X-187

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ȘI SPECIALE

PENTRU UZUL

SCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL II.

15 Septembre 1896—15 August 1897.

15 BCH 1898



BUCURESTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII

19, Strada Regală, 19.

1896

Intrat înainte
de anul 1933
Bibliotecă Universitară Iași
12 FEB. 1935

1534/1898

Soluțiunile chestiunilor propuse la concursul înscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Gimnaziul din Rîmnicul-Vîlcei.

(București, Iunie 1896).

ARITMETICA.

Dacă trei numere întregi a, b, c sînt legate între ele prin relațiunea:

$$b^2+c^2=a^2,$$

1) *Unul din numerile b, c este divizibil prin 3.*

2) *Unul din numerile b, c este divizibil prin 4.*

3) *Unul din numerile a, b, c este divizibil prin 5.*

4) *Produsul $b\times c$ este divizibil prin 12.* [1])

In demonstrațiile ce urmează, vom presupune că în egalitatea:

$$b^2+c^2=a^2 \qquad (1)$$

am suprimat din numerile a, b, c pe toți divizorii 2, 3 și 5 comuni acestor trei numere, cu alte cuvinte că am împărțit pe fiecare din numerile a, b, c prin toți factorii 2, 3 și 5 ce intră în cel mai mare comun divizor al acestor trei numere.

Zicem atunci că două oare-care din numerile a, b, c nu pot fi divizibile împreună prin nici unul din factorii 2, 3 sau 5. In adevăr, sprijinindu-ne pe teorema că: *dacă un număr oare-care împarte părțile unei sume împarte și suma*, precum și pe teorema că: *dacă un număr împarte o sumă și una din părțile ei, împarte și pe cealaltă parte*, vedem că dacă presupunem că două oare-care din numerile a, b, c ar admite ca divizor comun pe unul din factorii 2, 3 sau 5, atunci după egalitatea (1) și cel de-al treilea număr ar fi divizibil prin acest divizor, cu alte cuvinte numerile a, b, c ar admite ca divizor comun pe unul din factorii 2, 3 sau 5, ceia ce este contra ipotezei că am suprimat din a, b, c pe toți divizorii 2, 3 și 5 comuni acestor trei numere.

---

[1]) In chestiunea propusă la concurs, se cerea să se demonstreze numai că produsul $b\times c$ este divizibil prin 6 (vezi *Gazeta Matematică*, Volumul I, pag. 244). Enunciul este însă restrins, căci după cum vom demonstra mai jos, produsul $b\times c$ este divizibil în totdeauna prin 12.

Chestiunea propusă fiind destul de interesantă, i-am dat o dezvoltare mai mare. (V. C.)

1) *Unul din numerile b, c este divizibil prin 3.*

Pentru a demonstra că unul din numerile b sau c este divizibil prin 3, ne vom sprijini pe următoarele două teoreme:

Teorema 1. *Suma patratelor a două numere întregi nu e divizibilă prin 3, de cît dacă fie-care din cele două numere e divizibil prin 3.*

In adevăr, să considerăm două numere întregi oare-care A și B, și să luăm resturile împărțirei lor prin 3. Trei cazuri se pot prezenta:

α) Atît A cît și B sînt divizibili prin 3. In acest caz după o teoremă cunoscută și suma patratelor lor $A^2+B^2=S$ este divizibilă prin 3.

β) Atît A cît și B sînt primi cu 3. In acest caz atît A cît și B nu pot fi cît de forma $\mathcal{M}3\pm1$ ($\mathcal{M}$ însemnînd multiplu) și prin urmare patratele lor A^2 și B^2 vor fi fie-care de forma $\mathcal{M}3+1$, iar suma patratelor lor $S=A^2+B^2$ va fi dar de forma $\mathcal{M}3+2$ și prin urmare nedivizibilă prin 3.

γ) Unul din cele două numere, A spre exemplu, e divizibil prin 3, iar B e prim cu 3. Atunci A^2 va fi de forma $\mathcal{M}3$, iar B^2 de forma $\mathcal{M}3+1$ și suma $S=A^2+B^2$ va fi de forma $\mathcal{M}3+1$ și prin urmare nedivizibilă prin 3.

Prin urmare suma S, nu e divizibilă prin 3, de cît dacă atît A, cît și B sînt divizibili prin 3. [1])

Teorema 2. *Dacă două numere întregi sînt prime fie-care cu 3, diferența patratelor lor e divizibilă prin 3.*

In adevăr, după cum am văzut mai sus, dacă un număr nu e divizibil prin 3, el este de forma $\mathcal{M}3\pm1$, iar patratul său este de forma $\mathcal{M}3+1$. Prin urmare dacă considerăm două numere întregi A și B, prime fie-care cu 3, atunci diferența D a patratelor lor va fi de forma:

$$D=A^2-B^2=(\mathcal{M}3+1)-(\mathcal{M}'3+1)=\mathcal{M}3-\mathcal{M}'3=\mathcal{M}''3$$

adică un multiplu de 3, și prin urmare divizibilă prin 3.

Aceste două teoreme fiind demonstrate, dacă ne raportăm la egalitatea:

$$b^2+c^2=a^2$$

[1]) Această teoremă este adevărată și pentru numerile 7, 11, 19, 23, 31.

videm că a^2 și prin urmare *a este prim cu 3,* căci dacă a^2 ar fi divizibil prin 3, atunci conform teoremei 1, atît b cît și c ar fi divizibili prin 3, adică a, b, c ar admite ca divizor comun pe 3, ceia ce e imposibil, de oare-ce am suprimat din numerile a, b, c pe toți factorii 3 comuni acestor trei numere.

Zicem acum că dacă b, spre exemplu, e prim cu 3, atunci c trebue să fie divizibil prin 3, și din contra: dacă c e prim cu 3, atunci b trebue să fie divizibil prin 3. In adevăr, să presupunem, spre exemplu, că b este prim cu 3. Atunci dacă scrim egalitatea (1) sub forma:

$$a^2 - b^2 = c^2$$

videm că în membrul întăi al acestei egalități, avem diferența patratelor a două numere prime fie-care cu 3 și prin urmare conform teoremei 2, rezultă că c^2 și prin urmare c este divizibil prin 3.

In același mod vom demonstra că dacă c este prim cu 3, atunci b este divizibil prin 3.

Prin urmare, *unul din numerile b sau c este divizibil prin 3.*

2) ***Unul din numerile b sau c este divizibil prin 4.***

Pentru a demonstra că unul din numerile b sau c este divizibil prin 4, observăm că egalitatea (1) se poate scrie:

$$(b+c)^2 - 2b \times c = a^2$$

de unde:

$$b \times c = \frac{1}{2}\left[(b+c)^2 - a^2\right]$$

sau:

$$b \times c = \frac{1}{2}(b+c+a)(b+c-a). \qquad (2)$$

Insă produsul $b \times c$ este un număr întreg. Rezultă atunci din egalitatea (2) că produsul:

$$(b+c+a)(b+c-a)$$

trebue să fie divizibil prin 2, adică unul din factorii $(b+c+a)$, sau $(b+c-a)$ trebue să fie par. Să presupunem că factorul $(b+c+a)$ este par, adică avem:

$$b+c+a = 2k, \qquad (3)$$

k fiind un număr întreg oare-care.

Din egalitatea (3) deducem că:

$$b+c-a = 2(k-a), \qquad (4)$$

adică că și factorul $(b+c-a)$ este par, și prin urmare egalitatea (2) devine:

$$b \times c = 2k(k - a),$$

ceia ce ne arată că produsul $b \times c$ este divizibil prin 2 și prin urmare *unul din numerile b, c trebue să fie par.*

La aceiași concluzie am fi ajuns dacă în loc de $(b+c+a)$ am fi presupus mai întâi că factorul $(b+c-a)$ este par.

Zicem însă că dacă b este par, atunci c e impar, și din contra dacă c este par, atunci b este impar. In adevăr dacă b și c ar fi pari împreună, atunci atît b, cît și c ar admite ca divizor comun pe 2 și deci ar urma după egalitatea (1) ca și a să fie divizibil prin 2, ceia ce știm că nu se poate, de oare-ce am suprimat din numerile a, b, c pe toți factorii 2 comuni acestor trei numere.

Unul din numerile b, c fiind par, iar celalt impar, rezultă atunci, pentru un motiv analog, că a este totdeauna impar.

Prin urmare, *unul singur din numerile b, c este par, iar a este totdeauna impar.*

Să presupunem spre exemplu că b este par. Atunci putem pune:

$$b = 2m,$$
$$c = 2n+1,$$
$$a = 2p+1,$$

m, n, p fiind niște numere întregi oare-care. Egalitatea (1) devine atunci:

$$(2m)^2+(2n+1)^2=(2p+1)^2.$$

Dacă efectuăm ridicările la patrat și facem apoi reducerile, obținem:

$$m^2+n(n+1)=p(p+1). \qquad (5)$$

Se știe însă că produsul a două numere întregi consecutive este totdeauna divizibil prie 2. Egalitatea (5) ne arată atunci că și m^2, și prin urmare m, este divizibil prin 2, căci dacă un număr împarte o sumă și una din părțile ei, împarte și pe cealaltă parte. Vom avea deci:

$$m = 2q,$$

q fiind un număr întreg oare-care. Insă atunci avem:

$$b = 2m = 2 \times 2q,$$

sau:

$$b = 4q,$$

ceia ce ne arată că b este multiplu de 4 și prin urmare divizibil prin 4.

Dacă am fi presupus că c este par, iar b impar, printr'un raționament analog, vom găsi că c este divizibil prin 4.

Prin urmare *unul din numerile b, c este divizibil prin 4.*

3) *Unul din numerile a, b, c este divizibil prin 5.*

Dacă considerăm resturile diviziunei unui număr prin 5, vedem că atît b, cît și c, nu pot fi de cît de una din următoarele forme:

$$\mathcal{M}5, \quad \mathcal{M}5+1, \quad \mathcal{M}5+2, \quad \mathcal{M}5+3, \quad \mathcal{M}5+4. \quad (6)$$

Dacă facem patratele acestor numere și separăm multiplii de 5 din rezultat, găsim că ori-ce patrat întreg b^2, sau c^2, nu poate fi de cît de una din formele:

$$\mathcal{M}5, \quad \mathcal{M}5+1, \quad \mathcal{M}5+4. \quad (7)$$

Rezultă atunci că suma patratelor, b^2+c^2, a două numere întregi poate fi de forma:

$$\mathcal{M}5, \quad \mathcal{M}5+1, \quad \mathcal{M}5+2, \quad \mathcal{M}5+3, \quad \mathcal{M}5+4. \quad (8)$$

Insă dacă ținem seamă de egalitatea:

$$b^2+c^2=a^2$$

vedem că suma b^2+c^2 trebue să fie un patrat perfect și prin urmare b^2+c^2 nu poate fi de cît de una din formele:

$$\mathcal{M}5, \quad \mathcal{M}5+1, \quad \mathcal{M}5+4$$

adică, din tabloul (8) trebuesc excluse formele $\mathcal{M}5+2$ și $\mathcal{M}5+3$, ca ne corespunzînd unor patrate perfecte.

Vom avea deci de examinat următoarele trei cazuri:

A) Suma b^2+c^2 este de forma $\mathcal{M}5$. In acest caz a este multiplu de 5. Dacă ne raportăm la tabloul (7), vedem că singurele ipoteze ce putem face asupra lui b^2 și c^2 sînt:

α) b^2 este $\mathcal{M}5$ și c^2 este $\mathcal{M}5$.

β) b^2 este $\mathcal{M}5+1$ iar c^2 este $\mathcal{M}5+4$.

γ) b^2 este $\mathcal{M}5+4$ iar c^2 este $\mathcal{M}5+1$.

Insă ipoteza α) că atît b^2, cît și c^2 sînt multipli de 5, trebue exclusă, căci atunci b, c și prin urmare a, ar admite ca divizor comun pe 5, ceia ce am văzut de la început că nu se poate. Ne rămîn deci numai ipotezele β) și γ). Insă în ambele aceste cazuri nici b, nici c, nu e divizibil prin 5.

Prin urmare în ipoteza că suma b^2+c^2 este multiplu de 5, singur numărul a este divizibil prin 5.

B) Suma b^2+c^2 este de forma $\mathcal{M}5+1$. In acest caz a nu este divizibil prin 5. Dacă ne raportăm la tabloul (7), vedem că singurile cazuri ce se pot prezenta pentru b^2 și c^2 sînt:

α) b^2 este $\mathcal{M}5$, iar c^2 este $\mathcal{M}5+1$.

β) b^2 este $\mathscr{M}5+1$, iar c^2 este $\mathscr{M}5$.

In ambele aceste cazuri însă, unul singur din numerile b, c este divizibil prin 5.

C) Suma b^2+c^2 este de forma $\mathscr{M}5+4$. Printr'un raţionament analog cu cel precedent, vom vedea că şi în acest caz a nu este divizibil prin 5, şi că numai unul din numerile b, c este divizibil prin 5.

Prin urmare cele spuse la numerile A, B, C se pot rezuma astfel:

In totdeauna, unul singur din numerile a, b, c este divizibil prin 5.

4) *Produsul $b\times c$ este divizibil prin 12.*

Am demonstrat mai sus că în totdeauna: unul din numerile b, c este divizibil prin 3, precum şi că unul din numerile b, c este divizibil prin 4. Insă divizorii 3 şi 4 fiind primi între ei, rezultă că produsul $b\times c$ este totdeauna divizibil prin 12.

Exemple. — $3^2+4^2=5^2$; $5^2+12^2=13^2$; $24^2+143^2=145^2$; $49^2+168^2=175^2$; $468^2+155^2=493^2$; $476^2+93^2=485^2$; $1628^2+885^2=1853^2$.

ALGEBRA.

Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$x^2+4xy-2y^2=5(x+y),$$
$$5x^2-xy-y^2=7(x+y).$$

Dacă între aceste două ecuaţiuni eliminăm pe $(x+y)$, obţinem ecuaţia omogenă:

$$6x^2-11xy+3y^2=o. \qquad (1)$$

Dacă punem:

$$y=tx \qquad (2)$$

ecuaţia (1) devine:

$$x^2(3t^2-11t+6)=o,$$

care se descompune în:

$$x^2=o \quad \text{şi} \quad 3t^2-11t+5=o.$$

Ecuaţia $x^2=o$ ne dă sistemul dublu de soluţiuni:

$$x=o, \qquad y=o,$$

soluţiuni care erau evidente a priori.

Ecuaţia: $3t^2-11t+6=o,$

are ca rădăcini:

$$t_1=3 \quad \text{și} \quad t_2=\frac{2}{3},$$

ceia ce ne dă:

$$y=3x \quad \text{și} \quad y=\frac{2}{3}x.$$

Dacă înlocuim succesiv în una din ecuațiele sistemului propus, pe y prin $3x$ și $\frac{2}{3}x$, găsim respectiv $x=3$ și $x=-4$, iar ecuația (2) ne dă $y=2$ și $y=-12$.

Prin urmare sistemul de ecuații propus, admite ca soluțiuni:

$x=0,$	$x=3,$	$x=-4.$
$y=0,$	$y=2,$	$y=-12.$

V. Cristescu.

EXPRESIUNEA PATRATULUI LATUREI UNUI TRIUNGHIU.

Se știe că expresiunea patratului laturei unui triunghiu diferă, după cum latura aceasta se opune unui unghiu ascuțit, drept sau obtus. Astfel avem următoarele trei teoreme:

1) *Patratul unei laturi opusă unui unghiu ascuțit este egal cu suma patratelor celor-lalte două laturi minus dublul produsului uneia din aceste laturi prin proecțiunea celei-lalte pe cea d'întâi.*

2) *Patratul unei laturi opusă unui unghiu drept este egal cu suma patratelor celor-lalte două.*

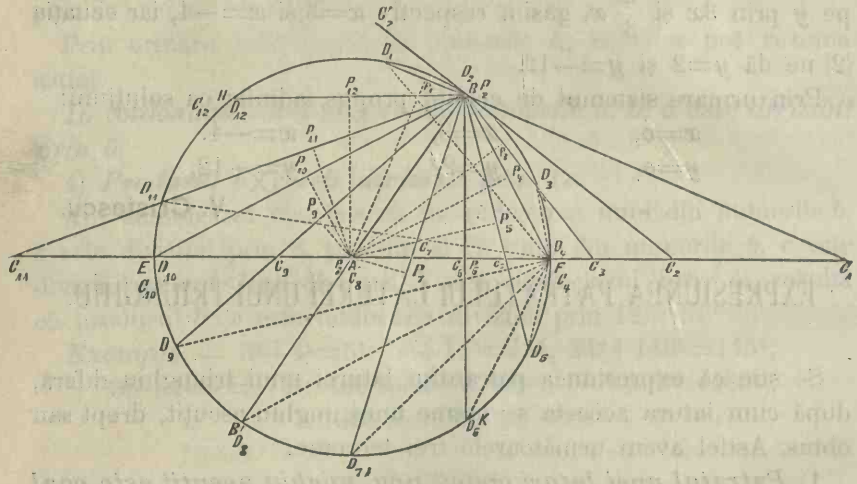
3) *Patratul unei laturi opusă unui unghiu obtus este egal cu suma patratelor celor-lalte două laturi plus dublul produsului uneia din aceste laturi prin proecțiunea celei-lalte pe cea d'întâi.*

De ordinar se dă acestor trei teoreme demonstrațiuni cu totul independente una de alta. In cele ce urmează îmi propun a arăta că aceste trei teoreme se pot considera ca consecințele uneia și aceleiași teoreme, și anume:

4) *Dacă din un vîrf A al unui triunghiu ABC, cu o rază egală cu o latură AB a acestui triunghiu, descrim o circonferență, această circonferență taie latura AC în punctele E*

și F, iar latura BC în punctul D, astfel că triunghiurile EBC, FDC sînt asemenea.

Pentru a demonstra această teoremă vom deosebi diferite cazuri, cari depind de poziţiunea punctului D pe circonferenţă. Să ducem coarda BH paralelă cu AC, coarda BK perpendiculară pe AC și diametrul BB′. Fie P proecţiunea punctului A pe latura BC.



1) *Punctul D cade între H și B.* Fie triunghiul ABC_1. Triunghiurile EBC_1, FD_1C_1, sînt asemenea ca avînd unghiul din C_1 comun, iar unghiurile din E și D_1 egale, ca avînd aceiași măsură. Deci teorema (4) este demonstrată în acest caz. Ca consecinţă avem relaţiunea:

$$\frac{EC_1}{BC_1}=\frac{D_1C_1}{FC_1}, \quad \text{sau:} \quad EC_1 \times FC_1 = BC_1 \times D_1C_1.$$

Dar avem:

$$EC_1=AC_1+AB, \quad FC_1=AC_1-AB, \quad D_1C_1=B_1C_1+2BP_1.$$

Inlocuind avem:

$$(AC_1+AB)(AC_1-AB)=BC_1(BC_1+2BP_1),$$

de unde:

$$\overline{AC_1}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_1}^2+2BC_1 \times BP_1,$$

care este expresiunea teoremei (3). E ușor de văzut că în acest caz unghiul ABC_1 este totdeauna obtus, căci suplimentul său ABD_1, este ascuţit ca fiind unghiul de la baza unui triunghiu isoscel ABD_1.

2) *Punctul D coincide cu B.* In acest caz dreapta BC_2 este tangentă în punctul B. Triunghiurile EBC_2, FBC_2 sînt asemenea ca avînd unghiul din C_2 comun, iar unghiurile din E și B sînt egale ca avînd aceiași măsură. Deci avem:

$$\frac{EC_2}{BC_2}=\frac{BC_2}{FC_2}, \text{ sau: } EC_2 \times FC_2 = \overline{BC_2}^2,$$

sau: $$(AC_2-AB)(AC_2+AB)=\overline{BC_2}^2,$$

de unde: $$\overline{AC_2}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_2}^2.$$

Aceasta este expresiunea teoremei (2). E ușor de văzut că unghiul ABC_2 este drept, căci el este format de o tangentă și raza dusă la punctul de contact.

3) *Punctul D cade între B și F.* Triunghiurile EBC_3, FD_3C_3 sînt asemenea, ca avînd unghiul din C_3 comun, și unghiurile din B și F egale, ca fiind ambele suplimentare unghiului BFE. Rezultă că:

$$\frac{EC_3}{BC_3}=\frac{D_3C_3}{FC_3}, \text{ sau: } EC_3 \times FC_3 = BC_3 \times D_3C_3,$$

sau: $$(AC_3+AB)(AC_3-AB)=BC_3(BC_3-2BP_3),$$

de unde: $$\overline{AC_3}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_3}^2-2BC_3 \times BP_3.$$

Aceasta e expresiunea teoremei (1). E ușor de văzut că unghiul ABC e ascuțit, căci el e mai mic ca unghiul drept ABC_2.

4) *Punctul D cade în F.* In acest caz și punctul C cade în F, și prin urmare triunghiul DFC dispare. Relațiunea precedentă însă subsistă. In adevăr în acest caz $2BP_4=BC_4$ și relațiunea devine:

$$\overline{AC_4}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_4}^2-\overline{BC_4}^2,$$

de unde: $$AC_4=AB$$

care exprimă că punctul C_4 coincide cu F, ceia ce e adevărat în acest caz.

5) *Punctul D cade între F și K.* Triunghiurile EBC_5, FD_5C_5 sînt asemenea ca avînd unghiurile din C_5 egale ca opuse la vîrf, iar unghiurile din E și D_5 egale ca avînd aceiași măsură. Rezultă că:

$$\frac{EC_5}{BC_5}=\frac{D_5C_5}{FC_5}, \text{ sau: } EC_5 \times FC_5 = BC_5 \times D_5C_5,$$

sau: $$(AB+AC_5)(AB-AC_5)=BC_5(2BP_5-BC_5),$$

de unde: $$\overline{AC_5}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_5}^2-2BC_5 \times BP_5,$$

care este expresiunea teoremei (1). Unghiul ABC_5 este tot ascuțit, ca fiind mai mic ca unghiul drept ABC_2.

6) *Punctul D cade în K.* Aceiași demonstrațiune ca la cazul 5. Insă în acest caz punctul P_6 coincide cu C_6, căci dreapta BK e perpendiculară pe AC_6. Inlocuind în egalitatea precedentă pe BP_6 cu BC_6 avem relațiunea:

$$\overline{AC_6}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_6}^2-2\overline{BC_6}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC_6}^2.$$

In acest caz însă unghiul AC_6B fiind drept, latura AC_6 este o catetă a triunghiului dreptunghiu AC_6B.

7) *Punctul D cade între K și B'.* Aceiași demonstrațiune și aceleași concluziuni ca la cazul 5.

8) *Punctul D cade în B'.* In acest caz punctul C_8 vine în A, și triunghiul ABC se reduce la dreapta AB. Relațiunea de la cazul 5 este îndeplinită și în acest caz. In adevăr (observînd că avem în acest caz $AB=BC_8=BP_8$) acea relațiune devine:

$$\overline{AC_8}^2=\overline{AB}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AB}^2=0,$$

și prin urmare punctele A și C coincizînd, relațiunea e verificată,

9) *Punctul D cade între B' și E.* Aceiași demonstrațiune și aceleași concluziuni ca la cazul 5. Și aci unghiul AB_9C_9 e ascuțit căci este mai mic ca unghiul drept ABC'_2.

10) *Punctul D cade în E.* Aceiași demonstrațiune și aceleași concluziuni ca la cazul 4.

11) *Punctul D cade între E și H.* Triunghiurile EBC_{11} și $FD_{11}C_{11}$ sînt asemenea ca avînd unghiul din C_{11} comun, iar unghiurile din B și F egale, ca avînd aceiași măsură. Rezultă că avem:

$$\frac{EC_{11}}{BC_{11}}=\frac{D_{11}C_{11}}{FC_{11}},\quad \text{sau:}\quad EC_{11}\times FC_{11}=BC_{11}\times D_{11}C_{11},$$

sau: $$(AC_{11}-AB)(AC_{11}+AB)=BC_{11}(BC_{11}-2BP_{11}),$$

de unde: $$\overline{AC_{11}}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC_{11}}^2-2BC_{11}\times BP_{11},$$

care este expresiunea teoremei (1). Unghiul ABC_{11} este ascuțit ca fiind mai mic ca unghiul drept ABC'_2.

12) *Punctul D cade în H.* Triunghiul ABC_{12} se reduce la 2 paralele. Relațiunea precedentă subsistă și în acest caz, căci ambii membri devin infiniți, din cauză că: $AC_{11}=\infty$, $BC_{11}=\infty$ iar $BP_{11}=\frac{BH}{2}$.

Observări. 1) Dacă convenim a considera ca pozitive proecțiunile BP cari cad pe latura triunghiului, și ca negative proecțiunile BP cari cad pe prelungirea laturei triunghiului, atunci teorema (1)

se poate aplica în toate cazurile, ori cum ar fi unghiul opus unei laturi a triunghiului.

2) Cazurile (2) și (6) conțin fie-care în parte cîte o demonstrațiune a teoremei lui *Pitagora*.

3) In enunciul teoremei (4) nu am fixat poziținea punctelor E și F în raport cu triunghiul. In adevăr, se pot schimba aceste puncte unul cu altul, fără ca să înceteze asemănarea triunghiurilor EBC, FDC. Aceasta revine a zice că pe lîngă asemănarea acestor 2 triunghiuri, mai avem și asemănarea triunghiurilor FBC, EDC. Teoremele 1), 2) și 3) se pot considera și ca consecințe ale asemănărei acestor din urmă două triunghiuri, ceia ce se poate verifica în toate cazurile examinate mai sus.

I. Ionescu.

ASUPRA UNOR INFĂȘURATOARE DE CERCURI ȘI SFERE.

1.— *Se consideră un punct* M *pe o curbă* K *și un punct fix* O. *Se cere înfășurătoarea cercurilor* C *de centru* M *și de rază* MO, *cînd punctul* M *descrie curba* K.

Iată o soluție geometrică care conduce la o problemă cunoscută și care poate da în multe cazuri rezultate imediate.

