}(x-a)^2 + \ldots + P_m(x-a)^m,$$

deci: $A_0 = P_a$, $A_1 = P_{1,a} \ldots . A_m = P_m$,

rezultate independente de x, căci polinoamele P_a, $P_{1,a} \ldots$ nu conțin litera x: ear polinomul P_m este de gradul 0 în raport cu x, căci gradul polinoamelor P descresce succesiv cu cîte o unitate.

2. Pentru a calcula polinoamele P_1, $P_2 \ldots$, precum și valorile pe care le eau aceste expresiuni cînd se înlocuește litera x cu litera a, observăm că putem scrie:

$$P = \sum_{n=o}^{n=m} B_n x^n$$

$$P_a = \Sigma B_n a^n$$

ear: $$P - P_a = \sum_{n=o}^{n=m} B_n(x^n - a^n).$$

deci: $$P_1 = \sum_{n=1}^{n=m} B_n(x^{n-1} + a x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}),$$

sau:

$$(3)\quad P_1 = B_1 + B_2(x+a) + B_3(x^2+ax+a^2) + \ldots B_m(x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-1})$$
$$= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}$$

unde:

$$(4)\quad \begin{cases} C_1 = B_1 + B_2 a + B_3 a^2 + \ldots + B_m a^{m-1} \\ C_2 = B_2 + B_3 a + B_4 a^2 + \ldots + B_m a^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = B_n + B_{n+1} a + \ldots B_m a^{m-n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_m = B_m. \end{cases}$$

Pornind de la polinomul P_1 și operînd în acelaș mod, găsim:

$$(5)\quad P_2 = D_2 + D_3 x + \ldots + D_m x^{m-2}$$

unde:

$$(6)\quad \begin{cases} D_2 = C_2 + C_3 a + \ldots + C_m a^{m-2} \\ D_3 = C_3 + C_4 a + \ldots + C_m a^{m-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_n = C_n + C_{n+1} a + \ldots + C_m a^{m-n} \\ \ldots\ldots \\ D_m = C_m. \end{cases}$$

In mod analog vom găsi:

$$(7)\quad P_3 = E_3 + E_4 x + \ldots + E_m x^{m-3},$$

unde:

$$(8)\quad \begin{cases} E_3 = D_3 + D_4 a + \ldots + D_m a^{m-3} \\ E_4 = D_4 + D_5 a + \ldots + D_m a^{m-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m = D_m. \end{cases}$$

Din aproape în aproape vom deduce că avem în general:

$$(9)\quad P_i = H_i + H_{i+1} x + \ldots + H_m x^{m-i} \qquad (i<m)$$

unde:

$$(10)\quad \begin{cases} H_i = G_i + G_{i+1} a + \ldots + G_m a^{m-i} \\ H_{i+1} = G_{i+1} + G_{i+1} a + \ldots G_m a^{m-i-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_m = G_m. \end{cases}$$

De aci se vede că un polinom oare-care P_i este de gradul $m-i$, ear coificenții săi se pot calcula imediat, prin formule analoage cu (4), (6), (8), (10) în funcțiune de coificenții polinomului precedent P_{i-1}. Rămîne să calculăm acești coificenți în funcțiune de coificenții dați ai primului polinom: $B_0, B_1 \ldots B_m$.

Inlocuind în (6) coificenții C prin valorile lor date de formulele (4), și ordonînd după puterile lui a, avem:

$$(11)\begin{cases} D_2 = B_2 + 2B_3a + 3B_4a^2 + \ldots + (m-1)B_m a^{m-2} \\ D_3 = B_3 + 2B_4a + 3B_5a^2 + \ldots + (m-2)B_m a^{m-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_n = B_n + 2B_{n+1}a + 3B_{n+2}a^2 + \ldots + (m-n+1)B_m a^{m-n} \\ \ldots\ldots \\ D_m = B_m. \end{cases}$$

Substituind aceste valori ale lui $D_2, D_3 \ldots$ în (8) avem:

$$(12)\begin{cases} E_3 = B_3 + 3B_4a + 6B_5a^2 + \ldots + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}B_m a^{m-3} \\ E_4 = B_4 + 3B_5a + 6B_6a^2 + \ldots + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2}B_m a^{m-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n = B_n + 3B_{n+1}a + \ldots\ldots + \dfrac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}B_m a^{m-n} \\ \ldots\ldots \\ E_m = B_m. \end{cases}$$

Din cele ce preced, legea de formațiune a coificenților diferitelor polinoame $P_1, P_2 \ldots$, în funcțiune de coificenți polinomului dat P, apare imediat; ast-fel în polinomul P_2 un coificent oare-care D_n este un polinom de gradul $m-n$, în raport cu litera a, ai cărui coificenți sînt: $B_n, B_{n+1}, B_{n+2} \ldots B_m$ multiplicați respectiv cu șirul numerilor naturale: $1, 2, 3 \ldots m-n+1$. In polinomul P_3, un coificent oare-care E_n este de aceiaș

formă ca și D_n, cu deosibire că multiplicatorii coificenților B în loc să fie numerile: 1, 2, 3 . . . $m-1$, sînt numerile: 1, 3, 6, 10 . . . . $\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}$; adică numerile din coloana a doua a triunghiului lui Pascal: prin urmare sîntem conduși a scrie, prin analogie, pentru coificenții unui polinom oare-care P_i:

$$(13)\begin{cases} H_i = B_i + C_i^{i-1} B_{i+1} a + C_{i+1}^{i-1} B_{i+2} a^2 + \ldots + C_{m-1}^{i-1} B_m a^{m-i} \\ H_{i+1} = B_{i+1} + C_i^{i-1} B_{i+2} a + C_{i+1}^{i-1} B_{i+2} a^2 + \ldots + C_{m+2}^{i-1} B_m a^{m-i-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{i+n} = B_{i+n} + C_i^{i-1} B_{i+n+1} a + \ldots + C_{m-n-1}^{i-1} B_m a^{m-i-n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_m = B_m, \end{cases}$$

unde: C_n^{i-1} reprezintă numerile din coloana $i-1$ a triunghiului lui *Pascal.*

Pentru a justifica că formulele (13) sînt generale să admitem că ele sînt adevărate pentru o valoare oare-care a lui i și să arătăm că ele sînt adevărate și pentru valoarea imediat superioară. Fie deci:

$$(14) \quad P_{i+1} = K_{i+1} + K_{i+2} x + K_{i+3} x^2 + \ldots + K_m x^{m-i-1}.$$

unde în baza formulelor (10):

$$(15)\begin{cases} K_{i+1} = H_{i+1} + H_{i+2} a + \ldots + H_m a^{m-i-1} \\ K_{i+2} = H_{i+2} + H_{i+3} a + \ldots + H_m a^{m-i-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_{i+n} = H_{i+n} + H_{i+n+1} a + \ldots + H_m a^{m-i-n} \\ \ldots\ldots \\ K_m = H_m. \end{cases}$$