Pentru ca să găsim punctul unde cercul C atinge înfășurătoarea, considerăm pe curba K un punct M′ infinit vecin de M și cercul corespunzător C′, care are cu C un punct comun în O. Al doilea punct de intersecție, este evident simetricul punctului O în raport cu linia centrelor MM′. De oare-ce la limită, MM′ devine tangentă în M la curba K, punctul de contact căutat se va găsi luînd simetricul N al punctului O în raport cu acea tangentă. Infășurătoarea se reduce prin urmare la locul punctului N. Acest loc poate fi privit din două puncte de vedere foarte puțin diferite. Fie P piciorul perpendicularei coborîte din O pe tangenta MT la curba K și M_1 simetricul punctului O în raport cu M. Punctul P descrie podara curbei K în raport cu punctul O; punctul N descrie o curbă omotetică acelei podare (raportul de omotetie fiind egal cu 2). Pe de altă parte, punctul M_1 fiind diametral opus lui O in cercul C, unghiul M_1NO este drept și punctul N descrie deci podara locului punctului M_1. Locul lui M_1 este însă o curbă omotetică (raportul=2) curbei K;

așa în cît locul punctului N, sau înfășurătoarea cercurilor C se mai poate privi ca podara unei curbe omotetice curbei date.

Aplicațiuni.— *a*) Să considerăm o elipsă E de focare F și F', și să descrim un cerc C pe o rază vectoară NF ca diametru. Centrul M al acelui cerc descrie evident o elipsă omotetică celei date $\left(\text{raportul}=\frac{1}{2}\right)$. Înfășurătoarea cercurilor C este deci podara elipsei E în raport cu punctul F, adică cercul principal al acelei elipse.

b) Dintr'un punct M al unei elipse E de focare F,F' și avînd ca vîrfuri A,A' se descrie un cerc C de rază MF. Se cere înfășurătoarea cercurilor C. In virtutea celor precedente, înfășurătoarea este podara unei elipse omotetice celei date, sau curba omotetică podarei elipsei date (raportul=2) în raport cu punctul F. Podara elipsei E în raport cu focarul F este cercul său principal, iar omoteticul acestui cerc în raport cu punctul F este (după cum se poate vedea ușor) cercul director relativ la focarul F'. Așa în cît avem următorul rezultat:

Cercurile descrise din punctele unei elipse ca centru, cu razele vectoare relative la un focar ca raze, rămîn tangente la cercul director relativ la celalt focar.

c) Se găsește în mod analog, că cercurile descrise pe razele vectoare ale unei parabole ca diametru, sînt tangente la tangenta la vîrf a parabolei, și că cercurile descrise din punctele aceleiași parabole ca centru, cu razele vectoare ca raze, rămîn tangente la directriţa parabolei.

2.— *Se dă un punct* M *pe o suprafață* Σ *și un punct fix* O. *Se cere înfășurătoarea sferelor* S *descrise pe* MO *ca diametru, cînd punctul* M *se mișcă pe suprafață.*

Înfășurătoarea se va găsi în același mod ca în problema precedentă, căutînd punctul de contact al sferei S cu acea înfășurătoare. Pentru aceasta, considerăm două puncte M' și M'' infinit vecine punctului M, și situate în direcţii diferite (cu alte cuvinte la limită MM' și MM'' să fie distincte), și sferele S' și S'' corespunzătoare punctelor M' și M''. Cele trei sfere se intersectează, afară de punctul O, încă într'un punct N. In adevăr, planele radicale ale sferelor luate două cîte două, sînt planele duse din O perpendicular pe dreptele MM', M'M'', M''M; însă acele plane conțin evident perpendiculara coborîtă din O pe planul MM'M''. Așa dar cele trei sfere

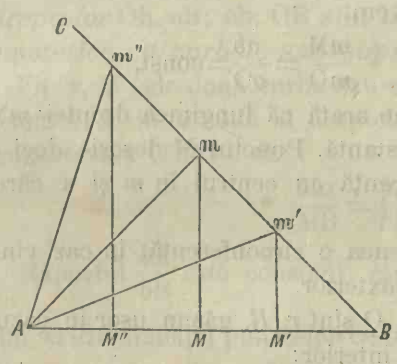
se taie într'un punct N, care e simetricul punctului O în raport cu planul MM'M''. La limită planul MM'M'' devine plan tangent în M la suprafața Σ, și punctul de contact al sferii S cu înfășurătoarea sa este simetricul punctului fix O în raport cu acel plan tangent. De aci rezultă (ca și în problema plană) două definițiuni pentru înfășurătoarea căutată: *a*) suprafață omotetică podarei suprafeții Σ (raportul=2), *b*) suprafața podară a unei suprafețe omotetice suprafeții Σ (același raport).

G. Țițeica.

CHESTIUNI DE MAXIMUM ȘI MINIMUM REZOLVITE GEOMETRICEȘTE [1].

Suma patratelor a două numere variabile, dar de sumă constantă, este minimă cînd numerile sînt egale.

Luăm o dreaptă de lungime AB egală cu suma constantă a celor două numere sau lungimi variabile. Prin B ducem o dreaptă BC care să facă cu AB un unghiu de 45°. Dacă între A și B ridicăm o perpendiculară oare-care M*m* pe AB, dreapta M*m* va fi egală cu MB, în cît:



$$AM+Mm=AM+MB=AB=\text{const.}$$

iar:

$$\overline{Am}^2=\overline{AM}^2+\overline{Mm}^2.$$

Se vede ușor că suma $\overline{AM}^2+\overline{Mm}^2$ va fi minimă, cînd A*m* va fi minim, adică cînd dreapta A*m* va fi perpendiculară pe BC. Insă atunci:

$$AM=Mm=MB=\frac{1}{2}AB.$$

Tot de pe figură se vede că maximul sumei $\overline{AM}^2+\overline{Mm}^2$ este $\overline{AB}^2$.

C. Popovici.

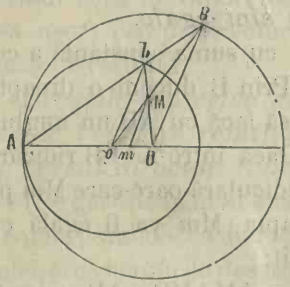
[1]) A se vedea *Gazeta Matematică*, Anul I, pag. 75.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 71.**— *Două circonferențe cu centrele* o *și* O *sînt tangente în punctul* A. *Prin punctul* A *se duce o secantă variabilă care întîlnește circonferențele* o, O, *în punctele* b, B. *Să se afle locul punctului de întîlnire al diagonalelor patrulaterului* obBO. **(V. Cristescu.)**

Soluție geometrică dată de D-l I. Moscuna (București).

Fie M punctul de intersecție al diagonalelor O*b*, *o*B. Triunghiurile A*ob*, AOB fiind isoscele, unghiurile A*bo* și ABO sînt egale fiecare cu unghiul *b*A*o*, și prin urmare dreptele *ob* și OB sînt paralele. Prin punctul M să ducem dreapta M*m* paralelă cu razele *ob* și OB. Vom avea atunci:



$$\frac{mo}{mO}=\frac{Mb}{MO}=\frac{ob}{OB}=\text{const.}$$

ceia ce ne arată că punctul *m* este fix.

Mai avem:

$$\frac{mM}{mO}=\frac{ob}{oO}=\text{const,}$$

ceia ce ne arată că lungimea dreptei *m*M este constantă. Punctul M descrie deci o circonferență cu centrul în *m* și a cărei rază este M*m*.

Locul punctului M este asemenea o circonferență. în caz cînd circonferențele *o*, O sînt tangente exterior.

Dacă razele circonferențelor *o*, O sînt *r*, *R*, găsim ușor în cazul cînd circonferențele sînt tangente interior:

$$mO=\frac{R(R-r)}{R+r}, \qquad mM=\frac{Rr}{R+r}.$$

Soluție analitică dată de D-nii Bogdan Ionescu, (licențiat în matematici), *Gr. N. Makarie* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele) și *D. Negulescu* (Student, București).

Luăm ca axă al x-lor dreapta AO și ca ax al y-ilor o dreaptă trecînd prin A și perpendiculară pe AO. Presupunem că circonferențele sînt tangente interior, și fie r, R razele lor. Ecuațiele celor două cercuri sînt:

$$x^2+y^2-2rx=o,$$
$$x^2+y^2-2Rx=o.$$

Ecuația dreptei AbB fiind:

$$y=mx,$$

ecuațiele dreptelor oB și Ob, vor fi după toate reducerile:

$$rym^2+2R(x-r)m+y(r-2R)=o,$$
$$Rym^2+2r(x-R)m+y(R-2r)=o.$$

Eliminînd pe m între aceste două ecuații [1], găsim că locul căutat este cercul:

$$(R+r)^2(x^2+y^2)-4Rr(R+r)x+3R^2r^2=o.$$

In caz cînd circonferențele o, O sînt tangente exterior, am fi găsit cercul:

$$(R-r)^2(x^2+y^2)+4Rr(R-r)x+3R^2r^2=o.$$

Generalizare. Două curbe sau două suprafețe omotetice date, sînt întîlnite în b, B *de o secantă variabilă care trece prin centrul lor de omotetie* A. *Dacă* o, O *sînt două puncte fixe în linie dreaptă cu* A, *locul geometric al intersecțiunilor dreptelor* Ob, oB; ob, OB *sînt două curbe, sau două suprafețe omotetice cu curbele sau suprafețele date.*

Fie s, S cele două curbe sau cele două suprafețe omotetice; M punctul de intersecție al dreptelor Ob și oB. In triunghiul oAB transversala OMb ne dă:

$$\frac{Mo}{MB}=\frac{bA}{bB}\times\frac{Oo}{OA}.$$

Raportul $\frac{bA}{bB}$ este constant; raportul $\frac{Oo}{OA}$ este asemenea constant din cauza fixității punctelor O, o, A. Raportul $\frac{Mo}{MB}$ este deci și el constant.

Punctul M descrie deci o curbă sau suprafață omotetică cu curba sau suprafața S sau s, centru de omotetie fiind o sau O. Punctul M', intersecțiunea dreptelor OB și ob descrie asemenea o figură omotetică cu figura S sau s, centrul de omotetie fiind O sau o.

Această generalizare este dată de D-l *I. Moscuna*.

---

[1] Se știe că rezultatul eliminării lui x între ecuațiile:

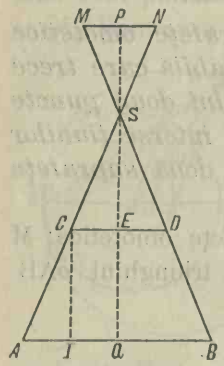
$$ax^2+bx+c=o \text{ și } a'x^2+b'x+c'=o,$$

este: $$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=o.$$

***Problema 82.**— *Se dă înălțimea și una din bazele unui trunchiu de con drept circular cu bazele paralele. Se cere a se determina cealaltă bază, așa fel ca suprafața laterală a trunchiului de con să fie echivalentă cu suma suprafețelor celor două baze.* **(V. Cristescu.)**

Soluție dată de D-nii: A. Iliovici; Gr. N. Makarie; Marin Mateiescu (Elev al Liceului Real din Turnu-Severin); *C. Mateescu* (Elev al Liceului din Craiova); *I. Moscuna* (București); *C. Popovici* (Iași) și *G. Iliovici* (Iași).

Să însemnăm cu r raza AQ a bazei date, prin a înălțimea EQ și prin x raza necunoscută CE. Suprafață laterală a trunchiului de con ABCD va fi:



$$\pi(r+x)\times\overline{AC}.$$

Insă triunghiul dreptunghiu ACI ne dă:

$$\overline{AC}=\sqrt{a^2+(r-x)^2}$$

și prin urmare suprafața laterală a trunchiului de con devine:

$$\pi(r+x)\sqrt{a^2+(r-x)^2},$$

Conform enunciului problemei va trebui să avem dar:

$$\pi(r+x)\sqrt{a^2+(r-x)^2}=\pi(r^2+x^2) \qquad (1)$$

sau ridicînd la patrat și simplificînd:

$$a^2(r+x)^2+(r^2-x^2)^2=(r^2+x^2)^2$$

de unde:

$$a^2(r+x)^2-4r^2x^2=o, \qquad (2)$$

sau:

$$[a(r+x)-2rx]\,[a(r+x)+2rx]=o,$$

ecuațiune a cărei rădăcini sînt:

$$x_1=\frac{ar}{2r-a} \quad \text{și} \quad x_2=-\frac{ar}{2r+a}. \qquad (3)$$

Prima rădăcină e pozitivă dacă $a<2r$ și negativă în cazul contrar. A doua rădăcină e totdeauna negativă. Prin urmare pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca să avem $a<2r$, în care caz problema are o singură soluție (x_1).

Se pot însă interpreta și rădăcinele negative.

Interpretarea rădăcinilor negative. Dacă în ecuația (1) înlocuim pe x prin $-x$, ea devine:

$$\pi(r-x)\sqrt{a^2+(r+x)^2}=\pi(r^2+x^2) \qquad (4)$$

și va admite ca rădăcini, rădăcinile ecuației (1) schimbate de semn, adică:

$$x' = -\frac{ar}{2r-a}, \quad \text{și} \quad x'' = \frac{ar}{2r+a}.$$

Ecuația (4) însă corespunde următoarei chestiuni:

Cunoscîndu-se baza și înălțimea unui trunchiu de con MNAB *de a doua specie* [1]*), să se determine cealaltă bază astfel ca diferența suprafețelor laterale ale celor două conuri, ce formează trunchiul, să fie egală cu suma suprafețelor bazelor.*

In adevăr dacă însemnăm în acest caz, ca și mai înainte, pe AQ prin r, înălțimea PQ a trunchiului de con de a doua specie prin a, și raza necunoscută PN prin x, va trebui să avem conform enunciului:

$$\pi r \times \overline{SA} - \pi x \times SN = \pi(r^2 + x^2). \qquad (5)$$

Insă: $$SA = \sqrt{r^2 + SQ^2}, \qquad SN = \sqrt{x^2 + SP^2}, \qquad (6)$$

iar triunghiurile asemenea ASQ, NSP ne dau:

$$\frac{SQ}{r} = \frac{SP}{x} = \frac{a}{r+x},$$

de unde:

$$SQ = \frac{ar}{r+x}, \qquad SP = \frac{ax}{r+x}.$$

Egalitățile (6) devin dar:

$$SA = \frac{r}{r+x}\sqrt{a^2 + (r+x)^2}, \quad SN = \frac{x}{r+x}\sqrt{a^2 + (r+x)^2},$$

și înlocuind în egalitatea (5) obținem:

$$\pi\frac{r^2 - x^2}{r+x}\sqrt{a^2 + (r+x)^2} = \pi(r^2 + x^2),$$

sau: $$\pi(r-x)\sqrt{a^2 + (r+x)^2} = \pi(r^2 + x^2),$$

adică tocmai ecuația (4).

Dacă acum convenim să considerăm suprafața laterală a trunchiului de con de a doua specie MNAB ca *suma algebrică* a celor două suprafețe conice SAB, SMN de *sens* și prin urmare de

[1]) Se numește *trunchiu de con de a doua specie*, un trunchiu de con MNAB cu vîrful S între baze. Trunchiul de con obișnuit ABCD se mai numește și *trunchiu de con de întâia specie*. A se vedea: *Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie, deuxième partie, sixième édition*, pag. 147.

semne contrare [1]), videm că și rădăcinile negative ale ecuației (1), luate cu semne schimbate, sînt soluțiuni a problemei propuse, *fără a-i schimba enunciul*, și anume corespund unor trunchiuri de con de a doua specie.

Discuția făcută se poate rezuma astfel:

1°. Cînd $a < 2r$ problema propusă are două soluțiuni, una (x_1) corespunzînd unui trunchiu de con de întâia specie și alta (x_2) corespunzînd unui trunchiu de con de a doua specie.

2°. Cînd $a=2r$, una din rădăcini (x_1) devine infinită, iar problema propusă are o singură soluție (x_2), care corespunde unui trunchiu de con de a doua specie.

3°. Cînd $a>2r$, problema propusă are asemenea două soluțiuni, care corespund ambele la cîte un trunchiu de con de a doua specie.

Această interpretare a rădăcinilor negative ale ecuației (1) a fost dată de D-l *I. Moscuna.*

***Problema 83.** — *Fie* l_a, l_b, l_c *lungimile bisectricelor unui triunghiu. Să se demonstreze că:*

$$\frac{1}{l_a \sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{l_b \sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{l_c \sin\frac{C}{2}} = \frac{a+b+c}{S}.$$

(G. Țițeica).

Soluție dată de D-nii: Gr. Makarie (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *A. Iliovici* (Iași) și *C. Popescu* (Elev în Clasa IV la Școala Normală de Institutori).

Se știe că:

$$(b+c) l_a \sin\frac{A}{2} = 2S \quad [2])$$

de unde:

$$\frac{1}{l_a \sin\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{2S}$$

în același mod:

---

[1]) A se videa *Gazeta Matematică*, Volumul I, pag. 22: *A. G. Ioachimescu, Suprafața și volumul produs prin rotația unui cerc sau poligon regulat ce se învîrtește în jurul unei axe oare-care din planul său.*

[2]) A se vedea *Gazeta Matematică* No. 8, pag. 166, Volumul I.

$$\frac{1}{l_b \sin\frac{B}{2}} = \frac{c+a}{2S}, \quad \frac{1}{l_c \sin\frac{C}{2}} = \frac{a+b}{2S}.$$

Făcînd suma, obținem egalitatea enunțată.

Soluție dată de D-nii: G. Iliovici (Iași); *C. Mateiescu* (Elev în Clasa VII la Liceul Carol I din Craiova) și *D. Poenaru.*

Plecînd de la formula cunoscută:

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Se obține:

$$\frac{1}{l_a \sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{l_b \sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{l_c \sin\frac{C}{2}} = \frac{b+c}{2bc\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}} + \frac{c+a}{2ca\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$+ \frac{a+b}{2ab\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{b+c}{bc\sin A} + \frac{c+a}{ca\sin B} + \frac{a+b}{ab\sin C} = \frac{a+b+c}{S}.$$

Soluție dată de D-nii: C. Mateiescu și *B. Paraschivescu* (Elev al liceului din Ploiești).

Ținînd seama de formulele:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

primul membru al egalității din enunțiu devine egal cu:

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{p(p-a)(p-b(pc)}} = \frac{a+b+c}{S}.$$

Soluție dată de D-l I. Moscuna.

Fie AM bisectrița unghiului A, O centrul cercului înscris. Proiectînd punctele O și M în P și N pe latura AB, triunghiurile asemenea formate dau:

$$(1) \qquad \frac{MN}{OP} = \frac{MA}{OA} = \frac{MO}{OA} + 1.$$

Bisectrița BO dă în triunghiul ABM:

$$(2) \qquad \frac{MO}{OA} = \frac{MB}{AB}.$$

In fine, bisectrița AM dă:

$$\frac{MB}{AB}=\frac{BC}{AB+AC}=\frac{a}{b+c}.$$

Inlocuind valoarea acestui raport în (2) și apoi valoarea raportului $\frac{MO}{OA}$ în (1), obținem:

$$\frac{MN}{OP}=\frac{a+b+c}{b+c},$$

însă:

$$OP=r, \quad MN=l_a \sin\frac{A}{2},$$

deci:

$$\frac{r}{l_a \sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{a+b+c},$$

sau:

$$\frac{1}{l_a \sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{2S} \text{ etc.}$$

***Problema 86.**—*Se dă un cerc în care se înscrie un patrat. In acest patrat se înscrie patratul de suprafață minimă, în care se înscrie iarăși un cerc. Se repetă apoi înscrierile în aceiași ordine. Se cere suma suprafețelor cercurilor și patratelor astfel construite, cînd ne oprim la cercul de ordine $(n+1)$ exclusiv. In cazul particular cînd raza primului cerc este $\frac{\sqrt{3}}{2}$, această sumă are ca limită $(\pi+3)$.*

(C. S. Stănulescu.)

Soluțiune dată de D-nii : I. Moscuna (București), *Gr. N. Makarie* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *A. Iliovici* (Iași); *C. Popovici* (Iași) și *G. Iliovici* (Elev al Liceului din Iași).

Fie R raza primului cerc; suprafața lui va fi πR^2. Latura patratului înscris în acest cerc este $R\sqrt{2}$ și prin urmare suprafața patratului este $2R^2$. Latura patratului minimum înscris în primul patrat se obține unind mijloacele a două laturi consecutive ale primului patrat, și prin urmare ea este jumătatea diagonalei, adică $\frac{1}{2}(R\sqrt{2})\sqrt{2}=R$. Prin urmare suprafața patratului minimum este

R^2. Suma acestor 3 suprafețe este deci $(\pi+3)R^2$. Raza cercului înscris în patratul minimum, fiind jumătatea laturei acest patrat va fi egală cu $\frac{R}{2}$. Deci cele 3 suprafețe următoare vor fi respectiv $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ din cele 3 suprafețe precedente, și prin urmare vor avea ca sumă $\frac{1}{4}(\pi+3)R^2$. De aci rezultă că suma căutată S este:

$$S=(\pi+3)R^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right),$$

sau însumînd progresia geometrică:

$$S=(\pi+3)R^2.\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.(\pi+3)R^2.\frac{4^n-1}{4^n},$$

care este formulă căutată. Dacă $n=\infty$ și $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci avem:

$$S=\frac{4}{3}\times(\pi+3)\times\frac{3}{4}\times 1=(\pi+3).$$

c.c.e.d.d.

***Problema 90.**— *Să se găsească maximul sau minimul funcțiunei:*

$$\frac{a^{xy}}{b^{x^2+y^2}}$$

precum și valorile conrespondente ale lui x și y, știind că suma $x+y$ este constantă și că a și b sînt două numere pozitive. **(Bogdan Ionescu.)**

Soluțiune dată de D-nii: I. Moscuna (București), *Gr. N. Makarie, C. Popovici* (Iași) și *A. Iliovici.*

Să însemnăm cu $2c$ suma constantă $x+y$. Imulțind ambii termeni ai fracțiunei date cu b^{2xy}, avem:

$$z=\frac{a^{xy}}{b^{x^2+y^2}}=\frac{a^{xy}.b^{2xy}}{b^{x^2+y^2}.b^{2xy}}=\frac{(ab^2)^{xy}}{b^{(x+y)^2}}=\frac{1}{b^{4c^2}}.(ab^2)^{xy}.$$

Vom deosebi acum următoarele cazuri:

1°. $ab^2>1$. In acest caz z crește cînd xy crește. Dar produsul xy e maxim cînd factorii vor fi egali, de oare-ce suma $x+y$ e constantă. Deci pentru $x=y=c$, z devine maximum și avem:

$$\max. z = \frac{(ab^2)^{c^2}}{b^{4c^2}} = \left(\frac{a}{b^2}\right)^{c^2}.$$

2°. $ab^2 < 1$. In acest caz z descreşte cînd xy creşte. Deci z e minimum pentru $x=y=c$ şi anume:

$$\min. z = \left(\frac{a}{b^2}\right)^{c^2}.$$

3°. $ab^2=1$. In acest caz z rămîne constant şi prin urmare nu admite maximum sau minimum. Această valoare constantă este:

$$z = \left(\frac{a}{b^2}\right)^{c^2} = \left(\frac{a^2}{ab^2}\right)^{c^2} = a^{2c^2}.$$

***Problema 93.**— *Să se găsească densitatea unei sfere metalice care introdusă într'un vas cu apă şi mercur, stă jumătate în apă şi jumătate în mercur.* (I. Ionescu.)

Soluţie dată de D-nii Ion Anastasiadi (Elev al Anului preparator al Şcoalei de Poduri şi Şosele), *A. Iliovici* (Iaşi), *D. Ioachimescu* (Bucureşti), *Alex. Ionescu* (Bucureşti), *Gr. N. Makarie* (Elev al Şcoalei de Poduri şi Şosele), *I. Moscuna* (Bucureşti), *B. Paraschivescu* (Ploeşti), *I. Penescu* (Elev al Şcoalei Comerciale din Bucureşti), *Eftihie Floru* (Elev în clasa VI de la Seminarul Nifon din Bucureşti), *T. Săvulescu* (Elev al Şcoalei de Institutori), *Al. Bărcăcilă* (Elev în Clasa VII de la Seminarul Nifon); *G. Iliovici* (Iaşi) şi *C. N. Răileanu* (Iaşi).

Să însemnăm cu v volumul sferei şi cu x densitatea ei. Sfera fiind în echilibru greutatea ei vx, este egală cu greutatea volumului de lichid deslocuit. Dacă observăm că densitatea apei e 1, iar a mercurului 13,596 şi că sfera deslocueşte $\frac{v}{2}$ apă şi $\frac{v}{2}$ mercur, vom avea ecuaţiunea:

$$vx = \frac{v}{2} \times 1 + \frac{v}{2} \times 13{,}596,$$

de unde:

$$x = \frac{1}{2}(1 + 13{,}596) = 7{,}298,$$

valoare foarte aproape de densitatea cositorului.

PROBLEME PROPUSE

141. Se consideră o cicloidă al cărei vîrf este A și fie M un punct oare-care al curbei. Să se demonstreze că raza cercului generator, care trece prin centrul de curbură corespunzător punctului M, determină pe tangenta în acest punct un segment egal cu a treia parte a arcului AM. (V. CRISTESCU.)

*142. Să se găsească între ce limite poate fi luat m, pentru ca ecuația:

$$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+1=0,$$

să aibă rădăcinile sale coprinse între 1 și 2. (G. ȚIȚEICA.)

*143. Să se simplifice expresiunea:

$$\sqrt[3]{\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}+\sqrt[3]{\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}.$$ (I. IONESCU.)

*144. Se dă circonferență C și două puncte fixe, unul P interior și altul Q exterior circonferenței. Prin punctul P se duce o secantă ce taie circonferența C în punctele A, B. Pe AB ca diametru se descrie o circonferență C_1 și se ia punctele de intersecție D, D_1 ale circonferenței C_1 cu perpendiculara pe AB în punctul P. Se cere locul punctelor D, D_1 cînd secanta AB variază. De asemenea prin punctul Q se duce o secantă ce taie circonferența dată C în punctele E, F; iar pe EF ca diametru se descrie o circonferență C_2. Se cere a se găsi locul punctelor de contact ale circonferenței C_2 cu tangentele duse din Q, cînd secanta EF variză. (A. ILIOVICI.)

145. Se dă un cerc O și un punct fix pe el P. Se unesc extremitățile A, B ale unui diametru mobil cu punctul P. Să se afle locul punctelor de intersecție ale secantelor AP, BP cu diametrul perpendicular pe AB. (BOGDAN IONESCU.)

*146. Să se rezolve ecuația :

$$\sin 2x-2\{\sin x+\cos x+1\}\{2\sqrt{2}\cos(x-45^0)+1\}=0.$$

(GR. N. MAKARIE.)

147. Fie B și C proiecțiile unui punct fix A pe laturile unui unghiu drept MON, mobil în jurul vîrfului său O. Se cere învălitoarea dreptei BC; să se explice rezultatul. (G. ȚIȚEICA.)