Inlocuind în aceste relațiunii coificienții H prin valorile lor date de (13), și ordonînd după puterile lui a, avem:

$$
(16)\quad
\begin{cases}
K_{i+1}=B_{i+1}+\left(1+C_i^{i-1}\right)B_{i+2}a+\left(1+C_i^{i-1}+C_{i+1}^{i-1}\right)B_{i+3}a^2+\ldots \\
\qquad +\left(1+C_i^{i-1}+C_{i+1}^{i-1}+\ldots+C_{m-2}^{i-1}\right)B_m a^{m-i-1} \\
K_{i+2}=B_{i+2}+\left(1+C_i^{i-1}\right)B_{i+3}a+\ldots \\
\qquad +\left(1+C_i^{i-1}+\ldots+C_{m-3}^{i-1}\right)B_m a^{m-i-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_{i+n+1}=B_{i+n+1}+\left(1+C_i^{i-1}\right)B_{i+n+2}a \\
\qquad +\left(1+C_i^{i-1}+C_{i+1}^{i-1}\right)B_{i+n+3}a^2+\ldots \\
\qquad +\left(1+C_i^{i-1}+C_{i+1}^{i-1}+\ldots+C_{m-n-1}^{i-1}\right)B_m a^{m-i-p} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_m=B_m,
\end{cases}
$$

însă:

$$
\begin{aligned}
&1+C_i^{i-1}=C_{i+1}^{i} \\
&1+C_i^{i-1}+C_{i+1}^{i-1}=C_{i+2}^{i} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&1+C_i^{i-1}+C_{i+1}^{i-1}+\ldots+C_{m-n-1}^{i-1}=C_{m-n}^{i},
\end{aligned}
$$

și formulele (16) devin:

$$
\begin{aligned}
K_{i+1}&=B_{i+1}+C_{i+1}^{i}B_{i+2}a+C_{i+2}^{i}B_{i+3}a^2+\ldots \\
&\qquad +C_{m-1}^{i}B_m a^{m-i-n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_{i+n+1}&=B_{i+n+1}C_{i+1}^{i}B_{i+n+2}a+C_{i+2}^{i}B_{i+n+3}a^2+\ldots \\
&\qquad +C_{m-n}^{i}B_m a^{m-i-n} \\
&\ldots\ldots \\
K_m&=B_m,
\end{aligned}
$$

formule care nu diferă de (13) de cît prin aceia că i este înlocuit prin $i+1$, prin urmare legea de formație a coificenților diferitelor polinoame P_i, este generală.

3. Am văzut că coificenții polinomului P, desvoltat după puterile lui $(x-a)$ sînt: P_a, $P_{1,a}$, $P_{2,a}$, .., $P_{m,a}$, avînd expresiunea generală a polinoamelor P_i vom putea calcula ușor valorile acestor coificenți. Avem:

$$
\begin{aligned}
P_a &=B_0+B_1 a,+B_2 a^2+\ldots+B_m a^m \\
P_{1,a}&=C_1+C_2 a+C_3 a^2+\ldots+C_m a^{m-2},
\end{aligned}
$$

sau înlocuind coificenții C prin valorile lor date de formulele (4) și ordonînd după puterile lui a avem:

$$P_{1,a}=B_1+2B_2a+3B_3a^2+\ldots+mB_ma^{m-1}.$$

In acelaș mod avem:

$$P_{2,a}=D_2+D_3a+D_4a^2+\ldots+D_ma^{m-2},$$

sau în baza formulelor (11):

$$P_{2,a}=B_2+3B_3a+6B_4a^2+\ldots+\frac{m(m-1)}{2}B_ma^{m-2}.$$

In mod general:

$$P_{i,a}=H_i+H_{i+1}a+H_{i+2}a^2+\ldots+H_ma^{m-i},$$

sau în baza relațiunelor (13):

$$P_{i,a}=B_i+C^i_{i+1}B_{i+1}a+C^i_{i+2}B_{i+2}a^2+\ldots+C^i_mB_ma^{m-i}.$$

Relațiunea aceasta ne permite a calcula valoarea unui coificent oare-care din desvoltarea lui P; pentru valoarea ultimului coificent avem:

$$P_{m,a}=B_m.$$

C. Țițirigă; G. G. Urechiă.

Notă. Demonstrațiile D-lor: *C. Țițirigă* și *G. G. Urechiă* diferă puțin de redigearea precedentă. In demonstrațiunea D-lui *Țițirigă*, pentru determinarea coificenților se introduce noțiunea de derivată; ear D-l *Urechiă* în demonstrația d-sale, consideră mai întâiu un polinom de formă particulară $P=x^m$ și în urmă arată că cele stabilite pentru acest caz se aplică și în cazul general, cînd P este un polinom oare-care. Din cauza lipsei de spațiu, și pentru a prescurta expunerea, am reunit cele două demonstrațiunii, fără a mai introduce noțiunea de derivată și luînd de odată cazul general. A.G.I.

PROBLEME REZOLVITE

Problema 306. *Să se calculeze valoarea determinantului:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \\ \alpha^6 & \beta^6 & \gamma^6 & \delta^6 \end{vmatrix}$$

(A. G. Ioachimescu)

Soluție dată de D-nii: *N. G. Muzicescu* (Elev Șc. de P. și Ș.); *L. Herman* (ib.); *E. Nițescu* (Elev liceul Național, Iași); *A. J. Pinchis* (ib); *G. V. Stănescu* (Student, fac. de Științe, București; *C. Vintilă* (ib); *G. G. Urechiă* (Șc. Sp. de Art. și Geniu); *V. Vintilă* (Șc. de oficeri).