*148. Patru proprietari vecini: Vasilescu, Ștefănescu, Dumitrescu și Georgescu au fie-care cîte un loc patrat pentru casă, avînd fie-care loc cîte o latură la stradă. Fie-care din aceste 4 persoane dă celor patru fii ai lor Ion, Petre, Nicolae și Constantin cîte un loc patrat din locul lor, avînd la fațadă un unghiu comun. Toate locurile au un număr exact de metri în fațadă, dar diferite lungimi. Fie-cărui părinte i-a rămas 105 metri patrați. Se mai știe că suma perimetrelor locurilor lui Ștefănescu și Georgescu este aceiași cu suma perimetrelor locurilor lui Ioan și Nicolae și pe de altă parte că suma perimetrelor locurilor lui Georgescu și Nicolae este cu 24 metri mai mare ca suma perimetrelor locurilor lui Vasilescu și Constantin. Se cere a se restabili numele complect al celor patru fii. (I. Ionescu)

*149 Fie A′, B′, C′ proiecțiile unui punct O pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu echilateral. Să se arate că unul din triunghiurile echilaterale construite pe B′C′ ca latură, are vîrful al treilea A_1 situat pe AO; unul din triunghiurile echilaterale construite pe C′A′ are vîrful al treilea B_1 situat pe BO, etc. Să se demonstreze în fine că dacă O e mobil în plan, puntele A_1, B_1, C_1 descriu niște drepte fixe. (G. Țițeica.)

*150. Se consideră două numere pozitive a și b precum și media lor geometrică m. Se cere a se ști: 1) De care din cele două numere a, b se apropie mai mult m; 2) Care e limita către care tinde raportul diferențelor $(a—m)$, $(b—m)$, cînd b tinde către a. (I. Ionescu.)

*151. Să se demonstreze că dacă avem egalitățile:

$$a+b+c=ab+bc+ca,$$

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$

avem asemenea:

$$a^n+b^n+c^n=a^nb^n+b^nc^n+c^na^n.$$ (I. Moscuna.)

*152. Intr'un triunghiu se duc paralelele la laturi care despart din triunghiu trei trapeze echivalente cu a $(m : n)$ parte din aria triunghiului. Care e valoarea lui $(m: n)$ pentru care cele trei paralele concură în același punct. (I. Ionescu.)

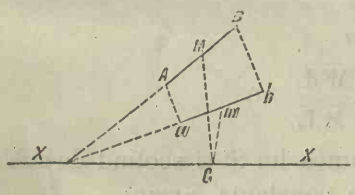
BIBLIOTECA CENTR

Suprafața și volumul elipsoidului de revoluție prelung.

In numerile 1, 2 și 3 din anul I al *„Gazetei matematice“* am arătat cum se poate obține, în mod elementar, suprafața și volumul, produs prin rotația unui cerc sau poligon regulat, ce se învîrtește în jurul unei drepte oare care din planul său, precum și oarecare aplicații la teoria centrurilor de greutate. In numărul de față îmi propun a arăta cum se poate obține în mod elementar, suprafața și volumul produs prin rotația unei elipse, ce se învîrtește în jurul axei celei mari, producînd un elipsoid de revoluție prelung.

a) Suprafața.

1.— *Lemă.* Fie $\overline{AB}$ (fig. 1) un segment de dreapta situat într'un plan P; $\overline{ab}$ proecțiunea sa ortogonală pe un plan Q, care face cu cel d'întâi unghiul α; β unghiul celor două direcțiuni $\overline{AB}$ și $\overline{ab}$; XX intersecția planelor P și Q; M și m mijloacele segmentelor $\overline{AB}$ și $\overline{ab}$; în fine S și s suprafețele produse prin rotația lui $\overline{AB}$ și $\overline{ab}$ în jurul lui XX.



Avem:

$$S = 2\pi \times \overline{AB} \times \overline{MG}$$

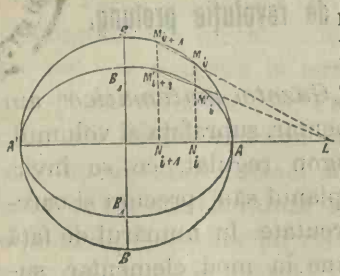
$$s = 2\pi \times \overline{ab} \times \overline{mG}$$

Insă: $$\overline{ab} = \overline{AB} \cos\beta$$

$$\overline{mG} = \overline{MG} \cos\alpha$$

deci: (1) $$s = S \cos\alpha \cos\beta.$$

2.— Acestea fiind stabilite, consider o circonferință de raza a și elipsa dupe care se proiectează această circonferință pe un plan, care face cu planul cercului un unghiu al cărui cosinus este $\frac{b}{a}$ $(b < a)$, și care trece printr'unul din diametrele cercului. Impart un sfert din această circonferință, plecînd din A în n părți egale, și fie (fig. 2): M_i, M_{i+1} două puncte de diviziune consecutive; N_i, N_{i+1} picioarele perpendicularelor scoborîte din M_i și M_{i+1} pe dia-



metrul, după care se tae planul cercului și planul elipsei; h_i distanța între cele două paralele $\overline{M_iN_i}$ și $\overline{M_{i+1}N_{i+1}}$; σ_i suprafața produsă prin rotația dreptei M_iM_{i+1} în jurul diametrului AA'; S suprafața sferii produsă prin rotația circonferenței considerate. Reprezint de asemenea, prin aceleași litere accentuate, elementele corespunzătoare la elipsă. Avem *prin definiție*:

(2) $S = 2.\,lim.\,sumei.\,supr.\,\sigma_i = lim.\,\Sigma\sigma_i.$

(3) $S' = 2.\,lim.\,sumei.\,supr.\,\sigma'_i = lim.\,\Sigma\sigma'_i.$

Cosinusul unghiului planului cercului cu planul elipsei fiind egal cu $\frac{b}{a}$, avem dupe formula (1):

$$\sigma'_i = \sigma_i \times \frac{b}{a} \times \cos(M_iM_{i+1}, M'_iM'_{i+1}).$$

Or:

$$\sigma_i = 2\pi a \times h_i$$

$$\cos(M_iM_{i+1}, M'M'_{i+1}) = \frac{\overline{M'_iL}}{\overline{M_iL}} \quad ^{1})$$

Introducînd aceste valori în expresiunea lui S' și scoțînd de sub semnul însumării, cantitățile ce rămîn constante, avem:

$$S' = 4\pi b \times lim.\,\Sigma h_i \times \frac{\overline{M'_iL}}{\overline{M_iL}}.$$

Pentru a efectua însumarea de mai sus, observ că dacă numărul punctelor de diviziune de pe circonferință crește din ce în ce, cele două direcțiuni $\overline{M_iL}$ și $\overline{M'_iL}$ tind a se confunda respectiv cu tangenta la circonferință și la elipsă în punctele M_i și M'_i; presupunînd că secantele au atins această poziție limită și însemnînd cu x_i distanța ON_i, avem:

$$\overline{M_iN_i}^2 = a^2 - x_i^2$$

$$\overline{M'_iN_i}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_i^2)$$

---

1) Cele două drepte M_iL și M'_iL sînt în realitate în planuri diferite, însă ele se întîlnesc evident pe intersecția celor două planuri, și dreapta M_iL, reprezentată pe figură, este rabaterea dreptei din spațiu și are aceiași lungime ca și ea.

$$\overline{OL}=\frac{a^2}{x_i}$$

iar:
$$\overline{LM_i}^2=\frac{a^2}{x_i}\left(\frac{a^2}{x_i}-x_i\right)=\frac{a^2(a^2-x_i^2)}{x_i^2}$$

$$\overline{LM'_i}^2=\overline{M_iN_i}^2+\overline{N_iL}^2=\left(\frac{a^2}{x_i}-x_i\right)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_i^2)$$

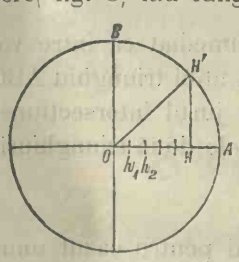
sau punînd: $a^2-b^2=c^2$ și $\frac{a^2}{c}=r^2$

$$\overline{LM'_i}^2=(a^4-c^2x_i^2)\frac{a^2-x_i^2}{a^2-x_i^2}=\frac{c^2}{a^2}\cdot(r^2-x_i^2)\frac{a^2-x_i^2}{x_i^2},$$

deci:
$$\frac{\overline{M'L}}{\overline{ML}}=\frac{c}{a^2}\times\sqrt{r^2-x_i^2}.$$

iar:
$$S'=\frac{4\pi bc}{a^2}\cdot lim.\Sigma h_i\times\sqrt{r^2-x_i^2}.$$

Consider un cerc de rază r și pe unul din diametrele acestui cerc (fig. 3) iau lungimi, plecînd de la centru, respectiv egale cu h_1, h_2....h_n; voi obține ast-fel, pe acest diametru un punct H, (OH=a) care va fi situat în interiorul cercului, căci:



$$a<r<\frac{a^2}{c}.$$

Or expresiunea:

$$lim.\Sigma h_i\times\sqrt{r^2-x_i^2}$$

nu este alt-ceva de cît porțiunea din suprafața cercului OHH'B. Insemnînd deci cu φ unghiul OH'H, unghiu ce este determinat prin relația:

$$\cos\varphi=\frac{HH'}{OH'}=\frac{b}{a},$$

vom avea:

$$2.lim.\Sigma h_i\times\sqrt{r^2-x_i^2}=\left(\frac{a^2}{c}\right)^2\varphi+\frac{a^2b}{c},$$

iar:

$$S'=2\pi b\left[b+\frac{a^2}{c}\varphi\right]$$

sau încă:
$$(4)\quad S'=2\pi b^2\left[1+\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi}\right].$$

Pentru $a=b$, $\varphi=o$ și formula de mai sus dă expresiunea cunoscută a suprafeței sferei:

$$S=4\pi a^2.$$

b) Volumul.

3.— Se știe că dacă se consideră o porțiune de suprafață plană și proecțiunea sa pe un plan, care face cu cel d'întâi un unghiu $\alpha \leqslant 90^0$, suprafața proecțiunei este egală cu suprafața dată multiplicată cu cosinusul unghiului inclinărei. Pe de altă parte am demonstrat, în articolul citat mai sus, că volumul produs prin rotația unui triunghiu, ce se învîrtește în jurul unei drepte oare-care din planul său, este egal cu suprafața triunghiului multiplicată cu circonferința descrisă de punctul de întîlnire al medianelor. Or, dacă se consideră un triunghiu și proecțiunea sa pe un plan oarecare, punctul de întîlnire al medianelor proecțiunei este evident proecțiunea punctului de întîlnire al medianelor triunghiului considerat.

Din teoremele reamintite mai sus, rezultă imediat că între voi lumele V și v produse, respectiv, prin rotația unui triunghiu ABC și de proecțiunea sa abc, ce se învîrtesc în jurul intersecțiunei planelor, în care se află situate fie-care din cele două triunghiuri-vom avea relațiunea:

$$v=V\cos^2\alpha. \qquad (4)$$

Relațiunea aceasta este adevărată nu numai pentru cazul unui triunghiu, dar în genere pentru o porțiune de suprafață plană oare-care.

In adevăr, să considerăm mai întâi un poligon P de n laturi și proecțiunea sa p. Luînd un punct în interiorul lui P și unindu-l cu fie-care din vîrfurile sale, el se va descompune în n triunghiuri, T_1, T_2....T_n, la care vor corespunde în poligonul p alte n triunghiuri: t_1, t_2....t_n. Intre volumele V_i și v_i produse respectiv prin rotația triunghiurilor T_i și t_i, în jurul intersecției planelor P și p, avem relația:

$$v_i=V_i\cos^2\alpha.$$

Scriind n relațiunii analoage cu precedenta pentru fie-care din triunghiuri, făcînd suma lor, și observînd că α, fiind unghiul celor 2 planuri rămîne același, obținem evident relația (4).

Volumul produs de o porțiune de suprafață plană, limitată prin o curbă, fiind *prin definiție* limita volumului produs de un poligon înscris, relația (4) este adevărată în toate cazurile.

4.— Aplicînd formula (4) pentru cazul unui cerc și al unei elipse, observînd că:

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2},$$

iar V este volumul unei sfere $\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$; avem pentru volumul elipsoidului de revoluție prelung:

$$v = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Notă.— Metoda de mai sus se aplică întocmai pentru găsirea *volumului* elipsoidului de revoluțiune *turtit* $\left(\frac{4}{3}\pi a^2 b\right)$, ea nu se mai aplică însă pentru găsirea suprafeței acestui elipsoid. Se găsește, ca suprafața unui asemenea elipsoid, depinde de efectuarea sumei:

$$\Sigma h_i \times \sqrt{r^2 + x_i^2},$$

care reprezintă un logaritm neperian; adică, funcțiune care ese din cadrul funcțiunelor algebrice elementare și funcțiunelor circulare; prin urmare nu este posibil a găsi în mod elementar suprafața elipsoidului de revoluție turtit.

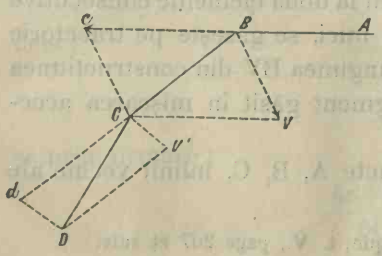
A. G. Ioachimescu.

O IPOTEZĂ A LUI NEWTON

1. Relativ la teoria mișcărei corpurilor cerești se pot face două ipoteze :

a) Concepțiunea lui Newton.—Se înscriu în trajectoriele curbe niște poligoane, în condițiune ca fie-care latură să fie percursă succesiv cu o mișcare uniformă în un același interval de timp τ.

Ast-fel în fig. 1, după ce mobilul a percurs cu o mișcare uniformă prima latură AB într'un interval de timp τ, dacă ar fi liber în momentul următor 'și-ar continua drumul său în aceiași direcțiune percurgînd o lungime Bc=AB în un interval de timp egal cu τ. Insă forța externă, care'l solicită, îi imprimă o deviațiune, ast-fel că sub impulsiunea ei, mobilul ar descrie o coardă Cc cu o mișcare



uniformă într'un interval de timp τ; prin urmare mobilul se va mișca în timpul τ cu o mișcare uniformă pe diagonala *Bc* a paralelogramului construit pe segmentele *Bc* și *Cc*.

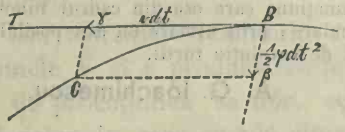
Aplicînd această construcțiune, se vede că iuțeala primitivă $\frac{Bc}{\tau}$ și iuțeala perturbatrice $\frac{Cc}{\tau}$ fiind cunoscute la un moment dat, se va putea cunoaște direcția laturei BC a poligonului, cum și legea după care este percursă. Se vor putea în acest mod construi toate laturile poligonului.

Reciproc, poligonul fiind dat se poate găsi legea mișcărei.

Cînd τ este infinit mic, Newton identifică mișcarea poligonală determinată cu mișcarea curbilinie riguroasă.

b) Rezultatele găsite în această ipoteză se acordă cu rezultatele găsite, făcînd o *concepțiune* deosibită, *datorită modernilor*.

In această teorie, se consideră pe traectoria curbă (fig. 2), două arcuri consecutive AB, BC, descrise în un acelaș interval de timp infinit mic, *dt*. Mobilul ajunge în punctul C prin compunerea a două mișcări continue:



α) *O mișcare uniformă*, care se efectuă în direcția tangentei BT în B, care este produsă de iuțeala primitivă *v*, care dacă ar lucra singură asupra mobilului B, l'ar face să descrie pe direcția acestei tangente în intervalul *dt* un spațiu $B\gamma = vdt$.

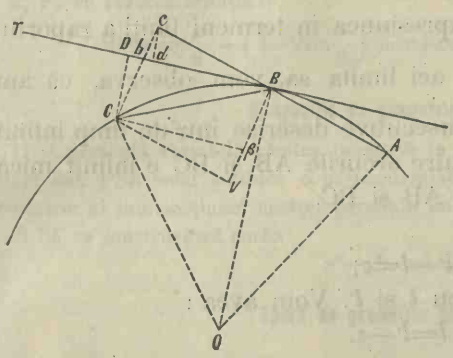
β) *O mișcare uniform accelerată* produsă de o forță acceleratrice φ, care lucrînd asupra mobilului, l'ar face să se miște în direcția sa cu un spațiu $B\beta = \frac{1}{2}\varphi dt^2$.

2. Aplicînd aceste două construcțiuni la două elemente consecutive descrise în intervale de timp infinit mici, se găsește pe traectorie același poziție C, cu condițiune ca lungimea BV din construcțiunea lui Newton, să fie egal cu 2Bβ, segment găsit în mișcarea accelerată. [1])

In adevăr se considerăm trei puncte A, B, C, infinit vecine ale

[1]) *J. B. Biot.*—Traité d'astronomie physique, t. V., page 207 et suiv.

traectoriei (fig. 3). Să descrim cerul osculator în punctul B, care evident va trece prin A și C; centrul acestui cerc să 'l insemnăm prin O. Fie:



$$\begin{cases} AB = l, \quad BC = l', \\ \sphericalangle AOB = \alpha, \ \sphericalangle BOC = \alpha', \\ BO = \rho. \end{cases}$$

După teoria lui Newton, pentru a se determina forța perturbatrice, se ia $Bc = AB = l$, se unește c cu C, iar prin B se duce BV paralelă la Cc și se ia segmentul $BV = Cc$.

După teoria modernă, se duce tangenta BT, care intersectează pe Cc în punctul b și pe direcția BV se ia $B\beta = Cb$.

După figură avem :

$$(1) \quad \begin{cases} AB = l = 2\rho \sin \frac{\alpha}{2} \\ BC = l' = 2\rho \sin \frac{\alpha'}{2} \end{cases}$$

Din punctul C și c să lăsăm perpendicularele CD și cd. Triunghiurile dreptunghe CDb și cdb sînt asemenea și prin urmare :

$$(2) \quad \frac{bc}{bC} = \frac{cd}{cD}.$$

Insă :

$$\begin{cases} cd = Bc \sin \frac{\alpha}{2} = l \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l^2}{2\rho} \\ CD = l' \sin \frac{\alpha'}{2} = \frac{l'^2}{2\rho} \end{cases}$$

deci :

$$\frac{bc}{bC} = \frac{l^2}{l'^2}$$

și prin urmare :

$$\frac{bc + bC}{bC} = \frac{l^2 + l'^2}{l'^2},$$

sau :

$$(3) \qquad \frac{BV}{B\beta}=\frac{l^2+l'^2}{l'^2}.$$

Relaţiunea (3) cuprinde expresiunea în termeni finiţi a raportului $\frac{BV}{B\beta}$. Pentru a deduce de aci limita sa, vom observa, că am considerat două elemente consecutive descrise într'un timp infinit mic, prin urmare diferenţa între arcurile AB şi BC e infinit mică şi *a fortiori* pentru coardele AB şi BC.

Să însemnăm, dar :

$$l'-l=\varepsilon;$$

ε fiind infinit mic în raport cu l şi l'. Vom avea :

$$(4) \qquad l=l'-\varepsilon.$$

Substituind în (3), vom avea :

$$\frac{BV}{B\beta}=\frac{(l'-\varepsilon)^2+l'^2}{l'^2}=\frac{2l'^2-2l'\varepsilon+\varepsilon^2}{l'^2}$$

$$=2-2\frac{\varepsilon}{l'}+\left(\frac{\varepsilon}{l'}\right)^2,$$

de unde :

$$\lim_{\varepsilon=o}\frac{BV}{B\beta}=2.$$

Ceia ce era de demonstrat.

I. Ghibaldan.

ŞCOALA DE PODURI ŞI ŞOSELE.

Concurs înscris pentru admiterea în Anul I-iu al Secţiunei Inginerilor.

15 Septembre 1896.

Compoziţie de algebră.

1) Să se găsească condiţiunile ca ecuaţia :

$$x^4+4ax^3+6bx+c=o$$

să aibă o rădăcină triplă.

2) Să se studieze variaţiunea funcţiunei :

$$y=x+\frac{3x^2-x}{2(1+x^2)}-\frac{3}{2}\mathrm{L}(1+x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Compoziție de trigonometrie.

1) Într'un triunghiu se dă o latură $a=380^m,25$; unghiul $B=54^o\ 20'\ 16''$; unghiul $C=27^o\ 15'\ 14''$. Să se calculeze bisectrița unghiului A.

2) Să se rezolve ecuația:

$$\sin 2x \sin\frac{x}{2} + \left(1-2\sin\frac{x}{2}\right)(\sin x+\cos x)=1+\sin x\cos x-2\sin\frac{x}{2}.$$

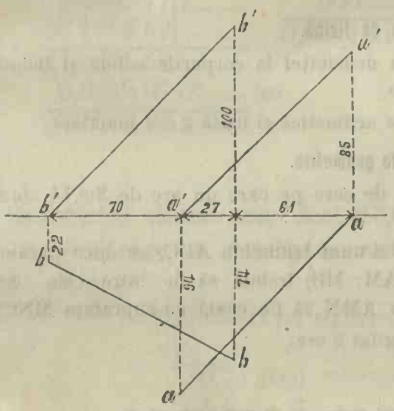
Compoziție de geometrie analitică.

1) O parabolă variabilă rămîne tangentă la o dreaptă fixă și are drept focar un punct dat. Prin focar se duce o perpendiculară pe axa parabolei. Se cere locul geometric al intersecțiunei acestei parabole cu perpendiculara.

2) Să se construească curba:

$$x^3-y^3-xy=o.$$

Epură de geometrie descriptivă.



Se dau două drepte $a'a$ și $b'b$ și se cere să se construească o sferă la care aceste drepte să fie tangente; să se afle punctele de contact.

Compoziție de fizică.

1) Legea amestecului gazelor.

2) Într'o presă hidraulică, baza marelui piston are diametrul de 5 decimetri și baza micului piston de 4 centimetri. Cursa pistonului celui mic este de 2 decimetri. Se întreabă

a) Care este volumul de apă ce trece din micul corp de pompă în marele corp de pompă, și prin urmare cu ce înălțime se va urca marele piston după 6 lovituri ale micului piston.

b) Care va fi presiunea exercitată asupra bazei pistonului celui mare, cînd presiunea totală asupra celui mic este de 120 kilograme.

c) Care este travaliul mecanic corespunzător unei lovituri de piston. Să se exprime rezultatele în unități C. G. S. și în unități din sistemul din mecanică (kilogram-pondere-metru-secundă).

Compoziție de chimie.

1) Să se a e greutatea în kilograme a piriților, apei și aerului absolut necesari la fabricarea a 100 kilograme de acid sulfuric pur. Cantitatea aerului se va evalua și în volume, în condițiunile normale de presiune și temperatură.

2) Să se trateze despre compușii azotului cu oxigenul.

(Timpul acordat pentru fie-care compoziție a fost de 4 ore).

Concurs înscris pentru admiterea în Anul I-iu al Secțiunei Conductorilor

25 Septembre 1896.

Compoziție de aritmetică.

1) Enunțarea și demonstrarea regulei pentru aflarea celui mai mare divizor comun al mai multor numere date.—Aplicațiune la numerele 540; 150; 84.

2) Să se găsească care este raza în metri a unui cerc a cărui suprafață este de 55,3896 stinjeni patrați de Moldova.

Compoziție de fizică.

1) Densitate; difinițiune. Determinarea densității la corpurile solide și lichide.

2) Reflexiunea luminei.— Oglinzi plane.

(Timpul acordat pentru compoziția de aritmetică și fizică 3 ore jumătate).

Compoziție de geometrie.

1) Să se calculeze raza circonferenței de cerc pe care un arc de $3^m,14$ corespunde la un unghiu la centru de 15°.

2) Prin punctul M aflat pe latura AB a unui triunghiu ABC, se duce paralela MN la BC. Să se calculeze ce raport (AM: MB) trebue să fie între cele două segmente AM și MB pentru ca suprafața AMN să fie egală cu suprafața MNCB.

(Timpul acordat 2 ore).

PROBLEME REZOLVITE [1]

***Problema 24.**— *Fracțiunea periodică mixtă 4,635252.... este scrisă în sistemul cu baza 8. Să se afle direct patratul acestei fracțiuni în sistemul cu baza 8, fără a trece prin sistemul cu baza 10 și prin fracțiuni ordinare.* **(I. Ionescu).**

Soluțiune dată de D-l Gr. N. Makarie, (București).

Cifrele sistemului *optimal* sînt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Cele două principii fundamentale ale unui sistem de numerațiune, pentru sistemul optimal se enunță astfel:

[1]) Problemele 82 și 86 le-a rezolvit și D-l *B. Paraschivescu.*

1) Opt unităţi de un ordin oare-care formează o unitate de ordin superior.

2) Cifra scrisă imediat la dreapta altei cifre reprezintă unităţi de ordinul imediat inferior.

Numele ce ar trebui să dăm ordinelor şi claselor sistemului optimal nu ne interesează.

Ţinînd seamă de aceste principii şi de metodele de calcul direct asupra fracţiunilor periodice [1]) soluţiunea problemei se obţine prin următoarele calcule:

$(4,63\ 5252....)^2 = 4,63\ 5252.... \times 4,63 + 4,63\ 5252.... \times 0,00\ 5252....$

| | | |

Pentru a ne convinge că în adevăr 52 este partea periodică a rădăcinei, am putea rîdica rădăcina la patrat pentru a vedea dacă obținem numărul dat. Putem proceda însă mai simplu în modul următor. Observăm că al treilea rest, 0,06316161.... este diferența între patratul rădăcinei găsite și a fracțiunei exacte 4,63 ; deci el este egal cu produsul sumei și diferenței numerilor 4,635252... și 4,63, adică produsul numerilor 11,465252... și 0,005252.... Impărțind acel rest cu 0,005252..... găsim în adevăr fracțiunea 11,465252....:

	0,06316161.....	0,005252...
	5252.....	11,4652.....
	104343.....	
	5252..	
	316161.....	
	25252.....	
	434343....	
	37777.....	
b)	343434....	
	32525.....	
	161616....	
	12525.....	
b)	343434....	

Prin urmare în adevăr 52 e partea periodică a rădăcinei. (I. I.)

***Problema 75.**— *Intr'un atelier lucrătorii sînt plătiți cu ziua, nu însă cu același preț. Ei sînt împărțiți în trei categorii. Prețul pe zi pentru acei din categoria a doua este cu 20% mai mare de cît al celora din categoria a treia, și cu 25% mai mic de cît al celora din categoria întăia. Să se determine numărul lucrătorilor din fie-care categorie, știind că într'o zi de lucru fie-cărei categorii de lucrători 'i s'a cuvenit aceași sumă, cîte 200 lei ; că numărul total al lucrătorilor este mai mic ca 120, și că nici unui lucrător nu 'i s'a cuvenit mai mult de 8 lei, nici mai puțin de 4 lei.*

(A. G. Ioachimescu.)

Soluție dată de D-nii A. Iliovici, (Iași); *Lazarus Scherer* (Student în medicină la Berlin) și *I. Moscuna* (București).

Fie x, y, z numărul lucrătorilor din fie-care categorie, și a, b, c prețurile pe zi de lucru.

Avem prin ipoteză :

$$(1) \qquad ax=by=cz=200$$

$$(2)\quad \begin{cases} b=a-\dfrac{25}{100}\,a=\dfrac{3}{4}\,a \\ b=c+\dfrac{20}{100}\,c=\dfrac{6}{5}\,c. \end{cases}$$

Din egalitățile (1) și (2) deducem :

$$8x=6y=5z$$

sau :

$$\frac{x}{30}=\frac{y}{40}=\frac{z}{48}=\frac{x+y+z}{118}$$

deci :

$$x=\frac{15(x+y+z)}{59}$$

x trebuind să fie întreg și 15 fiind prim cu 59, urmează ca $x+y+z$ să fie divizibil cu 59; însă :

$$x+y+z<120$$

și de la 0 pînă la 120 numai două numere sunt divizibile cu 59, anume 59 și 118. Luînd :

$$x+y+z=59$$

găsim :

$$x=15$$

$$a=\frac{200}{15}>8$$

soluțiunea aceasta este deci inadmisibilă, și rămîne :

$$x+y+z=118$$

care dă :

$$x=30$$
$$y=40$$
$$z=48$$
$$a=6{,}33\ ;\quad b=5{,}00\ ;\quad c=4{,}16$$

Soluție dată de D-nii Gr. N. Makarie (București); *C. Popovici* (Student, Iași).

Notațiile fiind aceleași ca mai sus, avem :

$$ax=by=cz=200$$

$$b=c+\frac{c}{5}=a-\frac{a}{4}$$

$$(1)\quad x+y+z<120$$

$$(2)\quad 4<a,\ b,\ c<8$$

de unde deducem :

$$x=\frac{200}{a}, y=\frac{800}{3a}, z=\frac{320}{a}$$

x, y, z trebuind să fie numere întregi, singurii divisori ai numerilor: 200, $\frac{800}{3}$ și 320, pentru care inegalitățile (2) sînt satisfăcute, sînt :

$$a=\frac{20}{3} \text{ și } a=\frac{40}{9}.$$

Soluțiunea: $a=\frac{40}{9}$

ne dă : $x+y+z>120,$

inegalitate neadmisibilă.

Rămîne : $a=\frac{20}{3}$

sau : $x=30, \quad y=40, \quad z=48.$

***Problema 76.**—*Se dă un semicerc cu centrul* O *și cu diametrul* AB *și un punct* C *între* O *și* A. *Să se determine pe semi-circonferința dată un punct M așa că :*

$$MB+MC=m.$$

Discuție în raport cu cantitatea m privită ca pozitivă.

(G. Țițeica.)

Soluție dată de D-l Gr. N. Makarie (București).

Să însemnăm cu α unghiul MOB. Avem, însemnnîd raza cu r și OC cu a :

$$\overline{MB}^2=\overline{MO}^2+\overline{OB}^2-2MO.OB.\cos\alpha=2r^2(1-\cos\alpha)=4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\overline{MC}^2=\overline{CO}^2+\overline{OM}^2+2.OM.OC\cos\alpha$$

$$\overline{MC}^2=a^2+r^2+2ar-2ar(1-\cos\alpha)=(a+r)^2-4ar\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

De aci deducem:

$$m=MB+MC=2r\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{(a+r)^2-4ar\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

de unde :

$$(1) \qquad 4r(a+r)\sin^2\frac{\alpha}{2}-4mr\sin\frac{\alpha}{2}+m^2-(a+r)^2=0,$$

și rezolvind în raport cu $\sin\frac{\alpha}{2}$, obținem :

$$(2) \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{mr\pm\sqrt{r[(a+r)^3-am^2]}}{2r(a+r)}$$

Această expresiune ne dă $\sin\frac{\alpha}{2}$ în funcțiune de cantități cunoscute : a, r și m. Prin urmare ea rezolvă problema.

Discuție. Pentru ca $\sin\frac{\alpha}{2}$ să fie real, trebue mai întăi ca radicalul să fie pozitiv, adică :

$$(a+r)^3-am^2\geq 0,$$

și pentru că m nu poate fi negativ după enunciu, va trebui să avem :

$$(3) \qquad m\leq(a+r)\sqrt{1+\frac{r}{a}}.$$

Pe de altă parte α fiind cuprins între 0 și 180°, $\sin\frac{\alpha}{2}$ nu poate avea valori de cît între 0 și 1. Inlocuind în (1) pe $\sin\frac{\alpha}{2}$ prin 0, obținem ca rezultat $m^2-(a+r)^2$. Dar 0 fiind afară din rădăcinile ecuației (1), rezultă că acest rezultat trebue să fie pozitiv, adică :

$$m^2-(a+r)^2\geq 0,$$

de unde :

$$(4) \qquad m\geq a+r.$$

Suma rădăcinilor ecuațiunei (1) fiind pozitivă, iar produsul rădăcinilor tot pozitiv din cauza relațiunei (4), rezultă că ambele rădăcini ale acestei ecuațiuni sunt pozitive.

Trebue însă ca aceste rădăcini pozitive să fie mai mici ca 1, pentru a fi admisibile.

Pentru a vedea cum stau rădăcinile față cu unitatea, să substituim pe 1 în locul lui $\sin\frac{\alpha}{2}$ din ecuațiunea (1). Obținem cu rezualtat:

$$4r(a+r)-4rm+m^2-(a+r)^2,$$

sau : $$(5) \qquad m^2-4mr+(3r^2+2ar-a^2).$$

Rădăcinile acestui trinom în m sînt :

$$m=2r\pm\sqrt{4r^2-3r^2+a^2-2ar}.$$

(6) $m_1 = 3r - a,$

(4') $m_2 = r + a.$

Conform relațiunei 4) m nu poate fi mai mic ca m_2. Dacă m este cuprins între m_1 și m_2, trinomul (5) este negativ. Deci rezultatul substituirei lui 1 în locul lui $\sin\frac{\alpha}{2}$ din ecuațiunea (1) este negativ. Deci 1 este cuprins între rădăcini. Prin urmare rădăcina cea mai mică este admisibilă, iar cea mai mare nu este admisibilă.

Dacă m este mai mare ca m_1, trinomul (5) este pozitiv și prin urmare rădăcinile ecuațiunei (1) nu cuprind între ele pe 1. Pentru a vedea dacă 1 este mai mare ca cea mai mare rădăcină, sau mai mic ca cea mai mică, să comparăm pe 1 cu semisuma rădăcinilor ecuațiunei (1). Această semisumă este $\frac{1}{2} \times \frac{m}{a+r}$.

Deci dacă :

$$\frac{1}{2} \times \frac{m}{a+r} < 1,$$

sau : (7) $m < 2(a+r)$ și $m > m_1$

atunci ambele rădăcini sînt mai mici ca 1 și prin urmare admisibile. In caz contrar cele 2 rădăcini pozitive nu sînt admisibile. Dar din compararea relațiunilor (6) și (7) deducem :

$$2(a+r) > m > 3r - a$$

și prin urmare trebue ca :

$$2a + 2r > 3r - a$$

sau: (8) $a > \frac{r}{3}.$

Dacă această condițiune este îndeplinită, atunci pentru toate valorile lui m cuprinse între m_1 și valoarea lui m dată de relația (3), problema admite 2 soluțiuni.

E ușor de văzut că m_1 este mai mic ca valoarea lui m dată de relația (3), căci aceasta revine a proba neegalitatea :

$$(3r - a)^2 < \frac{1}{a}(a+r)^3,$$

sau : $$(3a - r)^2 > 0,$$

relațiune evidentă.

De asemenea se poate vedea ușor că $m_1 < m_2$, căci aceasta revine a proba că :

$$3r-a<a+r,$$

sau :

$$r>a,$$

ceia-ce are loc după enunciu, punctul O fiind cuprins între O și A.

Rezumînd această discuție ajungem la următoarele concluziuni:

	1) $m<a+r$	Nici o soluțiune.
	2) $m=a+r$	O soluțiune (Punctul B).
	3) $a+r<m<3r-a$	O soluțiune.
	4) $m=3r-a$	O soluțiune (Punctul A).
$a>\frac{r}{3}$	5) $3r-a<m<(a+r)\sqrt{1+\frac{r}{a}}$	Două soluțiuni.
	6) $m=(a+r)\sqrt{1+\frac{r}{a}}$	O soluțiune.
	7) $m>(a+r)\sqrt{1+\frac{r}{a}}$	Nici o soluțiune.
$a=\frac{r}{3}$	8) $m=3r-a=(a+r)\sqrt{1+\frac{r}{a}}$	O soluțiune (Punctul A).
$a<\frac{r}{3}$	9) $m>3r-a$	Nici o soluțiune.

Dacă $a=o$, aceste condițiuni devin :

$m<r$	Nici o soluțiune.
$m=r$	O soluțiune (Punctul B).
$r<m<3r$	O soluțiune.
$m=3r$	O soluțiune (Punctul A).
$m>3r$	Nici o soluțiune.

Dacă $a=r$, condițiunile devin :

$m<2r$	Nici o soluțiune.
$m=2r$	Două soluțiuni (A și B).
$2r<m<2r\sqrt{2}$	Două soluțiuni.
$m=2r\sqrt{2}$	O soluțiune.
$m>2r\sqrt{2}$	Nici o soluțiune.

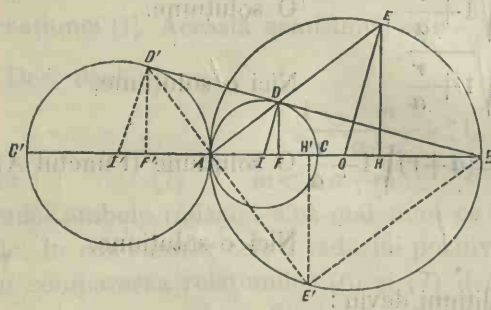
* **Problema 87.**— *Pe o dreaptă* AB *să se construiască o circonferență care să treacă prin punctul* A *și al cărei centru e pe* AB, *astfel că perpendiculara pe* AB, *coborîtă din punctul de atingere al tangentei dusă din punctul* B *la cir-*

conferență, să împartă diametrul circonferenței în medie și extremă rație. (A. Iliovici.)

Soluție dată de D-nii: C. Popovici (Iași); *C. Popescu* (Elev în Anul al V-lea Școalei Normale de Institutori din București); *Gr. N. Makarie* (București) și *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național din Iași).

Vom deosebi două cazuri:

1) *Centrul I al circonferenței căutate este situat pe dreapta* AB. Fie F piciorul perpendicularei scoborîtă din punctul de atingere D pe dreapta AB. Dacă însemnăm cu a lungimea dreptei AB, prin x raza necunoscută AI și prin y distanța IF, avem după enunciu:



$$\overline{AF}^2 = AC \times FC,$$

sau: $(x+y)^2 = 2x(x-y)$. (1)

Triunghiul dreptunghiu IDB ne dă:

$$\overline{ID}^2 = IF \times IB,$$

sau: $x^2 = y(a-x)$. (2)

Dacă între (1) și (2) eliminăm pe y, obținem ecuația:

$$4x^2 - 6ax + a^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$x_1 = \frac{a}{4}(3-\sqrt{5}); \qquad x_2 = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5}).$$

Rădăcina x_1 singură convine problemei. Rădăcina x_2 nu convine, de oare ce avem:

$$\frac{a}{4}(3+\sqrt{5}) > a.$$

Observăm că rădăciana x_1 se poate pune sub următoarele două forme:

$$x_1 = \frac{\frac{a}{2}}{2}(3-\sqrt{5}); \qquad x_1 = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

Prima formă ne arată că raza circonferenței căutate este partea cea mai mică a jumătății dreptei AB împărțită în medie și extrema rație.

A doua formă ne arată, că raza circonferenței căutate se mai poate obține, împărțind jumătatea dreptei AB în medie și extremă rație, iar segmentul cel mai mare ast-fel obținut, îl împărțim iarăși în medie și extremă rație și luăm partea cea mai mare al acestui segment.

2) *Centrul* I' *al circonferenței căutate este pe prelungirea dreptei* BA *și la stînga punctului* A.

Dacă notăm ca și mai sus AI'$=x$, I'F'$=y$, avem după enunciu

$$C'F'^2=AC'\times AF',$$

sau
$$(x+y)^2=2x(x-y). \qquad (3)$$

Triunghiul dreptunghiu I'D'B ne dă:

$$x^2=y(a+x). \qquad (4)$$

Eliminînd pe y între (3) și (4) obținem ecuația:

$$4x^2+2ax-a^2=0,$$

a cărei singură rădăcină admisibilă este cea pozitivă:

$$x_1=\frac{a}{4}(\sqrt{5}-1),$$

care ne arată că raza circonferenței căutate este în acest caz partea cea mai mare a jumătății dreptei AB împărțită în medie și extrema rație.

Soluțiune dată de D-l I. Anastasiadi (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Punctul F divizînd pe AC în medie și extremă rație avem:

$$1) \qquad \frac{AF}{CF}=\frac{AC}{AF}, \quad \text{sau} \quad AF=AC\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Punctul F fiind pe polara punctului B în raport cu cercul AC, el este conjugatul armonic al punctului B în raport cu dreapta AC. Deci:

$$2) \qquad \frac{AF}{CF}=\frac{AB}{CB}.$$

Compararea raporturilor 1) și 2) ne dă:

$$\frac{AC}{AF}=\frac{AB}{CB}$$

în care înlocuind primul raport prin valoarea sa, iar pe CB prin diferența AB—AC, deducem:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{AB}{AB-AC}$$

de unde:

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{AC}{AB}$$

și prin urmare:

$$AC=AB\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Generalizare dată de D-l I. Moscuna (București). Pe AB ca diametru descrim o circonferență. Fie E punctul de întîlnire al acestei circonferențe cu dreapta AD și H proecțiunea lui E pe AB. Unim C cu D și B cu E. In triunghiurile dreptunghe ADC AEB, avem:

$$\frac{FA}{FC}=\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2}. \qquad \frac{HA}{HB}=\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EB}^2}.$$

Insă:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{EA}{EB}$$

și deci:

$$\frac{FA}{FC}=\frac{HA}{HB}$$

Punctul H împarte deci dreapta AB în același raport în care F împarte diametrul căutat AC. De aci următoarea construcție:

Impărțim dreapta AB în raportul dat. Prin punctul de diviziune H ridicăm o perpendiculară care întîlnește circonferența de diametru AB în punctul E. Unim A cu E și din B ducem o perpendiculară pe raza OE a circonferenței AB. Această perpendiculară întîlnește dreapta AE în punctul de contact D. Din D ducem o paralelă DC la EB. Atunci AC va fi diametrul circonferenței căutate.

Pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca raportul dat $\frac{FA}{FC}=\frac{HA}{HB}$ să fie mai mare ca unitatea.

Avem în totdeauna două soluțiuni, diametrul AC putînd fi pe și prelungirea dreptei AB. In acest caz pentru ca problema să fie posibilă trebue ca raportul dat $\frac{F'A}{F'C}=\frac{H'A}{H'B}$ să fie mai mic ca unitatea, iar punctul de contact D' se va obține luînd intersecțiunea perpendicularei BD la OE cu dreapta AE'.

***Problema 89.** — *Se împarte o circonferință în 8 părți egale. Fie,* A_1, A_2... A_8 *punctele de diviziune. Să se găsească lungimea liniei frînte:* $A_1A_2A_4A_7A_8A_6A_5$, *cunoscînd raza circonferenței.* **(A. G. Ioachimescu.)**

Soluție dată de D-nii: I. Anastasiadi (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *A. Iliovici* (Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI de la Liceul Național din Iași); *D. Ioachimescu* (București); *C. Ionescu* (Sergent în Regimentul I de Geniu, București); *Gr. N. Makarie* (București); *C. Mateiescu,* (Elev în Clasa VII de la Liceul Carol I din Craiova); *I. Moscuna* (București); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Ploești); *C. Popovici* (Student Iași); *T. Săvulescu* (Elev al Școalei Normale de Institutori, București); *Cotoșman Virgiliu* (București).

Avem evident:

$$A_1A_2=A_6A_5$$
$$A_2A_4=A_6A_8$$
$$A_4A_7=A_8A_3$$

deci lungimea căutată este egală cu:

$$L=2(A_1A_2+A_2A_4+A_4A_7)+A_7A_3.$$

Insemnînd cu R raza circonferinței date și observînd că:

A_1A_2 este latura octogonului regulat ordinar înscris, A_2A_4 latura patratului, iar A_4A_7 latura octogonului regulat stelat înscris, avem:

$$A_1A_2=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$A_2A_4=R\sqrt{2}$$
$$A_4A_7=R\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

deci: $$L=2R(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+1).$$

Sau încă, observînd că:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}$$
$$L=2R+2R\sqrt{2}(1+\sqrt{2+\sqrt{2}}).$$

***Problema 97.**—*Să se arate că numărul:*

$$2^{8n+3}.3^{5n}+2^{2n+3}.3^{n+1}.7^{n}+127.3^{n}.5^{n+1}-2^{4}.3^{n+2}.5^{n}-5^{2}.3^{2n+1}$$

este totdeauna divizibil prin 1896. *Numărul întreg n nu poate fi egal cu zero.* **(G. Țițeica.)**

Soluție dată de D-nul Gr. N. Makarie, (București).

Numărul dat se poate scrie:

$$3\left\{2^{3}\left[2^{8n}.5^{3n}+2^{2n}.3^{n}.7^{n}-2.5^{n}\right]+3^{n}.5^{2}\left[5^{n}.127^{n}-3^{n}\right]\right\}$$

$$=3\left\{2^{3}\left[(2^{8}.5^{3})^{n}-5^{n}+(2^{2}.3.7)^{n}-5^{n}\right]+3^{n}.5^{2}\left[(5.127)^{n}-3^{n}\right]\right\}$$

$$=3\left\{2^{3}\left[m.(2^{8}.5^{3}-5)+m'.(2^{2}.3.7-5)\right]+3^{n}.5^{2}.m''.(5.127-3)\right]\right\}$$

$$=3\left\{2^{3}\left[\mathrm{M}.79+m'.79\right]+\mathrm{M}''.2^{3}.79\right]\right\}=\mathscr{M}.3.2^{3}.79=\mathscr{M}.1896.$$

***Problema 98.**— *Să se determine progresiunea geometrică cu numărul minimum de termeni, dintre cari face parte și* $\frac{1}{12}$, *și care să aibă ca prim termen pe* $\frac{4}{151875}$ *și ca ultim termen pe* $\frac{11390625}{768}$.

(Gr. N. Makarie.)

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (București), *C. Popovici,* (Iași) și *A. Iliovici* (Iași).

Cîtul dintre un termen oare-care al unei progresiuni geometrice și primul termen este o putere a rației. Așa dar cîturile:

$$\frac{11390625}{768}:\frac{4}{151875}=\frac{3^{5}\times5^{6}}{2^{8}}:\frac{2^{2}}{3^{5}\times5^{4}}=\left(\frac{15}{2}\right)^{10},$$

$$\frac{1}{12}:\frac{4}{151875}=\frac{1}{2^{2}\times3}:\frac{2^{2}}{3^{5}\times5^{4}}=\left(\frac{15}{2}\right)^{4},$$

reprezintă două puteri întregi m și m' ale rației q. Prin urmare avem:

$$q^{m}=\left(\frac{15}{2}\right)^{10}\quad\text{și}\quad q^{m'}=\left(\frac{15}{2}\right)^{4},$$

de unde:

$$q=\left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{10}{m}}=\left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{4}{m'}},$$

și deci:

$$\frac{10}{m}=\frac{4}{m'},$$

sau:

$$\frac{m}{m'}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

Fiind că numărul $(m+1)$ este numărul de ordine al ultimului termen, rezultă că numărul termenilor este minimum cînd m este

minimum. Dar fracțiunea $\frac{5}{2}$ fiind ireductibilă, rezultă că minimul lui m este 5 iar al lui m' este 2. Deci rația este:

$$q=\left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{10}{5}}=\left(\frac{15}{2}\right)^{2}=\frac{225}{4}.$$

Prin urmare progresiunea căutată este:

$$\frac{4}{151875} : \frac{1}{675} : \frac{1}{12} : \frac{225}{48} : \frac{50625}{192} : \frac{11390625}{768}.$$

***Problema 99.**— *Să se rezolve în numere întregi ecuația:*

$$x^2-xy+x=0. \qquad \text{(C. Popovici)}$$

Soluție dată de D-nii: G. Iliovici (Elev în Clasa VI de la Liceul Național din Iași) și *Gr. N. Makarie* (București).

Dacă rezolvim ecuația dată în raport cu y obținem:

$$y=\frac{x^2}{x-1}=\frac{(x^2-1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}.$$

Pentru ca y să fie întreg trebue deci ca $x-1$ să dividă pe 1. Insă 1 nu se divide de cît prin 1. Trebue dar ca să avem $x-1=1$, sau $x=2$, ceia ce ne dă $y=4$. Prin urmare pe lîngă soluțiile nule evidente $x=0$, $y=0$, ecuația dată admite soluțiile întregi $x=2$, $x=4$.

Soluție dată de D-nii: A. Iliovici (Iași); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Ploești) și *T. Săvulescu,* (Elev al Școalei Normale de Institutori din București).

Rezolvind ecuația dată în raport cu x avem:

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4y}}{2}.$$

Pentru ca x să fie întreg, trebue ca y^2-4y să fie sau un patrat perfect a cărui rădăcină să fie de aceiași paritate cu y; sau ca y^2-4y să fie egal cu zero, în care caz trebue tot o dată ca y să aibă valori pare. Insă y^2-4y nu poate fi un patrat perfect de oare-ce îi lipsește terminul $+4$. Trebue dar să avem:

$$y^2-4y=0, \text{ sau } y(y-4)=0,$$

de unde $y=0$, sau $y=4$, ceia ce ne dă respectiv pentru x valorile $x=0$ și $x=2$.

PROBLEME PROPUSE

153. Fie P și Q punctele unde tangenta în M la o curbă C întîlnește axele de coordonate Ox, Oy și R proecția punctului O pe tangentă. Să se determine curba C așa ca:

$$MP + QR = o.$$

(G. Țițeica.)

*154. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$$
$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{2a}.$$

(A. G. Ioachimescu.)

*155. Din vîrful unghiului drept al unui triunghiu dreptunghiu ducem bisectrița, mediana și înălțimea. In ce caz prima din aceste linii este medie proporțională între celelalte două?

(I. Ionescu.)

156. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & . & . & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & n & . & . & n \end{vmatrix}$$

(Constanța Pompilian.)

*157. Să se construiască un triunghiu în care se cunoaște un unghiu, raportul între suma și diferența laturilor ce formează unghiul și suma sau diferența între latura a treia și una din laturile unghiului.

(C. Popovici.)

*158. Să se găsească reziduurile cuadratice relative la modulul prim 43.

(I. Ghibaldan.)

*159. Să se rezolve ecuația:

$$4x^7-8ax^6-4(c^2+d)x^5+8a(c^2+d)x^4+d(4c^2+d)x^3$$
$$-2ad(4c^2+d)x^2-c^2d^2x+2ac^2d^2=o.$$

(G. Iliovici.)

*160. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor unui triunghiu ABC. Să se demonstreze că dacă avem $A'B=B'C$ și $A'C=C'B$, atunci triunghiul este echilateral.

(I. Ionescu.)

*161. O sferă de rază r se vîră într'o sferă de rază R până ce sfera r atinge centrul sferei R. Să se afle volumul porțiunei din sfera r ce rămîne în afară de sfera R, precum și volumul porțiunei comune ambelor sfere în funcțiune de R și r. Se presupune $2r > R$.

(A. Iliovici.)

162. Să se determine o parabolă dîndu-se focarul, o tangentă și parametrul.

(Bogdan Ionescu.)

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA SIMULTANEE.

Să presupunem că din suma unor numere trebue să scădem suma altor numere. Rezultatul căutat ar necesita prin urmare executarea a trei operațiuni separate și anume două adunări și o scădere. Sînt însă mijloace care ne permit de a obține rezultatul făcîndu-se de o dată toate aceste operațiuni. Un asemenea mijloc este dat în *„Recreațiunile matematice“* ale lui *Ozanam* publicate în secolul trecut; un alt mijloc este bazat pe teoria complimentului aritmetic [1]). Metoda ce vom trata este o modificare a metodei bazată pe complimentul aritmetic. Vom da mai întâi regula pentru numerele întregi și apoi pentru fracțiuni.

1) **Numere întregi.** *Pentru a face adunarea și scăderea simultanee a mai multor numere întregi, vom scrie aceste numere unul sub altul, ast-fel ca cifrele de aceiași ordine să vie una sub alta. Vom complecta cu zerori puse la stînga toate numerile cari au mai puține cifre de cît numărul care are cele mai multe cifre, ast-fel ca toate numerile să aibă același număr de cifre. Vom pune semnul + înaintea numerilor cari trebuesc adunate și semnul — înaintea numerilor cari trebuesc scăzute. Adunăm apoi numerile ast-fel scrise ca la adunarea obișnuită, observînd însă: 1) ca în locul cifrelor din numerile precedate de semnul — să considerăm la adunare diferența între 9 și acele cifre; 2) la coloana unimilor să mai adunăm atîtea unități cîte numere au semnul —; 3) din numărul format la stînga sumei de cifrele de ordin mai înalt ca primele cifre ale numerilor date (complectate cum am spus), să scădem atîtea unități cîte numere au semnul —.*

Exemplu. O persoană depune la un bancher 45273 lei, mai depune altă dată 351 lei, retrage apoi o dată 4534 lei, altă dată 25431, mai depune 98531 și în fine bancherul plătește pentru dînsa 12 lei. Se cere a se ști cît mai are depus la bancher acea persoană.

După regula dată operațiunea se va dispune ast-fel:

---

[1]) Se știe că complimentul aritmetic al unui număr întreg, este diferența între 1 urmat de atîtea zerori cîte cifre are acel număr și numărul considerat.

$$
\begin{array}{r}
+45273 \\
+00351 \\
-04534 \\
-25431 \\
+98531 \\
-00012 \\
\hline
114178
\end{array}
$$

Pentru a afla rezultatul s'a procedat în modul următor:

1) $\underset{9-2}{7} + 1 + \underset{9-1}{8} + \underset{9-4}{5} + 1 + 3 + \underset{3\text{ ori}-}{3} = 28$ Scrim 8 și reținem 2.