Scăzînd elementele ultimei coloane succesiv din elementele coloanei întâiu a doua și a treia, și punînd în factor comun pe: $\alpha-\delta$, $\beta-\delta$, $\gamma-\delta$, avem:

$$\Delta=(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2+\alpha\delta+\delta^2 & \beta^2+\beta\delta+\delta^2 \\ \alpha^5+\alpha^4\delta+..+\delta^5 & \beta^5+\beta^4\delta+..+\delta^5 \\ 1 & \\ \gamma^2+\gamma\delta+\delta^2 & \\ \gamma^5+\gamma^4\delta+..+\delta^5 & \end{vmatrix}.$$

Scăzînd din nou elementele ultimei coloane, din elementele coloanei întâiu și a doua, și punînd în factor pe $\alpha-\gamma$, $\beta-\gamma$, avem:

$$\Delta=-(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} \alpha+\gamma+\delta & \beta+\gamma+\delta \\ A & B \end{vmatrix},$$

unde:

$$A=\alpha^4+\alpha^3\gamma+\alpha^2\gamma^2+\alpha\gamma^3+\gamma^4+\delta(\alpha^3+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\gamma^3)+\delta^2(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+\delta^3(\alpha+\gamma)+\delta^4,$$

$$B=\beta^4+\beta^3\gamma+\beta^2\gamma^2+\beta\gamma^3+\gamma^4+\delta(\beta^3+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^3)+\delta^2(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)+\delta^3(\beta+\gamma)+\delta^4.$$

Insemnînd cu Δ_1 valoarea determinantului, care a mai rămas de calcutat, avem:

$$\Delta_1=B\alpha-A\beta+(\gamma+\delta)(B-A)=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(B-A)+A\alpha-B\beta,$$

însă $B-A$ și $A\alpha-B\beta$ sînt divizibile prin $\alpha-\beta$ și avem:

$$\frac{B-A}{\beta-\alpha}=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3+\gamma(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\gamma^2(\alpha+\beta)+\gamma^3+\delta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\gamma\delta(\alpha+\beta)+\delta\gamma^2+\delta^2(\alpha+\beta)+\delta^2\gamma+\delta^3$$

$$\frac{A\alpha-B\beta}{\alpha-\beta}=\alpha^5+\alpha^4\beta+..+\beta^4+\gamma(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)+...$$

substituind și făcînd calculele găsim:

$$\Delta=(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)[\Sigma\alpha^3\beta+\Sigma\alpha^2\beta^2+2\Sigma\alpha^2\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma\delta].$$

* **Problema 311.** *Să se găsească adevărata valoare a expresiunei:*

$$\frac{y^2+5xy+(x-1)^2}{z^2-2xz+x^2-4}$$

pentru $x=1$, $y=0$, $z=-1$; *știind că* x, y, z *sînt legați prin relațiile:*

$$z^3-y^3+x^2(z-y)+x^3-(z+y)=0$$
$$z^3-2y^3+x^2(z-2y)+1-(z+2y)=0$$

(A. G. Ioachimescu)

Soluție dată de D-nii *N. G. Alexandrescu* (El. Șc. de P. și Ș.); *C. Grigorescu* (Student, București); *L. Herman* (Șc. de P. și Ș.); *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicu-Vîlcei); *V. Hâlmu* (St. Buc.); *C. N. Georgescu.*

Fie u valoarea expresiunei date, pentru $x=1$, $y=0$, $z=-1$, avem:

$$u=\frac{0}{0};$$

pentru a ridica această nedeterminare să căutăm a pune în evidență la numărător și numitor factorul care introduce nedeterminarea s. ex. pe $x-1$ pe y sau pe $z+1$.

Expresiunea dată poate fi scrisă:

$$(1)\qquad u=\frac{y^2+5xy+(x-1)^2}{z^2-2xz+x^2-4}=\frac{y(y+5x)+(x-1)(x-1)}{(z+1)(z-1-2x)+(x-1)(x+3)}$$

Dacă între relațiunele de condiție eliminăm succesiv pe z și pe y, eliminare ce se poate face foarte ușor, scăzînd mai întâiu cele două relațiuni una din alta și după acea scăzînd după ce am multiplicat prima cu 2, relațiunele de condiție devin:

$$(2)\qquad y^3+y(x^2+1)+x^3-1=0$$
$$(3)\qquad z^3+z(x^2-1)+2x^3-1=0$$

sau:
$$(3')\qquad z^3+1+(z+1)(x^2-1)+2x^3-x^2-1=0.$$

Din (2) și (3') deducem:

$$y=-(x-1)\frac{x^2+x+1}{y^2+x^2+1}$$

$$z+1=-(x-1)\frac{2x^2+x+1}{z^2-z+1+x^2-1}$$

substituind aceste valori în (1) și suprimînd factorul comun $x-1$, care introduce nedeterminarea, avem:

$$u=\frac{x-1-\dfrac{(x^2+x+1)(y+5x)}{y^2+x^2+1}}{x+3-\dfrac{(2x^2+x+1)(z-1-2x)}{z^2-z+x^2}},$$

făcînd: $x=1$, $y=0$, $z=-1$ găsim:

$$u=-\frac{45}{56}.$$

Notă. Asupra metodei generale pentru determinarea adevăratei valori a expresiunelor de forma precedentă, a se vedea: *Gazeta Matematică*, An. III pag. 125.

* **Problema 323.** *Un comerciant de lemne de foc cumpără de la un pădurar, care avea 300 stînjeni, în o lună 55 stînjeni de lemne cu 44 lei stînjenul și anunță pe pădurar că luna viitoare îi va lua toate lemnele pe care le va avea. În luna viitoare însă prețul lemnelor s'a urcat la 50 lei stînjenul, și comerciantul, le-a cumpărat pe acest preț. După prima vînzare însă pădurarul observă că toate lemnele erau tăiate cu două palme mai lungi și spre a compensa sporul de lungime, el pune și refacе stînjenii dîndu-le o palmă mai puțin la lățime și o palmă la înălțime. Refacerea stînjenilor la costat însă 1 leu de stînjenul refăcut. Comerciantul admițînd modul de compensare propus de pădurar, se întreabă care din cei doi a cîștigat și care a perdut, și cît anume.*

(I. Ionescu)

Soluție dată de D-nii: *C. G. Nițescu* și *A. J. Picnhis* (Elevi Lic. Naț. Iași); *Corneliu P. Jonescu* și *Victor Jonescu* (Elevi Lic. Galați) și *Al. Oprescu.*

La prima vînzare pădurarul vinde în loc de stînjini de $8^3=512$ palme cubice, stînjeni de $(8+2)\times 8\times 8=640$ p. c.; așa că la fie-care stînjen vîndut el perde $640-512=128$ p.c. și prin urmare el dă în total comerciantului $128\times 55=7040$ p.c.$=13\frac{3}{4}$ stînjeni reali.

După prima vînzare îi rămîne pădurarului $300-55=245$ stînjini de 640 p. c., pe care el îi prefacе în stînjini de $(8+2)(8-1)(8-1)=490$ p. c.: cîștigînd ast-fel la fie-care stînjen $640-490=150$ p. c. și prin urmare în total

$$150\times245=36750 \text{ p. c.} = \frac{36750}{490} = 75$$

stînjeni refăcuți. Prin urmare numărul total al stînjenilor refăcuți este $245+75=320$, așa că suma plătită pentru refacere este $320\times1=320$ lei.