2) $\underset{\text{reținere}}{2} + \underset{9-1}{8} + 3 + \underset{9-3}{6} + \underset{9-3}{6} + 5 + 7 = 37$ » 7 » » 3.

3) $\underset{\text{reținere}}{3} + \underset{9-0}{9} + 5 + \underset{9-4}{5} + \underset{9-5}{4} + 3 + 2 = 31$ » 1 » » 3.

4) $\underset{\text{reținere}}{3} + \underset{9-0}{9} + 8 + \underset{9-5}{4} + \underset{9-4}{5} + 0 + 5 = 34$ » 4 » » 3.

5) $\underset{\text{reținere}}{3} + \underset{9-0}{9} + 9 + \underset{9-2}{7} + \underset{9-0}{9} + 0 + 4 = 41$ » 1 » » 4.

6) $\underset{\text{reținere}}{4} - \underset{3\text{ ori}-}{3} = 1.$

Rezultatul căutat este prin urmare 114178.

Această regulă se poate demonstra foarte ușor. Pentru aceasta observăm că:

$$99999 + 1 - 100000 = 0.$$

Să adunăm la fie-care din numerile precedate de semnul —, expresiunea 99999+1—10000. Această expresiune fiind nulă rezultatul nu se va schimba.

Vom avea deci:

$$
\begin{array}{r}
+45273 \\
+00351 \\
99999-04534+1-100000 \\
99999-25431+1-100000 \\
+98531 \\
99999-00012+1-100000.
\end{array}
$$

De aci se vede imediat că putem face adunarea în modul obișnuit înlocuind numerile precedate de semnul — prin diferența dintre 99999 și acele numere, ceea ce revine la a înlocui fie-care cifră a acelor numere prin diferența dintre 9 și acea cifră, scădere

totdeauna posibilă; a spori unimile cu 3 unități și a micșora sutimile de mii cu 3. Regula dată este deci demonstrată.

Observarea 1. Este evident că ne putem dispensa de a scrie zerorile pentru complectarea numărului cifrelor. Aceasta ne-o putem închipui ca făcută la toate numerile precedate de semnul —, căci la cele precedate de semnul + complectarea după cum se poate vedea, nu are nici o importanță.

Observarea 2. Se poate întîmpla ca aplicînd regula dată, să nu putem efectua scăderea dată la No. 3 al acelei regule. Aceasta ne indică că suma numerilor ce trebuiau scăzute, e mai mare ca suma numerilor ce trebuiau adunate. Ast-fel în exemplul dat cu bancherul, ar fi urmat că persoana numai are nimic depus ci din contră mai datorește bancherului. In acest caz va trebui deci să reîncepem operațiunea scăzînd din suma numerilor de scăzut, suma numerilor de adunat, ceia ce revine la a schimba semnele puse înaintea numerilor unele în altele, adică + cu — și viceversa.

Ne putem însă dispensa de aceasta a doua operațiune, și a obține rezultatul căutat servindu-ne de rezultatul obținut la prima operațiune, aplicînd următoarea regulă:

Scădem atîtea unități cîte se poate, iar la dreapta numărului ce ar mai fi trebuit scăzut micșorat cu 1, scrim în locul cifrelor obținute la prima operațiune, diferența dintre 9 și acele cifre. Numărul obținut sporit cu 1 va fi rezultatul căutat.

Fie de exemplu:

$$\begin{array}{r} +234 \\ -271 \\ +012 \\ -948 \\ \hline 027 \\ 073 \end{array}$$

Procedînd după regula data ar trebui ca din 1 să scădem pe 2, ceia ce e imposibil. Dacă scădem numai o unitate ne ar mai rămîne de scăzut încă o unitate. Dacă însă am spori pe unul din numerile de adunat cu 1000, rezultatul s'ar spori tot cu 1000 atunci am putea scădea și acea unitate și am avea ca rezultat 27, conform regulei date. Reese de aci că rezultatul căutat este 1000—27 sau: 999—27+1=973. Se vede dar că am scăzut ce

s'a putut scade, că am redus cu 1 cifra de rangul al 4-lea, care ar mai fi trebuit scăzută (1), iar la rest (aci zero) am scris în locul cifrelor de la primul rezultat, diferența dintre 9 și fie-care din acele cifre, iar numărul obținut l'am sporit cu 1.

Aceasta justifică a doua din regulele date.

2) **Fracțiuni ordinare.** In acest caz vom aduce fracțiunile la același numitor ca și cum le-am aduna pe toate, vom face adunarea și scăderea simultanee a numărătorilor, și la rezultat vom da de numitor pe numitorul comun.

3) **Fracțiuni zecimale.** Pentru fracțiunile zecimale se va proceda ca și la numerile întregi, observînd însă a complecta (prin zerori puse la dreapta), sau a ne imagina același număr de zecimale la toate numerile. Exemplu:

$$\begin{array}{r} +\ 4{,}53 \\ -234{,}751 \\ -\ 5{,}4 \\ +\ 23{,}21 \\ -\ 51{,}72 \\ \hline 735{,}869 \quad (2-3) \\ 264{,}131 \end{array}$$

Observare. Avantagiul metodei indicate față de metoda bazată pe teoria complimentului aritmetic, este că ne dispensează de a ține seama de ultimele cifre semnificative ale numerilor de scăzut. Acele cifre ar trebui scăzute din 10, cele de la stînga din 9, iar zerorile de la dreapta ar trebui lăsate nemodificate. Aceasta produce adesea ori confuziuni, care fac ca să se obțină rezultate greșite.

I. Ionescu.

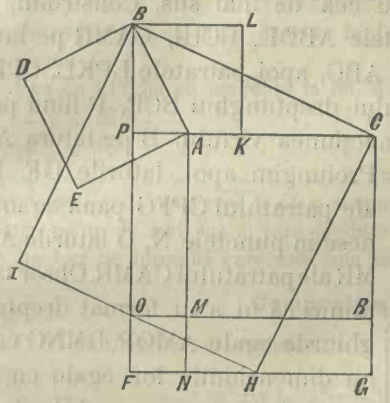
Expresiunea patratului laturei unui triunghiu opusă unui unghiu ascuțit sau obtus.

Vom demonstra următoarele două teoreme relative la această chestiune, servindu-ne numai de teorema lui Pitagora.

Teorema 1. In ori-ce triunghiu, patratnl construit pe o latură opusă unui unghiu obtus, este egal cu suma patratelor construite pe celelalte două laturi, mărită cu îndoitul drept-

unghiului ce are ca dimensiuni una din laturile unghiului obtus și proecțiunea celei-lalte laturi pe cea dintâi.

Pentru a demonstra această teoremă, construim patratele ABDE BCIH, ACRM pe laturile AB, AC, BC ale triunghiului considerat și fie P proecțiunea vîrfului B pe latura AC. Construim asemenea patratele BPKL, CPFG pe catetele BP, CP ale triunghiului drept unghiu BPC și prelungim laturile AM, RM ale patratului ACRM până ce întîlnesc în punctele N, O laturile FG, PF ale patratului CPFG. Observăm atunci că ni s'au format dreptunghiurile egale AMOP, MRGN, căci AM=MR=AC ca laturi ale aceluiași patrat, iar MO=MN=AP fiind că fie-care din aceste lungimi exprimă diferența între una din laturile patratului CPFG și una din laturile patratului ACRM. Prin urmare ambele dreptunghiuri AMOP, MRGN au dimensiunile lor egale cu latura AC și proecțiunea AP a laturei AB pe AC. Mai observăm încă că MNFO este patratul construit pe PA.



Acestea fiind spuse, aplicînd triunghiului dreptunghiu BCP teorema lui Pitagora, avem:

$$BCHI=CPFG+BPKL \qquad (1)$$

Dar de pe figură observăm că:

$$CPFG=ACRM+MNFO+2\times AMOP$$

și prin urmare egalitatea (1) devine:

$$BCHI=ACRM+MNFO+BPKL+2\times AMOP. \qquad (2)$$

Dar MNFO, BPKL fiind patratele construite pe catetele AP, BP ale triunghiului dreptunghiu APB, avem conform teoremei lui Pitagora:

$$MNFO+BPKL=ABDE,$$

și prin urmare egalitatea (2) devine:

$$BCHI=ACRM+ABDE+2\times AMOP, \qquad (3)$$

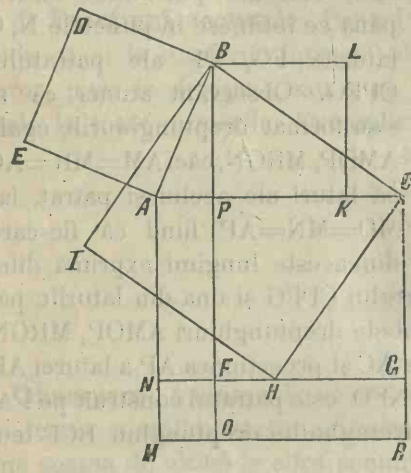
ceia ce demonstrează teorema enunțată.

Egalitatea (3) sub o altă formă, se poate scrie:

$$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2+2AC\times AP.$$

Teorema 2. In ori-ce triunghiu, patratul construit pe o latură opusă unui unghiu ascuțit, este egal cu suma patratelor construite pe cele-lalte două laturi, micșurată cu îndoitul dreptunghiului ce are ca dimensiuni una din laturile unghiului ascuțit și proecțiunea celeilalte laturi pe cea d'intâi.

Demonstrația este analoagă cu cea de mai sus. Construim, ca și la teorema precedentă, patratele ABDE, BCHI, CAMR pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC, apoi patratele BPKL, CPFG pe catetele BP, PC ale triunghiului dreptunghiu BCP, P fiind proecțiunea vîrfului B pe latura AC. Prelungim apoi laturile GF, PF ale patratului CPFG până ce întîlnesc în punctele N, O laturile AM, MR ale patratului CAMR. Observăm atunci că ni s'au format dreptunghiurile egale AMOP, RMNG care au dimensiunile lor egale cu latura AC și proecțiunea AP a laturei AB pe AC, căci AM=MR=AC ca laturi ale aceluiași patrat, iar MO=MN=AP căci fie-care din aceste lungimi exprimă diferența între una din laturile patratului CAMR și una din laturile patratului CPFG. Rezultă încă că MNFO este patratul construit pe AP.



Dacă considerăm triunghiul dreptunghiu BPC, avem după teorema lui Pitagora:

$$BCHI = CPFG + BPKL \qquad (1')$$

Se vede însă ușor că:

$$CPFG = CAMR - 2 \times AMOP + MNFO$$

și prin urmare egalitatea (1') devine:

$$BCHI = CAMR + MNFO + BPKL - 2 \times AMOP \qquad (2')$$

Teorema lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghiu BCP ne dă:

$$MNFO + BPKL = ABDE$$

și deci egalitatea (2') devine:

$$BCHI = CAMR + ABDE - 2 \times AMOP \qquad (3')$$

ceia ce demonstrează teorema.

Egalitatea (3) se mai poate scri:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC \times AP.$$

G. Iliovici.

ȘCOALA DE PODURI ȘI ȘOSELE.

CONCURS INSCRIS PENTRU ADMITEREA IN ANUL PREPARATOR.

(7 Octombre 1896).

Compoziție de aritmetică.

Un comerciant dă unui bancher la 14 Mai patru polițe cu scadențe deosebite și anume :

Una de 518 lei cu scadența la 30 Mai
„ „ 370 „ „ „ „ 14 Iunie
„ „ 1600 „ „ „ „ 6 Iulie
„ „ 720 „ „ „ „ 1 August

și în locul lor bancherul îi dă o singură poliță de o sumă egală cu suma celor patru polițe de mai sus și care produce tot atîta dobîndă cît și cele patru polițe la un loc. Se întreabă care este ziua scadenței acestei polițe.

Compoziție de algebră.

1) Să se simplifice expresiunea:

$$\frac{x^2+y+\sqrt[3]{z^2}-2x\sqrt{y}+2x\sqrt[3]{z}-2\sqrt[6]{y^3z^2}}{x^2-y-\sqrt[3]{z^2}+2\sqrt[6]{y^3z^2}}.$$

2) Fie ecuațiunea:

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{a}{x}}=\sqrt{2b}$$

în care a este un număr pozitiv dat. Să se indice cum trebue să fie b pentru ca ecuațiunea făcută rațională să aibă: 1° rădăcini reale și inegale; 2° rădăcini egale. Să se rezolve.

3) Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$x-ay+a^2z-a^3=o$$
$$x-by+b^2z-b^3=o$$
$$x-cy+c^2z-c^3=o.$$

(Timpul acordat pentru compoziția de aritmetică și algebră 4 ore.)

Compoziție de geometrie.

1) Cu o rază dată, să se descrie o circonferență care să fie tangentă de o dată la o dreaptă dată și la o circonferență dată.

2) Să se calculeze volumul unei sfere circumscrise la un cub a cărui latură este egală cu 1.

Compoziție de trigonometrie.

Se dă:

$$tgx=2-\sqrt{3}.$$

Să se calculeze:

$$\sin x,\ \cos x;\ \sin 2x,\ \cos 2x;\ \sin\frac{x}{2},\ \cos\frac{x}{2}.$$

Din valoarea obținută pentru $\sin 2x$ să se deducă expresiunea generală a arcelor corespunzătoare.

(Timpul acordat pentru compoziția de geometrie și trigonometrie 4 ore.)

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL INSCRIS DE ADMITERE IN ȘCOALA SPECIALA DE ARTILERIE ȘI GENIU.

(1896).

Algebră.

1) Să se facă discuția formalei rădăcinilor ecuațiunei de gradul al doilea.

2) Să se împartă numărul 140 în două părți ast-fel ca o parte mărită cu 10 să fie egală cu a cincea parte din a doua.

Geometrie.

1) Dîndu-se într'un triunghiu oare-care ABC laturile: AB=18 metri, BC=15 metri, AC=12 metri să se afle distanța de la piciorul bisectriței unghiului C pînă la mijlocul laturei AB.

2) Dîndu-se o dreaptă AB=21 metri, să se construească pe această dreaptă un triunghiu dreptunghiu în A, ast-fel ca ipotenuza BC plus cateta AC să fie egală cu 2AB, adică cu 42 m.

Trigonometrie.

1) Să se arate că:

$$tg(a-b)=\frac{tg\,a-tg\,b}{1+tg\,a\,tg\,b}.$$

2) Dîndu-se într'un triunghiu oare-care laturile a, b și unghiul C să se afle celelalte elemente.

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL INSCRIS DE ADMITERE IN ȘCOALA DE OFIȚERI.

(1896).

Geometrie descriptivă. [1])

1) Să se afle urmele unei drepte pe cele două planuri de proecțiune.

2) Să se construiască o dreaptă înclinată de $^1/_6$.

3) Se dă un triunghiu dreptunghiu a cărei înălțime este de 1,30 m. și ipotenuza înclinată de $^1/_6$. Să se afle baza.

Mecanică.

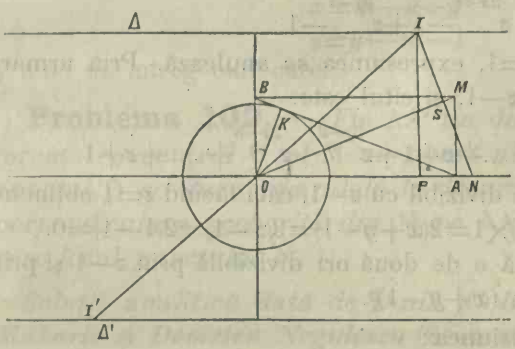
Să se afle centrul de greutate al unui triunghiu.

[1]) Publicăm chestiunile ast-fel cum au fost propuse.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 92.** — *Într'un cerc se dau două diametre dreptunghiulare. O tangentă mobilă întîlnește pe unul din diametre în* A *și pe altul în* B. *Se duce prin* A *o paralelă la* OB *și prin* B *o paralelă la* OA. *Fie* M *punctul lor de întîlnire. Prin centrul* O *al cercului se duce apoi o dreaptă* OI *simetrică cu* OA *în raport cu* OM *și se ia de-o parte sau de alta a punctului* O, OI=OM. *Se cere locul punctelor I.* **(I. P. Rădulescu.)**

Pe dreapta OA luăm o lungime ON=OM și unim I cu N. Triunghiul ION este isoscel și prin urmare bisectrița OM este perpendiculară pe IN și o împarte în două părți egale: IS=SN.



Unghiurile PIN, SON având laturile lor perpendiculare una pe alta, sînt egale. Dar $\sphericalangle$ SON $=\sphericalangle$ BAO $=\sphericalangle$ BOK, K fiind punctul de contact al tangentei cu circonferența. Prin urmare triunghiurile PIN, KOB sînt asemenea și deci:

$$PI=OK\times\frac{IN}{BO}.$$

Insă IN=2SN și dacă însemnăm cu R raza circonferenței avem:

$$PI=2R\times\frac{SN}{BO}. \qquad (1)$$

Triunghiurile dreptunghe ONS, ABO sînt egale, căci au ipotenuzele ON, AB egale și unghiurile ascuțite NOS, BAO egale. Deci SN=BO și prin urmare (1) devine:

$$PI=2R.$$

Punctul I se află deci la o distanță constantă de dreapta fixă OA. Locul punctelor I se compune dar din două drepte Δ, Δ' paralele la OA și situate de-o parte și de alta a acestei drepte, la o depărtare egală cu 2R. E ușor de văzut că punctul I descrie

ambele drepte Δ, Δ', cînd punctul de contact K descrie o jumătate de circonferență

Notă. D-nii *A. Iliovici* și *I. Moscuna* au rezolvit această problemă cu ajutorul trigonometriei.

***Problema 95.**— *Să se demonstreze că expresiunea:*

$$(x+y)^{2x-1}+(x+y)^{2y-1}-2,$$

este divizibilă prin $(x+y-1)$ *x și y fiind două numere întregi pozitive.* (I. Moscuna.)

Soluție dată de D-nii: A. Iliovici (Iași), *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași) și *Gr. N. Makarie* (București).

Inlocuind $x+y$ prin z expresiunea dată se poate scrie:

$$z^{2x-1}-1+z^{2y-1}-1.$$

Se vede că făcînd $z=1$, expresiunea se anulează. Prin urmare ea este divizibilă prin $z-1$, și cîtul este:

$$z^{2x-2}+z^{2x-3}+.....+z+1+z^{2y-2}+z^{2y-3}+.....+z+1.$$

Acest prelinom însă e divizibil cu $z-1$, căci făcînd $z=1$ obținem:

$$(2x-1)\times 1+(2y-1)\times 1=2(x+y-1)=2(z-1)=2(1-1)=0.$$

Deci expresiunea dată e de două ori divizibilă prin $z-1$ și prin urmare e divizibilă prin $(x+y-1)^2$.

Generalizare. Expresiunea:

$$\Sigma\left(\sum_{m=1}^{m=n} x_m\right)^{nx_m-1}-n$$

este divizibilă prin expresiunea:

$$\left(\sum_{m=1}^{m=n} x_m-1\right)^2.$$

Demonstrațiunea e analoagă cu cea dată mai sus. (I. M.)

***Problema 101.** — *Să se afle condițiunea ce trebue să împlinească* α *pentru ca sistemul:*

$$y^2+z^2=\alpha+x^2+2xy$$
$$x+y+z+1=o$$

să admită o infinitate de soluțiuni întregi și să se rezolve sistemul. **(Bogdan Ionescu.)**

Soluțiune dată de D-nii: Gr. N. Makarie (București) și *A. Iliovici* (Iași).

Din cea de a doua ecuațiune deducem:

$$z=-(1+x+y).$$

Substituind în prima ecuațiune și făcînd reducerile, obținem:

$$x=-(y+y^2)+\frac{\alpha-1}{2}$$

y fiind întreg, pentru ca x să fie asemenea întreg, este evident că e necesar și suficient ca α să fie un număr întreg fără soț;

$$\alpha=2m+1,$$

atunci soluțiunile sistemului de mai sus, sînt:

$$x=m-y-y^2$$
$$z=y^2-m-1$$

y fiind un întreg oare-care.

Problema 102. — *Fie* AA′ *un diametru al unei circonferențe cu centrul* O *și* M *un punct al acestei curbe Prin punctul* O *se duce o paralelă la dreapta* A′M, *care întîlnește perpendiculara scoborîtă din* M *pe* AA′ *într'un punct* N. *Se cere locul punctului* N. **(G. Țițeica.)**

Soluție analitică dată de D-nii: C. Lupu (București); *Gr. N. Makarie* și *Demetru Negulescu* (Student, București).

Fie m coeficientul unghiular variabil al dreptei A′M; ecuațiunea ei va fi, r însemnînd raza cercului AA′:

$$y=m(x+r).$$

Abscisele punctelor de intersecție A′ și M ale dreptei A′M cu cercul $x^2+y^2-r^2=o$ sînt date de ecuațiunea:

$$x^2+m^2(x+r)^2-r^2=o \qquad (1)$$

Ecuațiunea paralelei NO dusă prin O la dreapta A′M este:

$$y=mx. \qquad (2)$$

Eliminînd pe m între (1) și (2) vom obține ecuațiunea locului geometric al punctelor de întîlnire N_1 și N ale dreptei NO cu perpendicularele duse pe AA′ prin A′ și M, adică vom obține dreapta $A'N_1$ și locul căutat. Găsim:

$$(x+r)[x^2(x-r)+y^2(x+r)]=o.$$

Deci N descrie curba:

$$y=\pm x\sqrt{\frac{r-x}{r+x}},$$

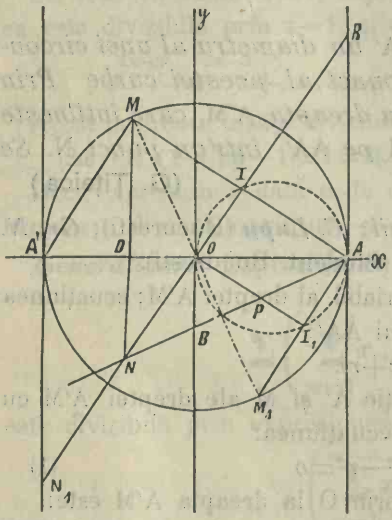
ecuațiune cunoscută a unei strofoide avînd vîrful în A și dreapta $A'N_1$ ca asimptotă.

Soluție geometrică dată de D-l C. Lupu.

Una din definițiunile geometrice ale strofoidei se știe că este următoarea:

Fiind dat un unghiu drept xOy și un punct fix A pe una din laturile sale, o dreaptă mobilă în jurul punctului A întîlnește cealaltă latură Oy în punctul B; în fie-care poziție a dreptei mobile se ia pe dînsa, de-o parte și de alta a punctului B, lungimile BN și BP egale cu BO. Locul punctelor N și P este o strofoidă.

Se vede imediat că unghiul NOP este drept, căci dacă descrim pe NP ca diametru un cerc, el va trece prin O.



Astfel fiind, să considerăm punctul A' simetric cu A în raport cu O. Dacă prin A ducem o paralelă la OP și prin A' o paralelă la NO, punctul lor de întîlnire M va descrie cercul AA' cînd dreapta mobilă AB se învîrtește în jurul punctului A. — Unim punctele M și N; ducem dreapta NO pe care o prelungim pînă unde întîlnește în I coarda AM. Dreapta NO fiind paralelă cu MA', este perpendiculară pe AM și deci I este mijlocul corzei AM. Rezultă dar că triunghiurile dreptunghe NMI, NAI sînt egale și prin urmare avem:

$$\measuredangle MNO=\measuredangle ONB.$$

Insă triunghiul NOB fiind isoscel $\measuredangle ONB=\measuredangle NOB$; deci

$$\measuredangle MNO=\measuredangle NOB$$

ceia ce ne arată că MN este paralelă cu OB și deci perpendiculară pe AA'. Locul propus coincide dar cu acel al lui N.

Punctul P este dat de poziţiunea M_1 a lui M, simetrică în raport cu centrul O.

Soluţie geometrică dată de D-nii: A. Iliovici (Student, Iaşi); *I. Negretzu* (Elev al Şcoalei superioare de Mine din Freiberg) şi *G. Iliovici* (Elev în clasa VI de la Liceul Naţional din Iaşi).

Locul punctului N este o strofoidă. Pentru a dovedi aceasta e de ajuns ca unind pe A cu N şi luînd intersecţiunea B a dreptei AN cu diametrul perpendicular pe AA′, să arătăm că BN=BO, adică că triunghiul BNO este isoscel.

In adevăr $\measuredangle$BON=$\measuredangle$MNO ca alterne interne (figura de mai sus). Dar triunghiurile MNI, ANI sînt egale, căci NO fiind paralelă cu MA, e perpendiculară pe AM şi o împarte în două părţi egale MI=IA. Deci $\measuredangle$MNO=$\measuredangle$ONB şi prin urmare $\measuredangle$BON=$\measuredangle$ONB. c.c.e.d.d.

Soluţie geometrică dată de D-l I. Moscuna (Bucureşti).

Ducem perpendiculara AR în A pe AA′ şi fie R punctul de întîlnire al acestei perpendiculare cu dreapta ON. Dreapta ON fiind perpendiculară pe mijlocul J al coardei AM, iar unghiurile NMI, RAI fiind egale ca alterne-interne, rezultă că triunghiurile dreptunghe IMN, IAR sînt egale, şi deci

$$IN=IR.$$

Prin urmare cînd I descrie circonferenţa de diametru AO, punctul N descrie o strofoidă cu vîrful în A.

***Problema 103.** — *Să se afle limita către care tinde raportul dintre arcele interceptate pe o circonferenţă de laturile unui unghiu, cînd una din laturile unghiului rămînînd fixă, cealaltă se apropie îndefinit de dînsa.* **(I. Moscuna.)**

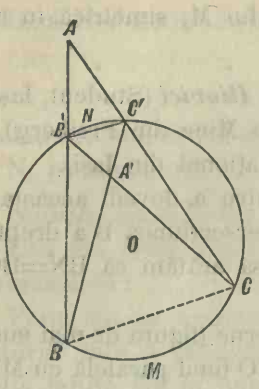
Soluţiune dată de D-nii: A. Iliovici (Iaşi) şi *Gr. N. Makarie* (Bucureşti).

Fie unghiul BAC, ale cărui laturi intersectează circonferenţa O. Fie AB latura fixă şi AC latura mobilă. Triunghiurile asemenea ABC, AC′B′ ne dau:

$$\frac{C'B'}{BC}=\frac{AB'}{AC}=\frac{AC'}{AB}.$$

Cînd unghiul A tinde către zero, AC′ tinde a deveni egal cu AB′ şi AC cu AB.