La a doua vînzare pădurarul vinde 320 stînjini de cîte 490 p. c., cîștigînd deci la fie-care stînjen $512-490=22$ p. c. și prin urmare în total $320\times22=7040$ p. c. $=13\frac{3}{4}$ stînjini reali. Așa dar acum pădurarul dă comerciantului mai puțin aceiași cantitate pe care i-o dăduse mai mult la prima vînzare. S'ar părea deci că nici unul nu pierde nici cîștigă. Insă de la prima vînzare la a doua costul stînjenului s'a urcat cu $5044=6$ lei, așa că comerciantul plătind la vînzarea a doua ce luase în plus la prima vînzare el perde 6 lei de stînjen, și deci în total pierde $6\times13\frac{3}{4}=82{,}50$ lei. Această sumă este deci cîștigată de pădurar, dar cum el a dat 320 lei pentru refacere, reese că el perde numai $320-82{,}50=237{,}50$ l.

In definitiv și pădurarul și comerciantul perde, și suma perderilor lor egalează plata refacerei stînjenilor.

* **Problema 329.** *Să se simplifice expresiunea:*

$$\frac{[(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^4+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^4][\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}]}{[(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2][x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}-3\sqrt{xyz}]}$$

(N. G. Muzicescu).

Soluție dată de D-nii: *N. G. Alexandrescu,* (El. Școala de Pod. și Șosele); *V. V. Cambureanu,* (ib.); *L. Herman,* (ib.); *J. Wittner,* (ib.); *C. Grigorescu,* (Student, București); *A. A. Makarovici,* (El. lic. National, Iași); *Emil Nițescu,* (ib.); *A. J. Pinchis,* (ib.); *G. C. Măinescu,* (Lic. Carol I, Craiova); *J. Nicolaescu,* (ib.)

Să însnmnăm cu u valoarea expresiunei date. M numărătorul și N numitorul, și fie:

$\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$, $\sqrt{z}=c$, avem:

$$M=[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4](a+b-c)$$

$$N=[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2](a^3+b^3+c^3-3abc).$$

Să punem: $a-b=\alpha$, $b-c=\beta$, $c-a=\gamma$.

Avem: (1) $\alpha+\beta+\gamma=o$,

de unde: (2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

(3) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)=4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)$

căci dublele, produse, din membrul al doilea se anulează, în virtutea relației (1).

Din (3) deducem:

$$(4)\quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2.$$

Pe de alta parte:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, (identitate cunoscută).

or: $$(5)\quad a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}=-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma).$$

Deci: $$M=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2(a+b-c)$$
$$N=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2(a+b-c),$$

ear: $$n=\frac{M}{N}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

* **Problema 335.** *Se dă un segment de dreaptă AB. Pe o secantă variabilă, ce pleacă din A, se ia un punct M așa că AM să fie într'un raport constant K cu distanța punctului B la secantă. Se cere locul punctului M.* (J. Wittner).

Soluție dată de D-nii *N. G. Muzicescu, V. V. Cambureanu* și *L. Hermann,* (Elevi An. Prep. Șc. de Pod. și Șosele); *C. Țițirigă,* (Șc. Specială de Art. și Geniu); *N. G. Alexandrescu,* (Bîrlad); *E. G. Nițescu* și *A. T. Pinchis,* (Elevi Lc. Iași); *I. Niculaescu,* (Lc. Craiova) și *V. Vintilă* (Școala de Oficeri).

Fie D punctul locului căutat care corespunde cazului cînd secanta e perpendiculară pe AB. Pentru acest caz avem în locul lui BP chiar pe BA. Ducem dreapta DM. Triunghiurile ABP, DAM sînt asemenea de care-ce au unghiurile din B și A egale ca avînd laturile perpendiculare, și laturile ce coprind acest unghiu proporționale, căci prin construcțiune am luat:

$$\frac{AM}{BP}=\frac{AD}{AB}=K.$$

de unde: $$\frac{BA}{BP}=\frac{AD}{AM}.$$

Triunghiurile fiind asemenea unghiul din M e egal cu unghiul din P adică drept. Locul luĭ M este deci circonferința de diametru AD.

Dacă purtăm lungimile în ambele sensuri ale secantei, plecînd din A, găsim că locul lui M' este o circonferență egală cu precedentă și tangentă în A aceleia.

* **Problema 338.** *Să se arate că dacă suma a două numere întregi diferă de produsul lor cu o unitate, diferența diferă de cîtul lor în general cu o unitate, și că există un singur caz de excepție.*

(I. Ionescu)

Soluție dată de D-nii: *J. Wittner și N. G. Muzicescu* (Elevi Șc. Pod. și Șoș.).

Fie x și y două numere întregi ce satisfac condițiunei din enunciu. Vom avea deci una sau alta din egalitățile:

$$x+y-xy=1 \quad , \qquad xy-(x+y)=1.$$

Rezolvînd aceste ecuațiuni găsim:

$$(1)\quad (x-1)(y-1)=0 \quad , \qquad (2)\quad x=\frac{y+1}{y-1}.$$

Din prima ecuațiune deducem că unul din cele două numere trebue să fie egal cu unitatea, și că cel-l'alt poate fi ori-ce număr: fie deci $x=1$, $y=n$. Avem în acest caz:

$$y-x=n-1, \qquad \frac{y}{x}=\frac{n}{1}=n=(y-x)+1.$$

In acest caz dar vedem deci că cîtul diferă cu o unitate de diferența acelor numere.

Din ecuațiunea a doua deducem că pentru ca x să fie întreg, trebue ca $(y-1)$ să dividă pe $(y+1)$ și prin urmare și pe $(y+1)-(y-1)=2$. Așa dar nu putem lua de cît sau $y=1$, ca și la cazul (1), sau $y=2$ în care caz $x=3$. In acest caz însă avem:

$$x-y=3-2=1, \qquad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}, \qquad \frac{x}{y}-(x-y)=\frac{1}{2}.$$

Deci în cazul acesta diferența diferă de cît cu $\frac{1}{2}$, pe cînd în toate cele-l'alte cazuri diferența aceasta e 1, ca și diferența dintre sumă și produs.

Au mai rezolvit această problemă și D-nii *N. Alexandrescu, I. Nicolaescu, G. C. Măinescu, A. I. Pinchis* și *C. N. Georgescu.*

* **Problema 343.** *Să se arate că expresia:*

$$17^{219}-2.3^{219}.91^{73}+1$$

este divizată prin 73. **(N. G. Muzicescu)**

Soluție dată de D-nii: *N. G. Alexandrescu* (El. Sc. de P. și Ș); *V. V. Cambureanu* (ib); *J. Wittner* (ib); *J. Nicolaescu* (Lic. Carol I, Craiova).