Deci avem:



$$\frac{\text{lim. coardei } B'C'}{\text{lim. coardei } BC} = \frac{AB'}{AB}.$$

Dar raportul dintre arce și coarde tinzînd către 1 cînd arcul tinde către zero, putem înlocui în primul membru coardele prin arcele respective și avem:

$$\frac{\text{lim. arc. } B'NC'}{\text{lim arc. } BMC} = \frac{AB'}{AB}.$$

In același mod găsim pentru cazul cînd punctul A e interior cercului:

$$\frac{\text{lim. arc } B'NC'}{\text{lim. arc. } BMC} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Cînd punctul A e în centru, limita raportului e 1.

Cînd punctul A e pe circonferință, limita raportului e 0 sau ∞.

Cînd punctul A se depărtează la infinit limita raportului este 1.

Dacă luăm totdeauna limita raportului dintre arcul cel mic către cel mare, se vede că această limită rămîne totdeauna mai mică ca 1.

***Problema 104.**— *Să se afle în mod elementar maximul și minimul funcțiunei:*

$$y = x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36.$$ **(Gr. N. Makarie.)**

Soluțiune dată de D-nii: A. Iliovici (Iași), *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași); *I. Moscuna* (București), *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești) și *C. Popovici* (Student, Iași).

Polinomul dat se poate pune sub forma:

$$y = x^2(x^2 - 10x + 25) - 36 = [x(x-5)]^2 - 36.$$

De aci se vede imediat că y nu poate fi mai mic ca -36. Acest minimum al lui y corespunde lui $x=o$ și $x=5$. Intre aceste două minimuri, y prezintă un maximum, căci produsul $x(x-5)$ este maximum cînd factorii sînt egali, adică pentru $x=2{,}5$. Acest maximum va fi $2{,}5^4 - 36 = +3{,}0625$. Cu acestea formăm următorul tablou al variațiunei lui y.

$y = -\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 2{,}5 \ldots\ldots 5 \ldots\ldots +\infty$

$x = +\infty \ldots -36\ (\text{min}) \ldots +3{,}062\ (\text{max}) \ldots -36\ (\text{min}) \ldots +\infty$

Cu aceste date putem ușor construi curba de variațiune a lui y. O asemenea curbă a fost construită de D. *B. Paraschivescu.*

***Problema 107** — *Să se găsească fără a face împărțirea directă, cîte cifre are perioada fracțiunei zecimale echivalentă cu* $\frac{1}{32743}$. (C. Miclescu.)

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (București).

Pentru a rezolvi această problemă ne vom servi de următoarea teoremă [1]: *Dacă mai multe fracțiuni nereductibile au numitorii primi între ei, și dacă representăm prin* $n, n', n'', \ldots$ *numărul cifrelor perioadelor la cari ele dau naștere, ori-ce fracțiune ireductibilă care are ca numitor produsul numitorilor considerați, va avea o perioadă compusă din atîtea cifre cît este cel mai mic comun multiplu al numerilor* $n, n' n'' \ldots$. Avem însă:

$$\frac{1}{32743} = \frac{1}{137} \times \frac{1}{239},$$

iar numerile 137 și 239 sînt prime. Perioada fracțiunei zecimale echivalente cu $\frac{1}{137}$ are 8 cifre, cum ne putem ușor asigura. Perioada fracțiunei zecimale echivalente cu $\frac{1}{239}$ are 7 cifre. Cel mai mic comun multiplu al lui 8 și 7 fiind 56, rezultă că perioada fracțiunei zecimale echivalente cu $\frac{1}{32743}$ va avea 56 cifre.

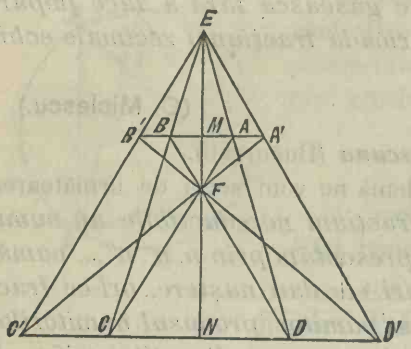
***Problema 112.**— *Prin punctul de întîlnire al laturilor neparalele ale unui trapez, se duc paralele la diagonalele sale, care paralele determină cu laturile paralele ale trapezului un nou trapez. Să se demonstreze că punctele de întîlnire ale diagonalelor acestor două trapeze coincid.* (O. Alexandrini.)

Soluțiune dată de D-nii: A. Iliovici (Iași), *I. Moscuna* (București și *C. Popovici* (Student, Iași).

Fie ABCD trapezul dat, E punctul de întîlnire al laturilor neparalele, F punctul de întîlnire al diagonalelor, A'B'C'D' trapezul

[1]) *E. Combette.* Cours d'Arithmètique 1891, pag. 198.

format de paralelele B′C′, A′D′ duse la diagonalele AC, BD. Ducem dreapta EF. Triunghiurile asemenea EBM, ECN; EBA, ECD și EMA, END ne dau:



$$\frac{BM}{CN}=\frac{AM}{DN}=\frac{AB}{CD}.$$

Triunghiurile asemenea FBM, FDN; FBA, FCD și FMA, FNC ne dau:

$$\frac{BM}{DN}=\frac{AM}{CN}=\frac{AB}{CD}.$$

Din comparațiunea acestor două șiruri de raporturi deducem:

$$CN=DN$$

și prin urmare: $BM=AM.$

De aci rezultă că linia EF trece prin mijlocul laturilor paralele AB, CD. Triunghiurile ABC, B′BE și ABD, AA′E ne dau:

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AB}{BB''} \qquad \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AA''}$$

Dar dreptele concurente AC, AD întîlnite de paralelele AB, CD ne dau:

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AD}{AE}.$$

Comparînd această proporție cu cele două precedente deducem:

$$BB'=AA'.$$

In același mod putem arăta că:

$$CC'=DD'.$$

Prin urmare punctele M și N sînt și mijlocul laturilor A′B′, C′D′ ale trapezului A′B′C′D′. Prin urmare punctul F′ intersecția diagonalelor acestui trapez este situat tot pe dreapta MN. Rămîne a arăta că F′ coincide cu F. In adevăr avem:

$$\frac{FM}{FN}=\frac{BM}{ND}=\frac{AB}{CD}$$

$$\frac{F'M}{F'N}=\frac{B'M}{ND'}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

Dar:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

căci dreptele concurente EC, ED, EC', ED' sînt tăiate de paralelele A'B', C'D'. Punctele F și F' divizînd dreapta MN în același raport și fiind ambele coprinse între M și N coincid, c.c.e.d.d.

Patrulaterul poate fi convex (cazul figurei) sau concav.

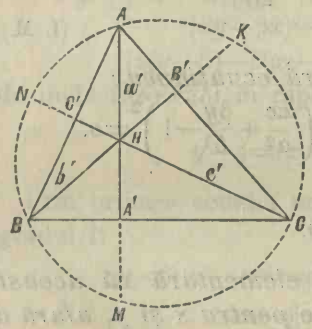
D-l *I. Anastasiadi* a rezolvit problema cu ajutorul geometriei analitice.

***Problema 115.**— *Fie a, b, c laturile unui triunghiu și a', b', c' distanțele punctului de întîlnire H al înălțimilor la vîrfurile* A, B, C. *Să se demonstreze că dacă punctul H e interior triunghiului avem:*

$$\frac{a'b'}{ab}+\frac{b'c'}{bc}+\frac{c'a'}{ca}=1.$$

Ce convenție trebue făcută asupra semnelor lui a', b', c' pentru ca formula să fie adevărată și în cazul cînd punctul H e exterior triunghiului. **(I. Moscuna)**

Soluțiune dată de D-nii: I. Negretzu (Elev al Școalei de Mine din Freiberg); *A. Iliovici* (Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași) și *Gr. N. Makarie* (București).



Exprimînd că suprafața triunghiului ABC este suma suprafețelor triunghiurilor AHB, BHC și CHA, avem:

$$S=\frac{1}{2}b'c'\sin\widehat{BHC}+\frac{1}{2}c'a'\times$$

$$\sin\widehat{CHA}+\frac{1}{2}a'b'\sin\widehat{AHB}.$$

Dar unghiul BHC este suplimentar cu A căci patrulaterul AB'HC' avînd două unghiuri drepte este inscriptibil. În același mod vom putea arăta că unghiurile CHA și AHB sînt suplimentele unghiurilor B și C. Deci relațiunea precedentă devine:

$$2S=b'c'\sin A+c'a'\sin B+a'b'\sin C,$$

de unde:

$$\frac{b'c'\sin A}{2S}+\frac{c'a'\sin B}{2S}+\frac{a'b'\sin C}{2S}=1,$$

sau:

$$\frac{b'c'\sin A}{bc\sin A}+\frac{c'a'\sin B}{ca\sin B}+\frac{a'b'\sin C}{ab\sin C}=1,$$

sau în fine:

$$1) \qquad \frac{b'c'}{bc}+\frac{c'a'}{ca}+\frac{a'b'}{ab}=1, \qquad \text{c.c.e.d d.}$$

Dacă presupunem acum că BC rămînînd fix, punctul A se apropie de B, segmentul a', descreşte necontenit. Cînd A coincide cu c', a devine nul. Dacă A e coprins între B şi c' atunci segmentul a' îşi schimbă sensul şi prin urmare îl vom lua cu semnul —. Rezultă de aci că dacă luăm în formula 1) ca negativă distanţa de la punctul H la vîrful unui unghiu obtus, atunci această formulă se poate aplica în toate cazurile. De alt-fel e uşor a se verifica că cu această convenţiune formula devine generală.

Ne putem dispensa de ajutorul trigonomometriei pentru a rezolva problema. In adevăr dacă însemnăm cu D diametrul cercului circumscris triunghiului ABC, dacă observăm că fie-care din triunghiurile AHB, BHC, CHA se pot înscrie în un cerc tot de diametru D, ca fiind respectiv egale triunghiurilor AKC, BMC şi ANB, şi în fine dacă ne amintim că aria unui triunghiu este egală cu produsul laturilor divizat prin dublul diametrului cercului circumscris, avem:

$$\frac{ab'c'}{2D}+\frac{ba'c'}{2D}+\frac{ca'b'}{2D}=S=\frac{abc}{2D'}$$

de unde deducem relaţiunea 1). (I. M.)

***Problema 116.** — *Se consideră ecuaţiunea:*

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=o,$$

în care presupunem:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1<0.$$

Să se demonstreze prin algebra elementară că această ecuaţiune nu admite alte valori reale pentru x şi y, afară de valorile $x=\alpha$ şi $y=\beta$. **(C. Gogu.)**

Soluţiune dată de D-nii: A. Iliovici (Iaşi), *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Licelui din Iaşi) şi *Gr. N. Makarie* (Bucureşti).

Gonind numitorii ecuaţiunea şi relaţiunea dată devin:

$$1) \quad (\alpha^2b^2+\beta^2a^2-a^2b^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)-(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)^2=o,$$

$$2) \qquad b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2<o.$$

Desfăcînd parentezele la ecuaţiunea 1), făcînd reducerile, suprimînd factorul comun a^2b^2 şi ordonînd după puterile descrescătoare ale lui x, obţinem:

3) $(\beta^2-b^2)x^2-2\alpha(\beta y-b^2)x+[(\alpha^2-a^2)y^2+2\alpha\beta y-b^2\alpha^2-a^2\beta^2]=o.$

Realizantul [1]) acestei ecuațiuni este (suprimînd factorul 4):

$$\alpha^2(\beta y-b^2)^2-(\beta^2-b^2)[(\alpha^2-a^2)y^2+2\alpha\beta y-b^2\alpha^2-a^2\beta^2]=$$
$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2)(y-\beta)^2.$$

Dar după neegalitatea 2) primul factor e negativ. Deci realizantul e totdeauna negativ afară de cazul cînd $y=\beta$. Prin urmare x nu poate fi real de cît cînd $y=\beta$. In acest caz realizantul fiind nul, rădăcinile ecuațiunei 3) sînt egale, și prin urmare egale cu semisuma lor. Deci:

$$x=\frac{\alpha(\beta y-b^2)}{\beta^2-b^2}=\frac{\alpha(\beta^2-b^2)}{\beta^2-b^2}=\alpha.$$

Prin urmare singurul sistem de soluțiuni reale este $x=\alpha$, $y=\beta$,

c.c.e.d.d.

Soluțiune dată de D-l Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici, București).

Ecuațiunea dată se poate pune succesiv sub următoarele forme:

$$(\alpha^2b^2+\beta^2a^2-a^2b^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)-(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)^2=o,$$
$$\alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy-b^2(x^2-2\alpha x+\alpha^2)-a^2(y^2-2\beta y+\beta^2)=o,$$
$$(\alpha y-\beta x)^2-b^2(x-\alpha)^2-a^2(y-\beta)^2=o,$$
$$[\alpha(y-\beta)-\beta(x-\alpha)]^2-b^2(x-\alpha)^2-a^2(y-\beta)^2=o,$$

de unde rezolvind în raport cu $(y-\beta)$:

$$y-\beta=(x-\alpha)\frac{\alpha\beta\pm\sqrt{b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2}}{\alpha^2-a^2}.$$

Prin urmare ecuația propusă se poate desface în ecuațiunile de gradul I:

$$(y-\beta)(\alpha^2-a^2)=(x-\alpha)[\alpha\beta+\sqrt{b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2}]=$$
$$(x-\alpha)[\alpha\beta-\sqrt{b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2}.$$

Inegalitatea dată:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1<o$$

ne indică nu numai că α și β nu pot deveni infiniți, dar că nu pot întrece în valoarea absolută respectiv pe a și b. Tot această inegalitate ne arată că radicalele din ecuațiunile de mai sus sînt ima-

[1]) Vom numi după *Tartinville*, realizantul unei ecuațiuni de gradul II

$$ax^2+bx+c=o$$

expresiunea b^2-4ac care ne indică dacă rădăcinile sînt sau nu reale.

ginare. Prin urmare acele ecuațiuni de gradul I nu pot avea alte soluțiuni reale de cît $x=\alpha$, $y=\beta$, care anulează membrele acelor ecuațiuni.

Observare. Se știe din geometria analitică că ecuațiunea propusă reprezintă ecuațiunea cuadratică a tangentelor duse din punctul cu coordonatele α, β la elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

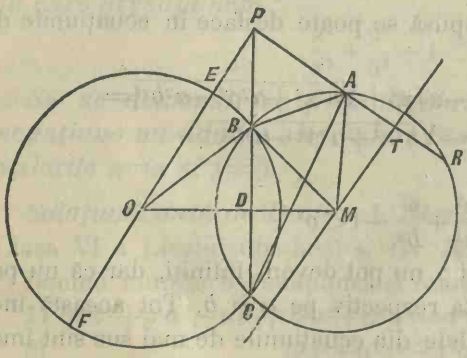
Neegalitatea dată ne arată că punctul (α, β) e în interiorul elipsei. Prin urmare cele două tangente sînt imaginare conjugate, și ele nu au alt punct real, de cît intersecția lor, adică punctul α, β.

* **Problema 121.**— *Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris unui triunghiu al cărui vîrf* A *e fix, iar latura opusă* BC *trece printr'un punct fix, vîrfurile* B *și* C *rămînînd pe o circonferență dată.* (I. Moscuna.)

Soluțiune dată de D-ra Steliana Șerbănescu (Ploești).

Fie P punctul fix prin care trece latura BC și O centrul cercului fix. Fie M centrul unuia din cercurile circumscrise triunghiului ABC. Punctul M se găsește pe perpendicularele ridicate pe mijlocul laturilor BC și AB. Ducem dreptele PO, PM, BO, BM, AM, OM care taie dreapta BC în punctul D.

Triunghiurile dreptunghii PDM, BMD ne dau:



$$\overline{PM}^2=\overline{PD}^2+\overline{DM}^2,$$

$$\overline{BM}^2=\overline{BD}^2+\overline{DM}^2.$$

Scăzînd aceste două egalități și înlocuind BM cu egalul său AM, obținem:

$$\overline{PM}^2-\overline{AM}^2=\overline{PD}^2-\overline{BD}^2.$$

In același mod putem demonstra că:

$$\overline{PO}^2-\overline{OB}^2=\overline{PD}^2-\overline{BD}^2.$$

Din aceste două relațiuni deducem:

$$\overline{PM}^2-\overline{AM}^2=\overline{PO}^2-\overline{OB}^2=\text{Const.},$$

de oare-ce OB este raza cercului dat. Deci diferența patratelor dis-

tanțelor de la punctul M la cele două puncte fixe P și A este constantă. Deci locul punctelor M este o perpendiculară ridicată pe dreapta AP. Piciorul acestei perpendiculare se va determina căutînd pe dreapta PA un punct T ast-fel ca:

$$\overline{PT}^2-\overline{AT}^2=\overline{PO}^2-\overline{OB}^2=\text{Const.}$$

Cînd punctul P coincide cu O, locul căutat va fi o perpendiculară pe dreapta OA.

Acest caz particular conține soluțiunea problemei de geometrie propusă la concursul inscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la externatul secundar de fete din Ploești (Iunie 1896).

(A se vedea *Gazeta Matematică*, anul I, pagina 262).

Soluțiune dată de D-l Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici, București).

Fie T proecția punctului M pe dreapta AP. Avem:

$$\overline{AT}^2=\overline{AM}^2-\overline{MT}^2,$$

$$\overline{MT}^2=\overline{MP}^2-(AP+AT)^2.$$

De aci deducem:

$$\overline{MP}^2-\overline{MA}^2=\overline{AP}^2+2AP\times AT.$$

In același mod deducem:

$$\overline{MP}^2-\overline{MA}^2=\overline{BP}^2+2BP\times BD, \quad \overline{OP}^2-\overline{OB}^2=\overline{BP}^2+2BP\times BD.$$

Din aceste trei din urmă egalități deducem în fine:

$$AT=\frac{\overline{OP}^2-\overline{OB}^2-\overline{AP}^2}{2AP}=\text{constant.}$$

Locul punctului M este prin urmare perpendiculara MT pe dreapta AP. Cînd P coincide cu O, avem:

$$AT=-\frac{\overline{OB}^2+\overline{AP}^2}{2AP}.$$

Vom considera segmentul AT ca pozitiv sau negativ după cum cade afară sau înăuntru segmentului AP.

Se poate găsi mai ușor și fără calcul locul punctului M. Fie R al doilea punct al intersecției secantei AP cu circonferența MA. Avem:

$$PA\times PR=PB\times PC=PE\times PF=\text{const.}$$

Rezultă din această egalitate că punctul R e fix, de oare-ce A și P sînt fixe, și prin urmare locul punctului M este locul centrelor circomferențelor ce trec prin două puncte fixe A,R. Acest loc e prin urmare perpendiculara ridicată pe mijlocul T al dreptei AR. (I. M.)

***Problema 126.** — *Fie* P *un plan fix și* ABCD *un dreptunghiu în acest plan. Se unesc punctele* A, B, C, D *cu un punct* S *mobil în spațiu și se determină ast-fel o piramidă. Fie* SA′ *proecțiunea muchiei* SA *pe muchea opusă* SC; SB′ *proecțiunea muchiei* SB *pe muchea opusă* SD, *etc. Se cere locul punctelor* A′,B′,C′,D′ *cînd punctul* S *variază.* **(I. Negretzu.)**

Soluție dată de D-nii: C. Popovici (Student, Iași); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național din Iași) și *G. Dragu* (București).

Fie O punctul de intersecție al diagonalelor AC, BD ale dreptunghiului. Triunghiul AA′C fiind dreptunghiu în A′ rezultă că distanța OA′ este egală cu jumătatea diagonalei AC, căci circonferența descrisă pe AC ca diametru trece prin A′ și are centrul său în O. In mod analog vom demonstra că distanța OC′ este egală cu jumătatea diagonalei AC și că distanțele OB′, OD′ sînt fie-care egale cu jumătatea diagonalei BD. Avem deci:

$$OA'=OB'=OC'=OD'=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=constant.$$

Locul punctelor A′ B′ C′ D′ este deci o sferă avînd centrul în O și a cărei rază este egală cu jumătatea lungimei diagonalei dreptunghiului ABCD. Punctele A, B, C, D fac și ele parte din locul căutat și determină pe sferă un cerc mare.

Problema se poate generaliza pentru un poligon regulat de un număr soț de laturi. Locul geometric căutat este atunci sfera ce are ca centru centrul poligonului și o rază egală cu raza poligonului.

***Problema 130.** — *Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu avem relația:*

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)$$

triunghiul este isoscel. **(N. Trandafirescu.)**

Soluție dată de D-nii: G. Dragu (Sub-locotenent în Regimentul I de Geniu); *I. Anastasiadi* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *A. Iliovici* (Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului din Iași); *Bogdan Ionescu* (București); *C. Popovici* (Student, Iași); *C. Mateiescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Craiova); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Ploești) și *Gr. N. Makarie* (București).

Observăm că:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)$$

și prin urmare relațiunea dată devine:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right). \qquad (1)$$

Dar: $$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=1+\sin B,$$

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=1+\sin C,$$

și prin urmare relațiunea (1) devine:

$$\sin B=\sin C,$$

ceia ce ne dă:

$$B=2k\pi+C \quad \text{și} \quad B=(2k+1)\pi-C. \qquad (2)$$

Dacă însă ținem samă că B și C sînt unghiurile unui triunghiu, videm că singura relațiune posibilă între B și C, este cea dată de prima din egalitățile (2) cînd facem $k=o$, ceia ce ne dă:

$$B=C,$$

și deci triunghiul este isoscel.

PROBLEME PROPUSE

*163. Să se demonstreze că egalitatea:

$$(\sqrt{A}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{B}+\sqrt{a})^2=(\sqrt{A+b}+\sqrt{B+a})^2$$

atrage după sine egalitatea:

$$(A-a)(B-b)+(\sqrt{Aa}-\sqrt{Bb})^2=o. \qquad \text{(I. Ionescu.)}$$

164. Se dă un cerc de rază r în care se înscrie un exagon regulat. Unindu-se mijloacele laturilor exagonului, se formează un nou exagon regulat. Se operează cu acest nou exagon în acelaşi mod. Se repetă construcțiunea de n ori. Se cere a se proba că pentru $n=\infty$, seria care reprezintă suma perimetrelor exagoanelor ast-fel obținute este convergentă. (I. Ghibaldan.)

*165. Pe o dreaptă dată AB se ia un punct oare-care C. Din C

ca centru cu CB ca rază se descrie o circonferență, iar din A se duce o tangentă AD la această circonferență al cărei punct de contact este D. Se cere să se afle maximul ariei triunghiului ACD.

(A. Iliovici.)

*166. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x + \cos^3 x + 4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=1.$$

(V. Cristescu.)

167. Se dau două drepte Δ, Δ' perpendiculare una pe alta și două puncte A, B situate pe Δ'. Dintr'un punct P luat pe dreapta Δ se duc dreptele PA, PB. Se cere să se afle locul punctului de intersecție al dreptei PB cu perpendiculara pe PA dusă prin punctul A.

(Bogdan Ionescu.)

*168. Printr'un punct din interiorul unui cerc se duc două coarde perpendiculare. Să se demonstreze că arcele interceptate formează o echidiferență.

(I. Ionescu.)

*169. Să se construiască un patrat a cărui trei laturi să treacă prin trei puncte date echidistante unul de altul și nu în linie dreaptă, iar a patra latură să treacă prin un al patrulea punct dat.

(Gr. N. Makarie.)

*170 Un arendaș plătește pentru seceratul grîului 1,10 lei de claie, claia trebuind să aibă 26 snopi, iar snopul să fie de 4 palme (lungimea legăturei). Un lucrător face 73 clăi și 8 snopi, însă claia de 28 snopi și snopul numai de 3 palme. Ce sumă va primi acel lucrător?

(I. Ionescu.)

171. Fiind date trei sfere prin coordonatele centrelor și prin razele lor: a_i, b_i, c_i, r_i; $i=1, 2, 3$; să se afle și să se construească un plan care să atingă de-o-dată cele trei sfere. Discuție.

(A. Buga.)

*172. Între ipotenuza a și catetele b, c ale unui triunghiu dreptunghiu se dă relațiunea:

$$b+c+\alpha a=m,$$

m fiind un număr pozitiv dat. Se cere a se determina α astfel ca perimetrul triunghiului să admită un maximum și un minimum. Discuție.

(V. Cristescu.)

SOLUȚIUNELE CHESTIUNELOR DATE LA CONCURSUL INSCRIS, PENTRU OCUPAREA CATEDREI DE MATEMATICI DE LA ȘCOALA DE TELEGRAFIE.

(București, 28 Octombre 1895.)

BIBLIOTECA ȘCOLII JASSI

a) GEOMETRIE ANALITICĂ.

Pe tangenta la vîrful O *al unei parabole, se ea un punct* A *și se duce tangenta* AB; *să se găsească:*

1) *Ecuațiunea hiperbolei echilatere care trece prin punctele* O, A *și* B *și care tae parabola dată, în două puncte simetrice față de axul parabolei;*

2) *Să se arate că ori-care ar fi poziția punctului* A, *această hiperbolă trece prin 4 puncte fixe din plan. Care sînt acele puncte?*

3) *Să se găsească locul centrelor hiperbolelor de mai sus, cînd punctul* A *variază;*

4) *Să se găsească ecuația generală a conicelor ce trec prin cele patru puncte definite la punctul* 2. *Care este natura acestor conice?*

(Timpul acordat 3 ore).

1) Să presupun, mai general, că punctul A în loc să fie situat pe tangenta la vîrful parabolei date, este un punct oare-care din plan ca coordonatele: α și β; atunci, în locul triunghiului AOB, obținem triunghiul A′B′C′, format din cele două tangente la parabolă duse duse din A′, și din polara punctului A′.

Fie
$$y^2 - 2px = o$$
ecuațiunea parabolei date.

Ecuațiunele laturilor triunghiului A′B′C′, sînt:

$$B'C' \ldots \beta y - px - p\alpha = o$$

$$A'B' \ldots y - m_1 x - \frac{p}{2m_1} = o$$

$$A'C' \ldots y - m_2 x - \frac{p}{2m_2} = o$$

m_1 și m_2 fiind rădăcinile ecuațiunei:

$$(1) \qquad \beta - m\alpha - \frac{p}{2m} = o.$$

Ecuațiunea generală a conicelor circumscrise triunghiului A′B′C′, este:

(2) $$\left(y-m_1x-\frac{p}{2m_1}\right)\left(y-m_2x-\frac{p}{2m_2}\right)+(\beta y-px-p\alpha)\times$$
$$[\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)]=o$$

Desvoltînd primul termen din ecuaţiunea (2), şi ţinînd seama de (1), se obţine, pentru ecuaţiunea generală a acestor conice:

(3) $$px^2-2\beta xy+2\alpha y^2+2(\beta^2-p\alpha)x-2\alpha\beta y+\alpha^2p+(\beta y-px-p\alpha)\times$$
$$[\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)]=o$$

λ şi μ fiind două parametre variabile.