Fie N valoarea expresiunei date, observînd că: $219=3\times 73$, putem scrie:

$$N=(17^3)^{73}-2(3^3.91)^{73}+1,$$

însă după teorema lui *Fermat:*

$$17^3[(17^3)^{72}-1]+17^3=M73+17^3;$$

de asemenea: $(3^3.91)^{73}=M73+3^3.91,$

deci: $N=M73+17^3-2.3^3.91+1=M73,$

căci: $17^3-2.3^3.91+1=0.$ C.C.T.D.

Soluție dată de D-nii: *St. N. Corbeanu* (Student, București); *C. N. Georgescu* (Lic. Ploești); *C. Nițescu* (Lic. Național, Iași); *A. J. Pinchis* (ib).

Descompunînd pe 219 ca mai sus și observînd că:

$$17^3=4913=M73+22$$
$$3.^391=2457=M73+48,$$

vom avea: $N=M73+22^{73}-.48^{73}+1.$

Insă: $22^{73}=22(22^2)^{36}=M73+22(46)^{36},$

$$(46)^{36}=(46^2)^{18}=M73+1,$$

deci: $22^{73}=M73+22$

In acelaș mod: $48^{73}=48.(48^2)^{36}=M73+48.(41^2)^{18}$

$$(41^2)^{18}=M73+2^{18}=M73+(2^9)^2=M73+1.$$

deci: $48^{73}=M73+48;$

ear $N=M73+22-2\times 48+1=M73.$

C.C.T.D.

Problema de mai sus poate fi dedusă ca un caz particular al propoziţiunei următoare:

Fie n un număr prim, A şi B două numere întregi oare-care nedivizibile prin n, r şi r' restul diviziunei lor prin n; în fine x şi y două numere întregi oare-care: zic că restul diviziunei expresii:

$$xA^n + yB^n,$$

prin n, este acelaş ca restul diviziunei lui $xr + yr'$ prin n.

In adevăr expresia dată poate fi scrisă:

$$xA^n + yB^n = xA(A^{n-1} - 1) + xA + yB(B^{n-1} - 1) + yB,$$

însă după teoremă lui *Fermat*, $A^{n-1} - 1$ şi $B^{n-1} - 1$ sînt divizibile prin n, rezultă evident că restul diviziunei numărului dat prin n, este acelaş ca şi restul diviziunei lui $xA + yB$ prin n, care este acelaş ca şi restul diviziunei lui $xr + yr'$ prin n, căci avem prin ipoteză:

$$A = Mn + r$$
$$B = Mn + r'$$

de unde: $$xA + yB = Mn + xr + yr'.$$

De aci rezultă un mijloc foarte simplu de a construi o infinitate de expresii analoage cu cea propusă de D-l *Muzicescu*, şi divizibile cu un număr prim dat. Pentru aceasta nu avem de cît să luăm arbitrare două numere A şi B nedivizibile cu numărul prim ce am luat de asemenea arbitrar, după acea căutăm resturile diviziunei lui A şi B prin n, şi în urmă rezolvăm în numere întregi, în raport cu x, y, z, ecuaţiunea:

$$(1) \quad rx + r'y + nz = -1,$$

care exprimă că expresiunea dată mărită cu 1, este un multiplu z de n.

Dacă numerile A şi B au fost prime între ele, atunci evident că şi numerile r, r' şi n vor fi prime între ele, ear ecuaţiunea (1) va admite neapărat un sistem de soluţiuni întregi. Fie x_1, y_1 şi z_1 acest sistem, soluţia generală a ecuaţiunei (1) este:

$$x = x_1 + r'\theta - n\theta'$$
$$y = y_1 - r\theta + n\theta''$$
$$z = z_1 + r\theta' - r'\theta''$$

θ' şi θ'' fiind numere întregi arbitrare. Prin urmare A, B şi n fiind date, în condiţiunele specificate, forma generală a numerilor care mărite cu unitatea sînt divizibile cu n va fi:

$$(x_1 + r'\theta - n\theta')A^n + (y_1 - r\theta + n\theta'')B^n.$$

In cazul problemei D-lui *Muzicescu*:

$$A = 17^3 = 4913 \qquad r = 22$$
$$B = 3^3 19 = 2457 \qquad r' = 48$$
$$n = 73,$$

ecuaţiunea (1) devine:

$$22x + 48y + 73z = -1.$$

O soluţie particulară a acestei ecuaţiunii este:

$x=1 \quad y=-2 \quad z=1,$

la care corespunde expresia propusă, forma generală a expresielor analoge cu cea propusă de D-nu Muzicescu și divizibile cu 73 va fi:

$$(1+48\,\mathfrak{y}-73\,\mathfrak{y})17^{219}-(2+22\,\mathfrak{y}-73\,\mathfrak{y}')3^{219}91^{73}+1.$$

A. G. J.

* **Problema 351.** *Într'un patrulater inscriptibil, și ale cărui diagonale se taie în unghiu drept, produsul diferențelor laturilor adiacinte uneĭ diagonale, este egal cu produsul celeilalte diagonale prin excesul diametrului asupra primei diagonale.*

(C. Grigorescu).

Soluțiune dată de D-nii *C. Țițirigă* și *G. G. Urechiă,* (Școala Speciala de Art. și Geniu): *L. Hermann* și *V. V. Cambureanu,* (An. Prep. Șc. de Pod. și Șosele): *N. G. Alexandrescu,* (Bîrlad); *J. Niculaescu,* (Lc. Craiova); *E. Nițescu* și *A. Pinchis,* (Lc. din Iași); *C. Jonescu* și *V. G. Angelescu,* (Ploești).

Fie ABCD patrulaterul înscris, și R raza cercului; iar O intersecția diagonalelor

Triunghiurile ABC și ADC cari au ca înălțime BO și DO din cauză că diagonalele sînt perpendiculare după enunciu, ne dau:

$$(1)\quad AB\times BC=2R\times BO.$$
$$(2)\quad AD\times DC=2R\times DO.$$

Apoi teorema lui *Ptolemeu* ne dă:

$$(3)\quad AB\times DC+BC\times AD=AC\times BD.$$

Adunînd egalitățile (1) și (2) și scăzînd egalitatea (3) avem:

$$AB\times BC-AB\times DC+AD\times DC-BC\times AD=$$
$$2R(BO+DO)-AC\times BD,$$
$$AB(BC-DC)-AD(BC-DC)=2R\times BD-AC\times BD$$
$$(AB-AD)(CB-CD)=BD\times(2R-AC,) \qquad \textit{c. c. c. d. d.}$$

* **Problema 352.** *Să se rezolve ecuațiunea:*

$$\cos 5x=16\cos^5 x$$

Soluție dată de D-nii: *N. G. Alexandrescu* (Elev Șc. de P. și Ș.); *V. V. Cambureanu* (ib); *L. Herman* (ib); *N. G. Muzicescu* (ib); *N. G. Georgescu* (Student, București); *C. Grigorescu* (ib); *C. Vintilă* (ib); *G. Giușcă* (Șc. Sp. de Art. și Geniu); *C. Țițirigă* (ib); *G. G. Urechiă* (ib); *V. Vintilă* (Șc. de Ofițeri); *St. N. Mirea*

(Liceul Ploești); *Al. Oprescu* (ib); *J. Nicolaescu* (Liceul Craiova); *E. Nițescu* (Liceul Național, Iași); *A. J. Pinchis* (ib); *G. Oprescu* (Șc. Militară, Iași).

Avem: $cos5x = cos(3x+2x) = cos3x\,cos2x - sin3x\,sin2x$,

sau înlocuind pe $cos2x$, $cos3x$, $sin2x$, $sin3x$ prin valorile lor în funcțiune de *sinusul* și *cosinusul* arcului x, avem:

$$cos5x = (4cos^3x - 3cosx)(2cos^2x - 1) - 2sinx\,cosx(3sinx - 4sin^3x)$$
$$= cosx[(2cos^2x - 1)(4cos^2x - 3) - 2(1 - cos^2x)(4cos^2x - 1)]$$
$$= cosx(16cos^4x - 20cos^2x + 5);$$

înlocuind în ecuațiunea dată, aceasta devine:

$$cosx(16cos^4x - 20cos^2x + 5) = 16cos^5x,$$

sau $5cosx(1 - 4cos^2x) = 0$,

care dă: (1) $cosx = 0$,

(2) $cosx = \pm\frac{1}{2}$.

Cel mai mic arc al cărui *cosinus* este 0, este $\frac{\pi}{2}$, și *cosinusul* este tot egal cu zero cînd acestui arc îi adăogăm un număr oare-care de jumătate de circonferință, prin urmare toate arcele care verifică relațiunea (1) sînt date de formula:

$$(3)\quad x = K\pi + \frac{\pi}{2},$$

K fiind un număr întreg arbitrar

In acelaș mod observînd ca cele mai mici arce ale căror *cosinusuri* sînt:

$$+\frac{1}{2} \text{ sau } -\frac{1}{2} \text{ sînt: } \pm\frac{\pi}{3} \text{ și } \pm\frac{2\pi}{3},$$

toate arcele care verifică relațiunea (2) sînt date de formulele:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

și

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

Problema 359. *Să se formeze o progresiune geometrică de n*

termenĭ, așa ca suma primuluĭ termen și a raței să fie b; iar suma logaritmilor termenilor să fie maximă. Cînd termenii vor fi întregĭ?

(J. Wittner).

Soluție dată de D-niĭ **G. G. Urechiă, C. Țițirgă** și **G. Giușcă,** (Elevĭ de Sc. Sp. de Art. și Geniu; **V. V. Cambureanu, N. G. Muzicescu** și **L. Hermann,** (Elevĭ An. Prep. Șc. de Pod. și Șosele); **St. N. Corbeanu,** (Student, Bucureștĭ); **I. Niculaescu,** (Liceul Craiova); **A. I. Pinchis,** (Lc. Iași) și **N. G. Alexandrescu** (Bîrlad).

Fie progresiunea:

$$\therefore x : xy : xy^2 : xy^3 : \ldots\ldots xy^{n-1}.$$

După enunciu avem:

$$x+y=b, \log.x+\log.xy+\log.xy^2+\ldots+\log.xy^{n-1}=S(\text{Maximum}).$$

Avem însă succesiv:

$$S=\log.(x.xy.xy^2\ldots ny^{n-1})=\log.x^n y^{\frac{n(n-1)}{2}}=\log.P.$$

S va fi maximum odată cu maximum produsuluĭ P al termenilor progresieĭ geometrice. Dar suma $x+y$ rămîind constantă, acest maximum corespunde cazuluĭ cînd:

$$\frac{x}{n}=\frac{y}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{x+y}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2b}{n(n+1)}$$

Decĭ avem:

$$x=\frac{2b}{n+1};\quad y=\frac{b(n-1)}{n+1}$$

Progresia căutată e decĭ:

$$\therefore \frac{2b}{n+1} : \frac{2b^2(n-1)}{(n+1)^2} : \frac{2b^3(n-1)^2}{(n+1)^3} : \ldots\ldots\ldots$$

Pentru ca termenii să fie întregĭ, trebue maĭ întîiŭ ca x să fie întreg. Pentru aceasta trebue ca $b=\mathrm{M}(n+1)$ cînd n e par și $b=\mathrm{M}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ cînd n e impar. In acest caz toți termenii sînt întregi căci și y e întreg, de oare-ce $(n-1)$ și $(n+1)$ au pe 2 ca factor comun cînd n e impar.

Problema e posibilă cînd b este positiv.

* **Problema 376.** *Cele trei ace ale unuĭ ceasornic sînt la*

ora 12. Să se arate că după o nouă întîlnire a acestor trei ace, avem relația:

$$N = N_1 + N_2,$$

N fiind numărul întîlnirilor secundarului cu orarul,
N_1 „ „ „ „ „ *minutarul,*
N_2 „ „ „ *minutarului* „ *orarul.*

(N. Niculescu).

Soluție dată de D-nii: *St. N. Corbeanu,* (Student, București); *N. I. Georgescu,* (ib.); *C. Grigorescu,* (ib.); *G. G. Urechia,* (Șc. Sp. de Art. și Geniu); *Petre Dumitrescu,* (ib.); *G. I. Gheorghiu,* (Șc. Mil. Iași); *G. Oprescu,* (ib.); *C. Florescu,* (Șc. Militară Craiova); *D. I. Mehedinți,* (ib.); *N. Moroianu,* (ib.); *A. I. Pinchis,* (Lic. Național, Iași); *C. N. Georgescu,* (Lic. Ploești); *St. N. Mirea,* (ib.); *A. Oprescu,* (Ploești); *V. Hâlmu.*

Fie N′, N_1' N_2' numărul întîlnirilor pînă la ora 12 viitor corespunzătoare numerilor reprezentate mai sus prin N, N_1, N_2. Vom căuta să determinăm întîiu aceste numere.