Pentru ca ecuaţiunea (3) să reprezinte o hiperbolă echilateră, trebue să avem:

(4) $$p\lambda-\beta\mu=p+2\alpha.$$

Curba (3) tae parabola dată în 4 puncte, ale căror ordonate se vor afla înlocuind în (3) pe x prin: $\frac{y^2}{2p}$. Ecuaţiunea ce va rezulta va fi de gradul al 4-lea în y; însă în cazul acesta ea se poate reduce la gradul al 2-lea, căci se cunosc ordonatele a două din punctele de intersecţiune, care sînt ordonatele punctelor B' şi C' prin care trec toate curbele (3). Se va obţine deci ecuaţiunea care dă ordonatele celorlalte două puncte de intersecţie, divizînd pe (3), dupe ce s'a înlocuit x prin $\frac{y^2}{2p}$, prin:

$$\beta y-p\frac{y^2}{2p}-p\alpha,$$

observînd ca diviziunea ultimului termen este imediată, iar cîtul este:

$$\lambda\left(\frac{y^2}{2p}-\alpha\right)+\mu(y-\beta).$$

Se obţine ast-fel ecuaţiunea:

(5) $$y^2-2\beta y+2p\alpha-2p\left[\lambda\left(\frac{y^2}{2p}-\alpha\right)+\mu(y-\beta)\right]n=o.$$

Pentru ca curba (3), să tae parabola în două puncte simetrice, faţă de OX; trebue să avem:

(6) $$\beta+p\mu=o.$$

Relaţiunele (4) şi (6) dau:

$$\mu=-\frac{\beta}{p},\ \lambda=\frac{p^2+2\alpha p-\beta^2}{p^2}.$$

Introducînd aceste valori în (3), grupînd termenii, şi făcînd toate simplificările, se obţine pentru ecuaţiunea hiperbolei căutate:

(7) $$px^2-\beta xy-py^2+p^2x+\beta(p+\alpha)y-\alpha p(p+\alpha)=o.$$

2) Ecuațiunea (7) poate fi încă scrisă:

$$px^2-py^2+p^2x-\alpha p(p+\alpha)-\beta[xy-(p+\alpha)y]=o.$$

Care arată că dacă α rămîne constant, iar β variază; curba (7) trece, ori-care ar fi β, prin punctele de intersecție ale hiperbolei echilatere:

$$px^2-py^2+p^2x-\alpha p(p+\alpha)=o$$

cu sistemul de drepte:

$$y(x-p-\alpha)=o$$

care definesc patru puncte fixe din plan, cu coordonatele:

$$M_1\begin{cases}\alpha\\ o\end{cases} \quad M_2\begin{cases}-(p+\alpha)\\ o\end{cases} \quad M_3\begin{cases}p+\alpha\\ +\sqrt{2p(p+\alpha)}\end{cases} \quad M_4\begin{cases}p+\alpha\\ -\sqrt{2p(p+\alpha)}.\end{cases}$$

3) Cînd β variază locul centrelor hiperbolelor (7) se va obține eliminînd pe β, între ecuațiunele:

$$2px-\beta y+p^2=o$$
$$-\beta x-2py+\beta(p+\alpha)=o$$

care dă cercul:

(8) $$x^2+y^2-\frac{p+2\alpha}{2}x-\frac{p(p+\alpha)}{2}=o.$$

4) Ecuațiunele laturilor patrulaterului $M_1M_3M_2M_4$, sînt:

$$M_2M_3\ldots\ldots y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{p}{p+\alpha}}(x+p+\alpha)=o$$

$$M_2M_4\ldots\ldots y+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{p}{p+\alpha}}(x+p+\alpha)=o$$

$$M_1M_3\ldots\ldots y-\sqrt{2}\sqrt{\frac{p+\alpha}{p}}(x-\alpha)=o$$

$$M_1M_4\ldots\ldots y+\sqrt{2}\sqrt{\frac{p+\alpha}{p}}(x-\alpha)=o.$$

iar ecuațiunea generală a conicelor circumscrise acestui patrulater este:

$$\left[y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{p}{p+\alpha}}(x+p+\alpha)\right]\left[y+\sqrt{2}\sqrt{\frac{p+a}{p}}(x-\alpha)\right]$$
$$+\lambda\left[y+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{p}{p+\alpha}}(x+p+\alpha)\right]\left[y-\sqrt{2}\sqrt{\frac{p+\alpha}{p}}(x-\alpha)\right]=o$$

sau:

(9) $$(1+\lambda)y^2-(1-\lambda)\frac{(p+2\alpha)\sqrt{2p(p+\alpha)}}{2p(p+\alpha)}xy-(1+\lambda)x^2$$
$$-(1-\lambda)\frac{(p+2\alpha)\sqrt{2p(p+\alpha)}}{2p}y-p(1+\lambda)x+\alpha(p+\alpha)(1+\lambda)=o$$

care reprezintă o familie de hiperbole echilatere.

Notă.— Problema, ast-fel cum a fost propusă, este un caz particular a celei tratate mai sus, și corespunde la valoarea lui $\alpha=o$.

Rezultatele pentru acest caz particular, pot fi lesne deduse din cele găsite în cazul cînd α este oare-care. In particular ecuațiunea generală a conicelor circumscrise patrulaterului $M_1M_2M_3M_4$, devine:

$$y^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)xy-x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)py-px=o.$$

b) ANALIZĂ.

Teoria ecuațiunelor diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

Aplicațiune : Să se integreze ecuațiunea :

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}=f(x).$$

(Timpul acordat 3 ore).

Prima parte a acestei chestiuni se găsește tratată în toate tratatele de analiză.

Integrala generală a ecuațiunei (1), fără al doilea membru este:

$$y=C_1+C_2e^{-ax}$$

Metoda variațiunelor constantelor, dă pentru integrala generală a ecuațiunei cu membrul al doilea :

(2) $$ay=\int f(x)dx+C'+e^{-ax}\left[\int f(x)e^{ax}dx+C''\right].$$

Cînd membrul al doilea al ecuațiunei (1) este nul, aceasta se poate integra ușor, nu numai în cazul cînd a este constant, dar încă în cazurile cînd a, ar fi : o funcțiune numai de x, sau o funcțiune de y, sau o funcțiune de $\frac{dy}{dx}$, sau în fine o funcțiune de forma: $\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma)$, α, β, γ fiind constante.

1) $$a=\varphi(x)$$

punînd : $$\frac{dy}{dx}=p,$$

obținem ecuațiunea :

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(x)p=o.$$

Variabilele se separă și avem:

$$p=-\int\varphi(x)\,dx+C'$$

iar:

$$y=-\iint\varphi(x)dx^2+C'x+C''$$

2) $$a=\varphi(y).$$

Introducînd carăși variabila p și eliminînd pe x avem:

$$\frac{dp}{dy}+\varphi(y)=o,$$

de unde:

$$p=\frac{dy}{dx}=C'-\int\varphi(y)dy,$$

iar:

$$x=\int\frac{dy}{C'-\int\varphi(y)dy}+C''.$$

3) $$a=\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Introducînd variabila p obținem ecuațiunile:

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(p)p=o,$$

$$\frac{dp}{dy}+\varphi(p)=o,$$

de unde:

$$x=C'-\int\frac{dp}{p\varphi(p)}=\varphi_1(p,C')$$

$$y=C''-\int\frac{dp}{\varphi(p)}=\varphi_2(p,C''),$$

care dă cele două variabile x și y în funcțiune de p.

4) $$a=\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma).$$

Pun:

$$\frac{dy}{dx}=p,$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma=u,$$

de unde:

$$\alpha+\beta p=\frac{du}{dx},$$

ecuațiunea propusă devine:

$$(\alpha+\beta p)\frac{dp}{du}+\varphi(u)p=o,$$

care poate fi integrată și dă:

$$p=\psi(u,C'),$$

Or: $$dx=\frac{du}{\alpha+\beta p}=\frac{du}{\alpha+\beta\psi(u,C')}$$

integrînd:

$$x=\int\frac{du}{\alpha+\beta\psi(u,C')}+C''=F(u,C')+C'',$$

care reprezinta integrala generală căutată.

c) MECANICĂ.

Să se găsească poziţiunea de echilibru a unei bare, ale cărei extremităţi sînt respinse de patru puncte fixe, proporţional cu distanţa.

(Timpul acordat 3 ore).

Presupun, mai general, ca extremităţile barei ar fi respinse, proporţional cu distanţa, de n puncte fixe, cu coordonatele respectiv egale cu: a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; . . . ; a_n, b_n, c_n.

Fie x, y, z coordonatele mijlocului barei; x_1, y_1, z_1 coordonatele uneia din extremităţi; x_2, y_2, z_2 coordonatele celei lalte extremităţi. Fie: X_{1i}, Y_{1i}, Z_{1i} conponentele forţei repulsive, ce pleacă din punctul (a_i, b_i, c_i), asupra punctului x_1, y_1, z_1.

Avem prin ipoteză:

$$X_{1i}=K(x_1-a_i) \qquad X_{2i}=K(x_2-a_i)$$
$$Y_{1i}=K(y_1-b_i) \qquad Y_{2i}=K(y_2-b_i)$$
$$Z_{1i}=K(z_1-c_i) \qquad Z_{2i}=K(z_2-c_i)$$

Pentru ca sistemul acesta de forţe să'şi facă echilibru asupra barei, trebue ca rezultanta forţelor aplicată în punctul (x_1, y_1, z_1) să fie egală şi de sens contrar cu rezultanta forţelor aplicată în (x_2, y_2, z_2); după acea trebue încă, ca această rezultantă să fie dirigiată după direcţiunea barei. Prima condiţiune dă:

$$\Sigma X_{1i}+\Sigma X_{2i}=o$$
$$\Sigma Y_{1i}+\Sigma Y_{2i}=o$$
$$\Sigma Z_{1i}+\Sigma Z_{2i}=o,$$

sau: $$n(x_1+x_2)-2\Sigma a_i=o$$

. . . . . .

sau încă: $$x=\frac{\Sigma a_i}{n};\ y=\frac{\Sigma b_i}{n};\ z=\frac{\Sigma c_i}{n}\quad (m),$$

ceia-ce arată că mijlocul barei trebue să coincidă cu centrul de greutate al celor n puncte repulsive, presupuse de mase egale.

Fie α, β, γ unghiurile pe care bara, în poziţiunea ei de echilibru le face cu axele coordonate; pentru ca rezultanta forţelor aplicate în (x_1, y_1, z_1) să fie dirigiată după direcţiunea barei, va trebui să avem :

$$\frac{\Sigma X_{1i}}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Y_{1i}}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Z_{1i}}{\cos\gamma},$$

sau :

$$\frac{nx - \Sigma a_i}{\cos\alpha} = \frac{ny - \Sigma b_i}{\cos\beta} = \frac{nz - \Sigma c_i}{\cos\gamma},$$

ecuaţiuni ce sînt identic satisfăcute, ori-care ar fi α, β, γ, în virtutea relaţiunelor (m).

Se poate ajunge la acest rezultat şi în alt mod. Zic că dacă mijlocul barei coincide cu centrul de greutate al celor n puncte repulsive, rezultanta forţelor aplicate în punctul $(x_1\ y_1\ z_1)$ va fi dirigiată după direcţiunea barei, ori-care ar fi această direcţiune.

In adevăr, fie $2l$ lungimea barei, avem :

$$x_1 = x + l\cos\alpha$$
$$y_1 = y + l\cos\beta$$
$$z_1 = z + l\cos\gamma.$$

Rezultanta forţelor aplicate în (x_1, y_1, z_1) are ca componente:

$$X_1 = \Sigma X_{1i};\quad Y_1 = \Sigma Y_{1i};\quad Z_1 = \Sigma Z_{1i},$$

sau:

$$X_1 = \Sigma k(x_1 - a_i) = k(nx + nl\cos\alpha - \Sigma a_i)$$

. . . . . .

însă în virtutea relaţiunelor (m) :

$$nx = \Sigma a_i,$$

deci :

$$X_1 = knl\cos\alpha.$$
$$Y_1 = knl\cos\beta.$$
$$Z_1 = knl\cos\gamma.$$

iar :

$$R = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = knl.$$

Adică că forţa rezultantă este proporţională cu numărul punctelor repulsive şi cu lungimea barei; iar direcţiunea ei este după direcţiunea barei. Deci :

Dacă mijlocul barei coincide cu centrul de greutate al celor n puncte date, bara se afla într'o poziţiune de *echilibru astatic.*

A. G. Ioachimescu

O PROPRIETATE A PUTERILOR LUI 2.

Avînd n puncte pe o curbă închisă și plecînd dintr'unul din ele și sărind pe rînd: 0, 1, 2, 3,..... $(n-1)$ puncte, pentru ce valori ale lui n vom trece prin toate punctele?

Dacă însemnăm cu: $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$, cele n puncte consecutive, chestiunea revine la găsirea valorilor lui n ast-fel ca valorile expresiunei $\frac{1}{2}k(k+1)$, pentru toate valorile lui k de la 0 la $n-1$, să fie congruente între ele după modulul n, adică împărțite cu n să dea resturi diferite, prin urmare dacă în loc de k vom pune k și $k+i$, va trebui să avem inegalitatea:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(k+i)(k+i+1) - \frac{1}{2}k(k+1) \not\equiv \mathcal{M}n,$$

pentru ori-ce valori ale lui k și i întregi, $> o$ și ast-fel ca:

$$(2) \qquad k+i < n.$$

Inegalitatea (1) se poate scrie:

$$(3) \qquad k \not\equiv \frac{\mathcal{M}n}{i} - \frac{i+1}{2}.$$

Insă din condițiunile (2) și (3) rezultă că n nu poate avea alte valori de cît 2^p, p fiind ori-ce număr întreg și pozitiv. In adevăr, dacă luăm $n=\alpha\beta$, α fiind un număr prim diferit de 2 și β fiind ori-ce număr întreg, pentru $i=\alpha$ condițiunea (3) devine:

$$k \not\equiv \mathcal{M}\beta - \frac{\alpha+1}{2}$$

și pentru că α este număr prim diferit de 2, $\frac{\alpha+1}{2}$ este număr întreg și prin urmare putem lua pe k egal cu numărul întreg:

$$\mathcal{M}\beta - \frac{\alpha+1}{2}$$

$\mathcal{M}$ fiind ast-fel ales ca condiția (2) să fie satisfăcută, ceia ce se poate totdeauna, și în acest caz condițiunea (3) nu mai este îndeplinită.

Dacă însă $n=2^p$, p fiind ori-ce număr întreg și pozitiv, condițiunea (3) este îndeplinită pentru ori-ce valori ale lui i și k cari satisfac condiția (2), căci nu putem avea:

$$k=\frac{\mathscr{M}n}{i}-\frac{i+1}{2},\ (k \text{ număr întreg}),$$

pentru că dacă i este număr par, descăzutul este număr întreg, însă scăzătorul este număr fracționar, iar dacă i este număr impar ar trebui ca i să dividă pe $\mathscr{M}$, cea-ce nu se poate, căci avem:

$$k+i=\frac{\mathscr{M}n}{i}+\frac{i-1}{2},$$

și din cauza condițiunei (2) trebue să avem:

$$k+i<n \text{ sau: } \frac{\mathscr{M}n}{i}+\frac{i-1}{2}<n$$

și dacă i ar divide pe $\mathscr{M}n$, cum $i>o$ și $\frac{\mathscr{M}n}{i}$ ar fi cel puțin egal cu n, această din urmă inegalitate n'ar mai fi satisfăcută.

Proprietate. Fie $n=2^p=2m$. Făcînd pe rînd $k=m-h$ și $k=m+h-1$, expresiunea $\frac{1}{2}k(k+1)$ ia valorile:

$$A=\frac{1}{2}(m-h)(m-h+1) \text{ și } B=\frac{1}{2}(m+h-1)(m+h),$$

de unde: $B-A=(2h-1)m=hn-m=(h-1)n+m$,

ceia-ce arată că punctele astfel obținute sînt *diametralmente opuse* (înțelegînd aci prin cuvintele diametralmente opuse că între ele se află de o parte și de alta a curbei cîte un număr egal de puncte).

In special pentru $h=m$, cele două puncte sunt punctul de plecare și punctul de la sfîrșit, prin urmare aceste două puncte sunt diametralmente opuse [1]).

C. Miclescu.

ȘCOALA NORMALĂ SUPERIOARĂ.

CHESTIUNI DE MATEMATICI PROPUSE LA CONCURSUL ÎNSCRIS DE ADMITERE.

(București, Octombre 1896.)

1) Să se găsească ecuațiele de condiție pentru ca polinomul:

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d$$

să fie un patrat perfect, și să se găsească rădăcina sa patrată.

[1]) Chestiunea tratată mai sus, generalizează problema 89 propusă în *Gazeta Matematică*, Volumul I pag. 160 și rezolvită la pag. 49 din Volumul II. In numărul viitor vom publica o altă demonstrațiune a acestei chestiuni.

2) Să se studieze natura rădăcinilor ecuației:

$$3x^2+2ax+a=0$$

cînd a variază de la $-\infty$ la $+\infty$:

3) Apotema unui decagon regulat este egală cu 2,40 m. Să se calculeze latura decagonului și raza cercului circumscris.

4) Dîndu-se

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

să se calculeze:

$$\sin\frac{\pi}{12},\quad \cos\frac{\pi}{12},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 94.** — *Să se construească un triunghiu cunoscîndu-se diferența unghiurilor* B *și* C, *distanța de la vîrful* A *la punctul de întîlnire al înălțimilor și diferența segmentelor determinate pe latura* BC *de către înălțimea ce pleacă din* A. (V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l I. Moscuna (București).

Să presupunem problema rezolvită. Fie ABC triunghiul cerut; O centrul cercului circumscris; P piciorul înălțimei scoborîtă din A; H ortocentrul (punctul de întîlnire al înălțimilor); M și N proecțiunile punctului O pe laturile BC, AC.

In caz cînd punctul M cade între B și C, adică cînd ambele unghiuri B și C sînt ascuțite, avem:

$$PC-PB=2PM=2a,$$

iar în caz cînd P cade pe prelungirea laturei CB, adică cînd unghiul B spre ex. e obtuz, avem:

$$PC+PB=2PM=2a.$$

Putem însă scrie în ambele cazuri

$$PC+PB=2PM=2a$$

cu condițiune de a da segmentelor PC, PB același semn, sau semne contrare, după cum sînt sau nu de același sens.

E ușor de văzut că unghiul $OAP=B-C$, atît în cazul cînd ambele unghiuri B și C sînt ascuțite, cît și în cazul cînd unul din ele e obtuz. In adevăr în primul caz (fig. 1) avem:

$$\sphericalangle OAP=\sphericalangle CAP-\sphericalangle CAO.$$

Dar $\measuredangle$ CAP$=90^0-$C, iar $\measuredangle$ CAO$=90^0-$NOA$=90^0-$B, căci unghiurile NOA, CBA au ambele aceiași măsură. Deci

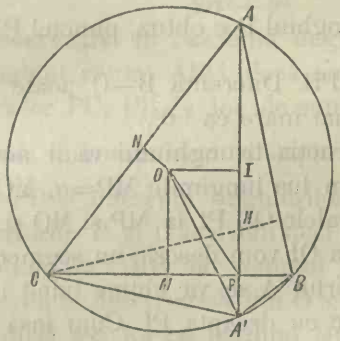
$$\measuredangle OAP=(90^0-C)-(90^0-B)=B-C.$$

In caz cînd unghiul B e obtuz, avem (fig. 2)

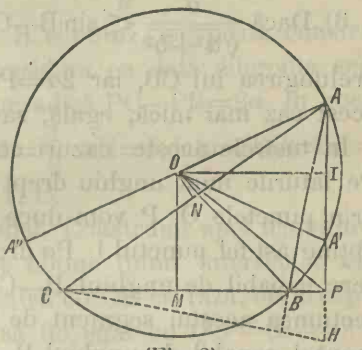
$$\measuredangle OAP=180^0-MOA=180^0-MON-NOA$$

sau

$$\measuredangle OAP=180^0-C-(180-B)=B-C.$$



(Fig. 1).



(Fig. 2).

Dacă considerăm triunghiul T ce are ca vîrfuri mijloacele laturilor triunghiului ABC, videm că acest triunghiu T are ca ortocentru punctul O și este asemenea cu triunghiul ABC, raportul de similitudine fiind egal cu (1:2). Ortocentrul triunghiului ABC fiind H, OM și AH sînt două elemente omoloage din triunghiurile T și ABC, și prin urmare:

$$OM=\frac{1}{2}AH.$$

Dacă punem: $AH=2b$,

atunci vom avea: $OM=b$.

Pe de altă parte observăm că OA$=$OB. Deci dacă ambele unghiuri B, C sînt ascuțite, atunci OA $>$ OP; dacă B$=90^0$, atunci OA$=$OP; iar dacă B e obtuz, atunci OA$<$OP.

Triunghiul dreptunghiu OAI în care OI$=$MP$=a$, ne dă:

$$OA=\frac{a}{\sin(B-C)},$$

iar triunghiul OMP ne dă:

$$OP=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Vom deosebi deci în privința datelor problemei următoarele trei cazuri:

1) Dacă $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} > \sin(B-C)$, triunghiul căutat are unghiurile B și C ascuțite; punctul P cade între B și C, iar $2a=PC-PB$.

2) Dacă $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(B-C)$, triunghiul căutat e dreptunghiu, unghiul $B=90^0$; punctele P și H se confundă cu B, iar $2a=BC$.

3) Dacă $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < \sin(B-C)$, unghiul B e obtuz; punctul P e pe prelungirea lui CB, iar $2a=PC+PB$. Diferența B—C poate fi în acest caz mai mică, egală, sau mai mare ca 90^0.

In tustrele aceste cazuri construcția triunghiului va fi aceiași. Pe laturile unui unghiu drept vom lua lungimile $MP=a$, $MO=b$; prin punctele O, P vom duce paralele OI, PI la MP și MO și vom obține ast-fel punctul I. Pe dreapta OI vom descrie un segment de cerc capabil de unghiul B—C. Vîrful A se va obține luînd intersecțiunea acestui segment de cerc cu dreapta PI. Cum însă segmentul capabil de unghiul B—C poate fi descris și dedesuptul lui OI, vom obține încă un punct A′ simetric cu A în raport cu I. E ușor de văzut că și pentru punctul A′ avem, în caz cînd unghiurile B și C sînt ascuțite:

$$\sphericalangle A'BC - \sphericalangle A'CB = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB = B-C,$$

in caz cînd unul din unghiurile B sau C este obtuz, avem (fig. 2):

$$\sphericalangle A'BC + \sphericalangle A'CB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = B+C.$$

iar în caz cînd unghiul B sau C e drept, atunci punctul A′ coincide cu B sau C.

Prin urmare în cazul 1) avem două triunghiuri ABC, A′BC ce corespund chestiunei (fig. 1), iar în cazurile 2) și 3) avem o singură soluțiune: triunghiul ABC.

Pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca circonferența descrisă din O ca centru, cu OA ca rază, să taie dreapta PM. Pentru aceasta va trebui să avem în totdeauna $OA > OM$, sau:

$$\frac{a}{b} > \sin(B-C).$$

In cazurile 1) și 2) această condiție e de la sine îndeplinită, căci dacă avem:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \sin(B-C),$$

a fortiori vom avea :

$$\frac{a}{b} > \sin(B-C).$$

In al treilea caz, această condiție subsistă pe lîngă inegalitatea 3), adică avem:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < \sin(B-C) < \frac{a}{b}.$$

Observație. In caz cînd unghiul B e obtuz, se poate construi triunghiul căutat ABC, dacă am considera ca dată diferența segmentelor PC, PB în loc de suma lor, adică PC—PB=2*a*. In acest caz am cunoaște deci distanța OM=$\frac{1}{2}$AH=*b*, latura BC=2*a* = PC—PB și diferența unghiurilor B și C.

Vîrfurile B și C le avem deci imediat. Construim apoi triunghiul dreptunghiu OMB, iar punctul A se obține luînd intersecția circonferenței descrisă din O ca centru cu OB ca rază, cu dreapta OA dusă așa fel ca unghiul MOA să fie egal cu 180°—(B—C).

Acest caz se prezintă cînd MB < MP, sau :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < \sin(B-C)$$

și problema este atunci totdeauna posibilă.

In acest caz, problema admite o singură soluție, triunghiul ABC, căci de și dreapta OA mai întîlnește circonferența O într'un al doilea punct A″ (fig. 2), pentru acest punct avem :

$$\sphericalangle A''BC + \sphericalangle A''CB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = B + C$$

și prin urmare nu corespunde chestiunei.

Soluțiune dată de D-nii : A. Iliovici, (Student, Iași); *C. Popovici,* (Student, Iași); *G. Iliovici,* (Elev în Clasa VI de la Liceul Național din Iași) și *I. Moscuna,* (București).

Fie H ortocentrul (punctul de întîlnire al înălțimilor) triunghiului ABC și D simetricul punctului B în raport cu P (fig. 3). Segmentul DC e cunoscut, căci:

$$DC = PC - PD = PC - PB = 2a.$$

Unim punctul D cu A și cu H. Avem :

$$\sphericalangle B = 90^0 - BAP; \qquad \sphericalangle C = 90^0 - PAC,$$

de unde prin scădere:

$$B - C = PAC - BAP.$$

Insă $\measuredangle BAP = \measuredangle PAD$ și prin urmare găsim:

$$\measuredangle DAC = B - C.$$

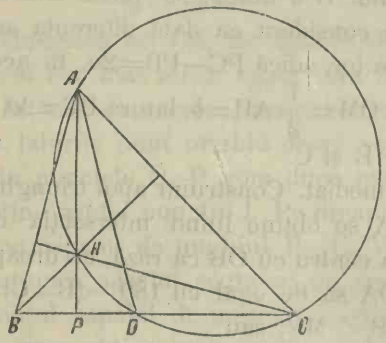
De asemenea avem:

$$\measuredangle B = 90^0 - HCP; \qquad \measuredangle C = 90^0 - HBC,$$

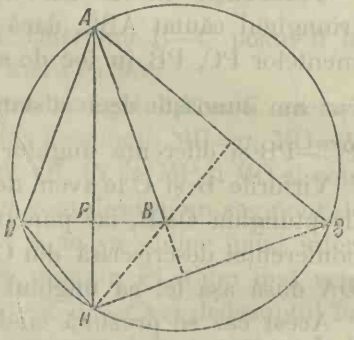
și deci: $B - C = HBC - HCP.$

Dar: $\measuredangle DHC = HDP - HCP = HBC - HCP,$

și deci: $\measuredangle DHC = B - C.$



(Fig. 3).