1) Secundarul nu întîlnește pe orar în prima rotație a sa în jurul cadranului, ast-fel că în prima oră sînt numai 59 întîlniri, ear în celelalte 11 ore cîte 60 de întîlniri, căci secundarul întîlnește orarul la fia-care rotație cumpectă, deci:

$$N' = 60 + 12 \times 59 = 719.$$

2) La începutul fie-cărei ore secundarul și minutarul sînt totdeauna la 12. In fie-care oră ele se întîlnesc de cîte 59 de ori, căci în prima rotație făcută de secundar, la începutul fie-carei ore, nu întîlnește pe minutar, el avînd viteza mai mare: deci:

$$N_1' = 12 \times 59 = 708.$$

3) Minutarul nu întîlnește pe orar de cît de la a doua oră, deci:

$$N_2' = 11.$$

Putem proba acum că cea mai apropiată întîlnire, acelor trei ace, are loc după 12 ore.

In adevăr să presupunem că în 12 ore ele s'au întîlnit de x ori, fie atunci N, N_1, N_2 numărul întîlnirilor respective între ace, observînd că aceste întîlniri trebue să

aibă loc la intervale egale, și la ora 12 următoare fiind neaparat o întîlnire trebue să avem:

$$719 = \alpha N$$
$$708 = \alpha N_1$$
$$11 = \alpha N_2,$$

or 11 fiind un număr prim rezulta $N_2 = 1$ sau $\alpha = 1$, N_2 nu poate fi egal cu 1, căci atunci $\alpha = 11$ și 708 nu e divizibil cu 11, deci $\alpha = 1$. Prin urmare:

$$N = 719 = N',$$
$$N_1 = 708 = N_1',$$
$$N_2 = 11 = N_2'.$$

ear: $N = N_1 + N_2$.

* **Problema 377.** *Să se rezolve ecuația:*

$$[2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)x](b^2+c^2-ax)+(a^2+c^2-bx)(c^2+b^2-cx)=0.$$

(C. Țițirigă)

Soluție dată de D-nii: *N. C. Athanasiu* (Lic. Mihaiu-Bravu): *P. Dumitrescu* (Șc. Sp. de Art. și Geniu); *G. G. Urechiă* (ib): *C. Grigorescu* (Student, București); *St. Mirea* (Lic. Ploești): *Al. Oprescu* (ib); *A. I. Pinchis* (Lic. Național, Iași); *I. Lalescu.*

Observăm că cantitatea din parantesa cea mare poate fi scrisă:

$$(a^2+c^2-bx)+(b^2+c^2-ax)+(a^2+b^2-cx),$$

multiplicînd această expresiune cu: b^2+c^2-ax adăogînd ultimul termen din ecuațiunea dată și punînd factori comuni, avem:

$$(b^2+c^2-ax)[a^2+b^2+2c^2-(a+b)x]$$
$$+(a^2+b^2-cx)[a^2+b^2+2c^2-(a+b)x]=0,$$

sau: $$[a^2+b^2+2c^2-(a+b)x][a^2+2b^2+c^2-(a+c)x]=0,$$

care dă: $$x' = \frac{a^2+b^2+2c^2}{a+b},$$

$$x'' = \frac{a^2+2b^2+c^2}{a+c}.$$

Soluție dată de D-nii: *I. Nicolaescu* (Lic. Carol, Craiova): *C. Florescu, G. I. Gheorghiu, N. Sichitiu* (Șc. Militară, Craiova): *C. M. Utză* (Șc. Militară, Iași).

Ecuațiunea dată poate fi pusă sub forma:

$$(a+b)(a+c)x^2-[(a+b)(a^2+2b^2+c^2)+(a+c)(a^2+b^2+2c^2)]x$$
$$+(a^2+b^2+2c^2)(a^2+2b^2+c^2)=0.$$

sau: (1) $ABx^2-(AC+BD)x+CD=0$,

unde: $A=a+b$, $B=a+c$, $C=a^2+2b^2+c$, $D=a^2+b^2+2c^2$,

rezolvind ecuațiunea (1), avem:

$$x=\frac{AC+BD+\sqrt{(AC+BD)^2-4ABCD}}{2AB},$$

sau observînd că cantitatea de sub radical este patratul lui: AC—BD, avem:

$$x'=\frac{AC+BD-(AC-BD)}{2AB}=\frac{D}{A}=\frac{a^2+b^2+2c^2}{a+b},$$

$$x''=\frac{AC+BD+AC-BD}{2AB}=\frac{C}{B}=\frac{a^2+2b^2+c^2}{a+c}.$$

PROBLEME PROPUSE

* 408. Se consideră 4 drepte și cele 4 cercuri circumscrise triunghiurilor formate de aceste 4 drepte. Prin fie-care punct de întîlnire al acestor drepte, se duc diametrele cercurilor care trec prin acel punct. Să se arete că cele 12 diametre ast-fel obținute se întîlnesc 3 cîte 3 în 8 puncte situate pe un cerc, care trece și prin punctul comun al celor 4 cercuri considerate. (F. Dubesset.)

* 409. Să se resolve și să se construiască triunghiul în care se cunoaște o latură, înălțimea triunghiului corespunzătoare acestei laturi, și unghiul ce'l face înălțimea considerată cu bisectrița unghiului opus laturei date.

(I. Nicolaescu).

* 410. Să se calculeze laturile unui triunghiu, știind că înălțimele h_1, h_2 și h_3 ale acelui triunghiu satisfac relațiunile:

$$a\sqrt[3]{h_1}=b\sqrt[3]{h_2}=c\sqrt[3]{h_3}$$
$$h_1h_2h_3=d^3,$$

a, b, c, d fiind niște lungimii date. (N. G. Georgescu).

* 411. Din fie-care punct al unei drepte D ca centru, se descrie un cerc cortogonal unui cerc fix, avînd ca centru, un punct O. Cercul C tae treapta D în punctele M și M'. Se cere locul proecțiilor punctului M pe dreapta OM'.

(G. Țițeica).

* 412. Se dă $tg\alpha = m$, să se formeze ecuațiunea care dă pe $tg\frac{\alpha}{4} = x$, și să se arate *algebriceşte*, ca ecuațiunea formată are toate rădăcinele sale reale. Să se studieze variațiunea *fie-carei* rădăcinii cînd m variaza de la $-\infty$ la $+\infty$.

(A. G. Ioachimescu).

* 413. Să se determine a și b ast-fel ca maximul și minimul funcțiunei:

$$\frac{x^2 + ax - 5}{2x^2 - bx + 11}$$

să aibă loc pentru $x=2$ și $x=2$. (C. Zaharia).

* 414. Fie A, B, L trei puncte date pe o aceași dreaptă, să se construiască un triunghiu ABC, cunoscînd unghiul din C și știind că o transversală trecînd prin L determină segmente egale pe laturile AC și BC, ale triunghiului căutat.

(A. I. Pinchis).

415. Într'un plan se consideră o circonferință și un punct fix, să se găsească: 1) locul punctelor situate pe tangentele la circonferință la distanțe egale de punctul de tangenta corespunzător și de punctul fix; 2) învelitoarea locului precedent în cazul cînd punctul dat se mișcă pe o circonferința concentrică cu circonferința dată, sau pe o dreaptă dată. (Gr. N. Makarie).

* 416. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x + 11} = \sqrt{x^2 + 5x + 14}.$$

(I. Ionescu)

Erata. La problema 403, rîndul al treilea se va citi: $a^{12} - a^{10} - a^2 + 1$ în loc de: $a^{12} - a^{10} - a^2 - 1 = o$.

La problema 406, punctul 4 se va citi DE cu OB în loc de: DE cu BC.

Articolele și problemele însemnate cu * se referă la matematicele elementare (cursul de liceu).

1) Articolul trimes de D-l G. G. Urechiă.

2) Probleme propuse de D-nii: N. G. Alaxandrescu, St. N. Corbeanu, E. Nițescu, C. Popovici, N. Sichitiu, C. Țițirigă, G. G. Urechiă și I. Vancea.

3) Probleme rezolvite de D-nii: N. G. Alexandrescu, (302, 17, 25, 26, 28, 29, 35, 37, 38, 40, 43, 44, 45, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 70, 78, 84, 85, 86, 88, 91, 92, 95, 98, 400, 03, 05); T. V. Balș, (405); V. V. Cambureanu, (317, 26, 28, 29, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 50, 51, 53, 59, 61, 62, 63, 66); G. Constantinescu, (317, 26, 28, 37); M. Constantinescu, (399, 405); St. N. Corbeanu, (302, 40, 43, 44, 59, 62, 76, 95, 99, 402, 05); G. C. Dobrovici, (302, 17, 25, 26, 28, 36); P. Dumitrescu, (344, 62, 75, 76, 85); I. N. Drăghici, (399); C. Florescu, (375, 76, 80, 85, 93, 95, 99); D. Focșa, (385); C. M. Georgescu, (338, 43, 44, 53, 76, 80, 86); N. G. Georgescu, (344, 55, 90, 95); N. I. Georgescu, (276, 286, 94, 95, 405); G. I. Gheorghiu, (376); G. Ghimbășeanu, (385); G. Giuscă, (328, 53, 55, 59); C. Grămescu, (386); C. Grigorescu, (329, 61, 62, 73, 76, 86, 94, 95, 99, 405); V. Halmu, (366, 73, 86, 92, 403, 99, 405); L. Herman, (265, 302, 17, 26, 28, 29, 35, 40, 45, 50, 51, 53, 55, 58, 59, 73); A. Illovici, (284, 94, 362); C. P. Ionescu, (323, 61, 93, 99); Virg. Ionescu, (323); G. G. Lințes, (385, 86, 99); A. A. Makarovici, (329, 92); G. C. Măinescu, (317, 29, 38, 53); D. I. Nchedinți, (376, 93, 94, 99, 405); St. N. Mirea, (340, 44, 53, 61, 62, 63, 66, 75, 76, 80, 84, 85, 99); N. Moroianu, (376, 405); N. G. Muzicescu, (176, 302, 17, 26, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 44, 45, 59, 60, 61, 63, 70); A. C. Nestor, (385, 99); I. Nicolaescu, (302, 04, 17, 26, 28, 29, 35, 37, 38, 39, 40, 43, 45, 50, 51, 53, 54, 58, 59, 62, 66, 75, 78, 84, 85, 86); N. P. Niculescu, (317); E. Nițescu, (323, 25, 29, 35, 37, 39, 43, 45, 51, 53, 54, 63); Al. Oprescu, (323, 40, 47, 53, 61, 62, 63, 66, 75, 76, 80, 84, 85, 99); G. Oprescu, (340, 62, 66, 75, 76, 84, 85, 93, 94, 99, 405); B. Paraschivescu, (373, 82, 89, 90, 96, 402, 07); A. I. Pinchis, (302, 23, 26, 28, 29, 35, 38, 40, 43, 45, 50, 51, 53, 54, 55, 58, 59, 61, 62, 63, 66, 75, 76, 78, 84, 85, 86, 92, 93); I. Pitești eanu, (284); C. Popovici, (293, 305); A. Popescu, (388, 96, 99); I. Radovici, (399, 405); D-ra M. Rugescu, (284, 302, 41, 48); N. Sichitiu, (317, 28, 62, 95, 405); A. M. Tănăsescu, (399); C. Țițirigă, (176, 253, 84, 94, 302, 03, 08, 15, 19, 27, 31, 32, 35, 40, 41, 48, 50, 51, 54, 56, 59, 73, 82, 90, 96, 402, 05, 06, 07); I. Tutuc, (373); G. G. Urechiă, (206, 53, 75, 84, 302, 03, 05, 08, 17, 19, 26, 27, 31, 36, 40, 41, 48, 50, 51, 54, 55, 56, 59, 61, 62, 73, 75, 82, 90, 93, 95, 96, 402, 05, 06, 07); I. Vancea, (394); C. Vasilescu, (405); Chr. Vasilescu, (399); C. Vintilă, (303, 45); V. Vintilă, (302, 35, 45); Th. M. Vladimirescu, (293, 94, 305, 41); I. Wiltner, (329, 31, 37, 38, 39, 43, 44, 45); T. Lalescu, (385, 86, 88, 96, 405); C. Osiceanu, (405).

Probleme nerezolvite: 22, 106, 110, 113, 118, 127, 171, 172, 201, 249, 258, 282, 295, 318, 346, 349, 357, 364, 367, 374, 379, 387, 397, 404.

SPRE ȘTIINȚA

Soluțiunile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco: D-lui V. Cristescu, Inginer, Serviciul liniei Cernavoda-Constanța, la Cernavoda; sau D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Sub-Directorul Fabricei de Tutun, Belvedere, București; sau D-lui Bogdan Ionescu, Profesor, Strada Isvor 36, București; sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Str. Călușei 19, București sau D-lui N. Nicolescu, Inginer, Str. Mihai-Vodă 9, București.

Ele trebuc să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul Gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematici trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorie problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pscudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pînă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Anul I, II și III al Gazetei matematice *formează trei volume broșate de 288, 296 și 300 pagini și se vinde cu prețul de 10 lei fie-care volum.*

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele, schimbările de adrese și reclamațiunile trebuesc trimise D-lui *J. Ionescu, Inginer, Str. Călușei 19, București.*