(Fig. 4).

Rezultă dar că punctele A și H se află ambele pe segmentul de cerc capabil de unghiul B—C și descris pe DC, de unde următoarea construcțiune:

Pe dreapta DC descrim un segment de cerc capabil de unghiul B—C, și ducem apoi o coardă AH perpendiculară pe DC și așa fel ca lungimea ei să fie egală cu lungimea dată AH (problemă cunoscută). Vom obține astfel două puncte A și H. Luăm apoi intersecția P a coardei AH cu DC și prelungim pe DP de o lungime PB=PD. Punctul B va fi cel de-al doilea vîrf al triunghiului; al treilea vîrf putînd fi sau A, sau H. Cu alte cuvinte obținem două triunghiuri ABC, HBC ce corespund chestiunei, căci se poate ușor demonstra că:

$$\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \measuredangle HBC - \measuredangle HCB = B - C.$$

E lesne de văzut că construcția dată subsistă și în cas cînd unghiul B spre ex. ar fi obtuz, dacă ni se dă suma $PB + PC = 2a$, în loc de diferența PC—PB. In adevăr dacă D e simetricul lui B în raport cu P (fig. 4), atunci:

$$\measuredangle DAC = B - C, \qquad \text{iar } \measuredangle DHC = 180^0 - (B - C),$$

așa că punctele A și H se găsesc amîndouă pe același segment de cerc capabil de unghiul B—C și descris deasupra lui DC.

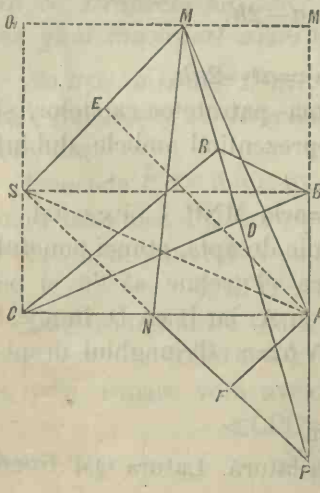
In acest caz însă avem un singur triunghiu ce corespunde chestiunei, anume triungiul ABC. Triunghiul HBC nu corespunde chestiunei, de oare-ce se poatea ușor videa că:

$$\sphericalangle HBC - \sphericalangle HCB = 180^0 - (B - C).$$

***Problema 114.** — *Se dă un triunghiu dreptunghiu* ABC *și înălțimea lui* AD. *Se ia pe* AD *punctul* M *așa că* AM=BC; *pe* CA *punctul* N *așa ca* CN=AB; pe BA *punctul* P *așa că* BP=AC; *pe* MA *un punct* R *așa că* MR=AD. *Se cere: 1) A se găsi expresiunea ariei triunghiului* MNP *în funcțiune de laturile triunghiului dat* ABC; *2) Să se demonstreze că aria* MNP *este egală cu indoitul ariei* BCR; *3) Cînd punctele* M, N, P, R *vor fi în linie dreaptă ?* **(I. Ionescu.)**

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna, (București) și *I. Anastasiadi,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele) și *Al. Ionescu,* (Elev în Clasa V de la Liceul Mihai Viteazul, București).

1) Să însemnăm cu *a*, *b*, *c* lungimile laturilor BC, CA și AB, și cu *h* înălțimea. Construim dreptunghiul CABS, și ducem bisectrița AE a unghiului CAB. Ducem dreptele MS, AS, PS. Triunghiul ASM este isoscel de oare-ce AM prin construcție e egal cu AC, iar AS e egal tot cu BC ca diagonale ale unui drepunghiu. Dreapta AE e și bisectrița unghiului MAS. In adevăr AE fiind bisectrița unghiului BAC avem:



$$CAE = EAB.$$

Apoi avem:

$$OAC = DAB,$$

căci ambele aceste unghiuri au respectiv ca complimente unghiurile egale SAB, CBA. Scăzînd aceste egalități avem:

$$SAE = MAE.$$

Dar bisectrița unui triunghiu isoscel corespondentă bazei e perpendiculară pe bază și prin urmare dreptele MS, AE sînt perpendiculare. Triunghiul SBP

este dreptunghiu și isoscel ca avînd laturile BS și PB egale cu AC. Deci unghiul BPS=45°. Dar BAE=45° ca jumătatea unui unghiu drept. Deci dreptele AE, PS sînt paralele ca avînd unghiurile corespondente BAE, BPS egale. De aci rezultă că MS e perpendiculară și pe PS. Dreapta PS întîlnește dreapta AC tocmai în punctul N. In adevăr prin construcțiunea punctelor N și P avem:

$$AN=AP=AC-AB=b-c.$$

Dar în triunghiul BPS am văzut că $\sphericalangle BPS=45^0$, și prin urmare triunghiul dreptunghiu format de dreptele BP, SP și AC este isoscel, și prin urmare latura PS întîlnește latura AC, la o depărtare de A egală cu AP adică în punctul N. Din cele spuse pînă aci reese că MS este înălțimea triunghiului MNP. Fie AF înălțimea triunghiului ANP. Această înălțime e egală cu ES ca paralele coprinse între paralele. Dar ES=EM, căci E e piciorul bisectriței ce pleacă din vîrful triunghiului isoscel. Deci MS=2AF.

Deci avem:

$$\text{aria MNP}=\frac{NT\times MS}{2}=NP\times AF.$$

Dar $NP\times AF$ exprimă dublul ariei triunghiului dreptunghiu ANP, și dublul arici mai are ca expresiune și $AN\times AP$ sau $(b-c)^2$. Deci avem:

$$\text{aria MNP}=(b-c)^2.$$

2) Prin construcțiune avem:

$$RD=MA-MR-AD=a-2h.$$

Deci:

$$2BRC=BC\times RD=a(a-2h)=a^2-2ah.$$

Inlocuind patratul ipotenusei prin suma patratelor catetelor, și produsul ah prin egalul său bc, ca reprezentînd ambele dublul ariei triunghiului ABC, avem:

$$2 \text{ aria } BRC=b^2+c^2-2bc=(b-c)^2=\text{aria MNP.}$$ e.c.e.d.d.

3) Dacă punctele M, R și N sînt în linie dreaptă, atunci punctul N va coincide cu punctul A, de oare-ce el trebue să fie și pe AD și pe AC. De asemenea P coincide cu A, iar R cu D. In acest caz însă AN sau $b-c$ devine nul, adică $b=c$. Triunghiul dreptunghiu trebue deci să fie isoscel.

Soluție dată de D-l A. Iliovici, (Iași).

Fie ACQM' patratul construit pe AC ca latură. Latura QM' trece

prin M, căci dacă numim M_1 punctul unde AD taie pe M'Q, triunghiul $M_1M'A$ și ABC sînt egale ca având AM'=AC, $\sphericalangle$M'AM=$\sphericalangle$BCA ca având laturile perpendiculare, iar unghiurile din A și M' egale ca drepte. Deci AM_1=BC și prin urmare M_1 coincide cu M. Linia NP taie linia CQ în S. Triunghiul dreptunghiu ANP fiind isoscel, și triunghiul dreptunghiu NCS este isoscel, căci unghiurile ANP și SNC sînt opuse la vîrf. Deci CS=NS. De aci rezultă că SQ este egal cu AN. Dar din egalitatea triunghiurilor MM'A și ABC reese că MM'=AB, și că prin urmare QM=BM'=AC—AB=AP=AN. Deci $MS=AN\sqrt{2}$. De asemenea avem $NP=AN\sqrt{2}$.

Unghiurile MSQ și CSN fiind de cîte 45° rezultă că unghiul MSP este drept și prin urmare MS e înălțimea triunghiului MNP. Deci:

$$\text{aria MNP}=\frac{1}{2}\times PN\times MS=\frac{1}{2}\times AN\times\sqrt{2}\times AN\times\sqrt{2}=\overline{AN}^2=(b-c)^2.$$

Această expresiune se mai poate scrie:

$$\text{aria MNP}=b^2+c^2-2bc=a^2-2ah=a(a-2h)=BC\times DR,$$

ceea-ce demonstră partea a doua.

Pentru ca M,N,P,R să fie în linie dreaptă, trebue ca N și P să vie în A, și prin urmare triunghiul trebue să fie isoscel.

***Problema 124.**— *Două circonferențe cu centrele* C *și* C' *se tae în punctele* A *și* B. *Prin* A *se duce o secantă variabilă ce întîlnește circonferența* C *în* M *și circonferența* C' *în* N. *Dreptele* MC, NC' *se întretae în punctul* P. *Se cere a se găsi maximul ariei triunghiului* PCC'. **(V. Cristescu.)**

Soluție dată de D-nii: Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici, București); *A. Iliovici* (Iași); *I. Moscuna* (București) și *C. Popovici* (Iași).

Punctele C, C' fiind fixe, aria triunghiului PCC' va fi maximă, cînd înălțimea PQ corespunzătoare bazei CC' va fi maximă.

Să unim punctul A cu C și C'. In triunghiul MNP avem:

$$\sphericalangle CPC'=180^0-(\sphericalangle CMA+\sphericalangle C'NA).$$

Dar triunghiurile CMA, C'NA fiind isoscele, avem:

$$\sphericalangle CMA=\sphericalangle CAM \text{ și } \sphericalangle C'NA=\sphericalangle C'AN$$

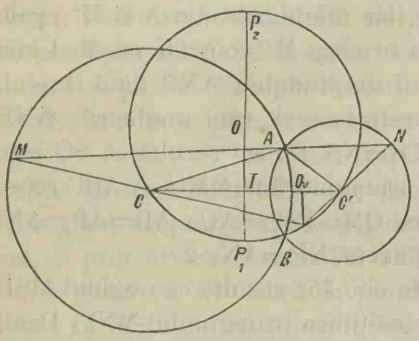
și prin urmare vom avea:

$$\sphericalangle CPC'=180^0-(CAM+C'AN)$$

sau:

$$\sphericalangle CPC'=\sphericalangle CAC'=?,$$

însemnînd cu φ unghiul CAC′ sub care se taie circonferențele C și C′. Unghiul CPC′ este deci constant; iar punctele C, C′ fiind fixe, rezultă că punctul P se află pe segmentul de cerc capabil de unghiul φ descris pe CC′ în partea opusă punctului A.



S'a presupus în demonstrația de mai sus că secanta MAN lasă de aceiași parte punctele C, C′ adică că punctul P este dedesuptul dreptei CC′. Cînd însă secanta MAN este cuprinsă între AC și AC′, punctul P cade deasupra dreptei CC′ și e ușor de văzut, printr'un raționament identic cu cel de mai sus, că în acest caz:

$$\measuredangle CPC' = 180^0 - \varphi.$$

Rezultă dar că locul geometric al punctului P este intreaga circonferență CPC′.

Se vede deci că înălțimea triunghiului CPC′ corespunzătoare bazei CC′ are două maxime și anume: unul IP_1 cînd P e dedesuptul dreptei CC′ și altul IP_2 cînd P este deasupra dreptei CC′; iar triunghiul CPC′ este isoscel pentru ambele poziții P_1 și P_2 ale punctului P.

Să însemnăm cu d distanța CC′ In triunghiurile dreptunghe CIP_1, CIP_2 avem:

$$IP_1 = \frac{1}{2} d \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}; \qquad IP_2 = \frac{1}{2} d \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

Prin urmare, în caz cînd punctul P este situat dedesuptul dreptei CC′, maximul ariei triunghiului CPC′ este:

$$S_1 = \frac{1}{4} d^2 \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}; \qquad (1)$$

iar în caz cînd P este situat deasupra dreptei CC′, maximul ariei triunghiului CPC′ este:

$$S_2 = \frac{1}{4} d^2 \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}. \qquad (2)$$

Dacă unghiul φ, sub care se taie cele două circonferențe, este mai mic ca 90°, atunci dintre cele două maxime (1) și (2) S_1 este *maximum maximorum*. Dacă circonferențele C,C′ sînt ortogonale,

$\varphi=90^0$ și cele două maxime sînt egale; iar dacă $\varphi > 90^0$ atunci S_2 este *maximum maximorum.*

Să însemnăm cu R, r razele circonferențelor C și C'. In triunghiul CAC' avem:

$$d^2=R^2+r^2-2Rr\cos\varphi,$$

de unde $$\cos\varphi=\frac{R^2+r^2-d^2}{2Rr},$$

iar formula: $$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$$

ne dă atunci:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{(R-r+d)(d+r-R)}{(R+r+d)(R+r-d)}}$$

și prin urmare expresiunile (1) și (2) devin:

$$S_1=\frac{d^2}{4}\sqrt{\frac{(R+r+d)(R+r-d)}{(R-r+d)(d+r-R)}}, \qquad S_2=\frac{d^2}{4}\sqrt{\frac{(R-r+d)(d+r-R)}{(R+r+d)(R+r-d)}}.$$

Mai observăm că:

$$S_1S_2=\frac{d^4}{16}.$$

***Problema 128.**— *Se dă relațiunea:*

$$a^2\log(\log\alpha)^2+2ab\log(\log\alpha.\log\beta)+b^2\log(\log\beta)^2=c$$

în care a, b, c, sînt niște numere date, iar α, β *două cantități variabile.*

Se cere a se calcula cea mai mică valoare a expresiunei:

$$m=\log(\alpha.\beta).$$ **(Gr. N. Makarie.)**

Soluție dată de D-nii: Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici, București); *C. Popovici* (Student, Iași); *A. Iliovici* (Iași) și *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național din Iași).

Punem:

$$\log\alpha=x, \qquad \log\beta=y.$$

Vom avea atunci de căutat minimul expresiunei

$$m=x+y, \qquad (1)$$

în care x și y sînt legați prin relațiunea:

$$a^2\log x^2+2ab\log(xy)+b^2\log y^2=c,$$

care se poate transforma succesiv precum urmează:

$$2a^2\log x+2ab\log x+2ab\log y+2b^2\log y=c,$$

$$2(a+b)a\log x+2(a+b)b\log y=c,$$

$$a\log x+b\log y=\frac{c}{2(a+b)},$$

$$\log(x^a y^b)=\frac{c}{2(a+b)}. \qquad (2)$$

Dacă punem:

$$\log d=\frac{c}{2(a+b)}, \qquad (3)$$

relațiunea (2) devine:

$$x^a y^b=d. \qquad (4)$$

Relațiunea (4) ne arată că suma $x+y$ va fi minimă cînd:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}. \qquad (5)$$

Dacă eliminăm pe x și y între relațiunile (1), (4) și (5) găsim că valoarea minimă a lui m este:

$$m=(a+b)\sqrt[a+b]{\frac{d}{a^a b^b}} \qquad (6)$$

***Problema 129.** — *Într'un cerc produsul distanțelor extremităților unei coarde la o altă coardă este egal cu produsul distanțelor extremităților acestei de a doua coarde la cea d'întâi.* (I. Moscuna.)

Soluțiune dată de D-nii: Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici, București); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași); *C. Popovici* (Student, Iași) și *D. Ioachimescu* (București).

Presupunem că coardele se taie afară din cerc. Demonstrația se face în același mod și în cazul cînd intersecția s'ar face în interiorul cercului.

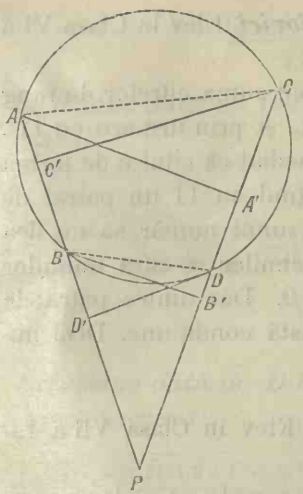
Triunghiurile dreptunghe PAA′, PCC′ avînd unghiul din P comun sînt asemenea și ne dau:

$$\frac{AA'}{CC'}=\frac{PA}{PC}.$$

In același mod găsim:

$$\frac{BB'}{DD'}=\frac{PB}{PD}.$$

Înmulțind aceste egalități avem:



$$\frac{AA' \times BB'}{CC' \times DD'} = \frac{PA \times PB}{PC \times PD}.$$

Dar după o proprietate a cercului, secantele PA, PC ne dau:

$$PA \times PB = PC \times PD.$$

Rezultă din compărarea ultimilor două egalități că vom avea:

$$AA' \times BB' = CC' \times DD'.$$ c.c.c.d.d.

Soluțiune dată de D-l G. Dragu, (București).

Avem:

Aria $PBD = PB \times DD' = PD \times BB'$.

Aria $PAC = PC \times AA' = PA \times CC'$.

Imulțind avem:

$$(AA' \times DD') \times (PB \times PC) = (BB' \times CC') \times (PD \times PA).$$

Dar se știe că:

$$PB \times PC = PD \times PA,$$

și prin urmare vom avea:

$$AA' \times DD' = BB' \times CC'.$$ c.c.e.d.d.

Soluțiune dată de D-l A. Iliovici (Iași).

Unghiurile PAC și PDB sînt egale ca suplimentele aceluiași unghiu BDC. In același mod vom arăta egalitatea unghiurilor PCA și PBD. Deci triunghiurile dreptunghe CAC' și BDB' de o parte, AA'C și DD'B de altă parte sînt asemenea ca avînd cîte un unghiu ascuțit egal. Deci:

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{BD'} \quad \text{și} \quad \frac{AA'}{DD'} = \frac{AC}{BD}.$$

De aci deducem:

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AA'}{DD'},$$

de unde în fine: $CC' \times DD' = BB' \times AA'$. c.c.e.d.d.

* **Problema 138.** — *Să se găsească numărul de patru cifre de forma aabb care să fie un patrat perfect* [1]).

(Gr. N. Makarie.)

Soluțiune dată de D-l Bogdan Ionescu (București); *A. Iliovici*

[1]) Această problemă se găsește propusă și rezolvită în *„Exercices d'Arithmétique"* de *Fitz-Patrick*. (N. R.)

(Iași), *C. Popovici,* (Student, Iași) și *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași).

Suma cifrelor de rang par fiind egală cu suma cifrelor de rang impar, patratul căutat este divizibil cu 11, și prin urmare cu 11^2. Impărțind patratul căutat cu 11 se vede imediat că cîtul e de forma *aob*, și acest cît trebuește obținut înmulțind cu 11 un patrat de două cifre. Pentru ca înmulțirea cu 11 a unui număr să ne dea la produs 0 la zecimi, trebue ca cifra zecimilor și cifra unimilor acelui număr adunate să ne dea 10 sau 0. Dar dintre patratele de două cifre numai 64 îndeplinește această condițiune. Deci numărul căutat este:

$$64 \times 11^2 = 7744.$$

Soluțiune dată de D-l C. Mateiescu (Elev în Clasa VII a Liceului din Craiova).

Procedînd ca la soluțiunea precedentă se vede că rădăcina patratului căutat, este un multiplu de 11 mai mic ca 100. Dar dintre multiplii lui 11 ridicați la patrat, singur 88 ne dă un patrat de forma *aabb* și acel patrat este 7744.

Soluțiune dată de D-l A. Iliovici (Iași).

Numerile ale căror patrate de 4 cifre au 2 cifre egale la urmă sînt 38, 62 și 88 [1]). Dar patratul cerut fiind divizibil cu 11, singurul număr admisibil din acestea este 88 și prin urmare numărul căutat este $88^2 = 7744$.

***Problema 143.** — *Să se simplifice expresiunea:*

$$\sqrt[3]{\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} + \sqrt[3]{\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}. \qquad \text{(I. Ionescu).}$$

Soluție dată de D-nii: C. Mateieseu, (Elev în clasa VII a Liceului din Craiova) și *C. S. Stănulescu,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, București).

Să însemnăm cu A valoarea acestei expresiuni. Avem:

$$A = \sqrt[3]{\frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}-1)^3}} + \sqrt[3]{\frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)^3}} = \frac{\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{\sqrt{2}-1} +$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}{\sqrt{2}+1}.$$

[1]) A se vedea *„Recreații Științifice"* Anul V, pag. 88.

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}.$$

Soluțiune dată de D-l G. Iliovici, (Elev în Clasa VI al Liceului din Iași).

Avem succesiv:

$$A=\sqrt[3]{\frac{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)^2}}+\sqrt[3]{\frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)^2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)}}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}+\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{1}=2\sqrt{2}.$$

Soluțiune dată de D-l A. Iliovici, (Iași).

Avem succesiv:

$$A=\frac{\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}+\sqrt[3]{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})}}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=$$

$$=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}.$$

Soluțiune dată de D-l Gr. N. Makarie, (București).

Ca și la soluțiunea precedentă găsim:

$$A=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

Ridicînd la cub avem:

$$A^3=10\sqrt{2}+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right),$$

sau:

$$A^3=10\sqrt{2}+3A,$$

de unde:

$$A^3-3A-10\sqrt{2}=0.$$

Rădăcinile acestei ecuațiuni de gradul al 3 sînt:

$$A'=2\sqrt{2},\qquad A''=-\sqrt{2}+\sqrt{-3},\qquad A'''=-\sqrt{2}-\sqrt{-3}.$$

Soluție dată de D-l C. Popovici, (Student, Iași).

Observăm că:

$$3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2.$$

Prin urmare dacă vom înmulți numărătorul și numitorul fie-cărei fracțiuni de sub radical, cu conjugata numitorului, numitorii devin: $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, și deci vom avea:

$$A=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}+\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}.$$

PROBLEME PROPUSE

*173. Dintr'un punct M situat pe latura BC a unui triunghiu ABC ducem perpendicularele MQ, MR pe laturile AB, AC. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel, dacă avem BQ=CR și dacă punctul M coincide cu piciorul medianei, bisectriței sau a înălțimei scoborîte din A. (V. CRISTESCU.)

*174. Să se demonstreze că expresiunea:

$$5^{2n+3}+2^{n+3}.3^{n+2}+2^{n+2}.3^{n+1}$$

este divizibilă prin 19. (I. IONESCU.)

*175. Să se demonstreze, fără a face vre-o extragere de rădăcină, că diferența:

$$\sqrt{90}-\sqrt{42}$$

are o valoare coprinsă între 3 și 3,5. (C. MICLESCU.)

176. Care sînt condițiunile de maximum sau minimum unic a funcțiunei:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e.$$ (GR. N. MAKARIE.)

*177. Intr'un cerc se iau coardele AB și BC respectiv egale cu laturile triunghiului echilateral și a exagonului regulat înscrise în cerc și se unesc mijloacele M și N ale arcelor AB, BC. Să se demonstreze că porțiunea din dreapta MN cuprinsă în unghiul ABC este egală cu latura dodecagonului regulat înscris în cerc. (I. IONESCU.)

*178. Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor unui triunghiu ABC în care vîrfurile B și C sînt fixe iar unghiul C constant. Se cere a se afla locul centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor HCA, HAB, HBC. (A. ILIOVICI.)

179. Să se afle învălitoarea primelor două locuri din problema precedentă (178) cînd unghiul C variază. (A. ILIOVICI.)

*180. Pe latura BC a unui triunghiu oare-care se ia un punct M ast-fel că ducînd perpendicularele MQ, MR pe laturile AB, AC, să avem BQ=CR și fie N, P punctele analoage situate pe laturile CA, AB. Să se demonstreze că dreptele AM, BN, CP sînt concurente. (V. CRISTESCU.)

*181. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$\frac{80}{x}+\frac{y}{4}=25,$$

$$\frac{80}{y}+\frac{x}{4}=5.$$

(I. IONESCU.)

UN NOU METOD PENTRU STUDIUL TRIGONOMETRIEI PLANE.



INTRODUCERE.

Scopul trigonometriei plane este rezolvirea prin calcul a triunghiurilor plane rectilinii. De ordinar studiul trigonometriei plane se face admiţîndu-se ca cunoscute geometria plană elementară şi algebra elementară. Cu modul acesta studiul trigonometriei nu poate fi uşor accesibil unor persoane pe cari le interesează foarte mult aplicaţiunile practice ale trigonometriei, dar cari nu au nevoe de această ştiinţă pentru a-şi continua mai departe studiul ştiinţelor matematice. Ast-fel sînt arpentorii, conductorii de poduri şi şosele, etc. Rezultă de aci că în unele cazuri este necesar a se reduce numărul cunoştinţelor pe cari se bazează studiul trigonometriei plane.

Pe de altă parte trigonometria avînd de scop rezolvirea triunghiurilor, este interesant a se face studiul ei bazîndu-ne numai pe cunoştinţa proprietăţilor triunghiurilor, şi a proprietăţilor necesare pentru stabilirea acestora. Ast-fel de exemplu pentru a găsi aria unui triunghiu avem nevoie de proprietăţile paralelogramelor şi deci de proprietăţile paralelelor.

In cele ce urmează voi arăta că putem studia trigonometria cunoscîndu-se: 1) Aritmetica teoretică la care s'ar adăoga şi teoria logaritmilor, ceea ce se şi face în cele mai multe din tratatele franceze de aritmetică. La noi de asemenea s'au publicat aritmetici cari conţin şi teoria logaritmilor. 2) O parte din geometria elementară, şi anume proprietăţile dreptelor, unghiurilor, triunghiurilor, perpendicularelor, paralelelor, paralelogramelor, precum şi proprietăţile relative la aria paralelogramului şi triunghiului, cari se pot stabili numai cu cunoştinţa celor enumerate mai sus. 3) Primele noţiuni de algebră, de cari însă ne-am putea dispensa dacă în studiul aritmeticei teoretice s'a căutat a se introduce treptat demonstraţiuni şi calcule făcute cu ajutorul literilor în loc de numere, ceea ce de alt-fel se şi face în unele tratate de aritmetică. Cu modul acesta studiul trigonometriei plane devine independent de cunoştinţa proprietăţilor cercului şi circonferenţei, şi chiar de cunoştinţa algebrei.

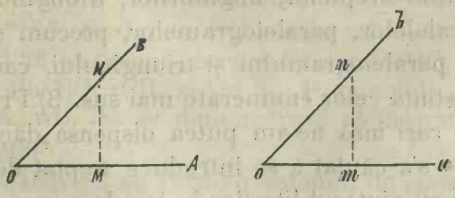
Am putea găsi relațiunile dintre elementele unui triunghiu servindu-ne de proprietățile triunghiurilor. Cum însă cunoștința proprietăților paralelogramelor ne este necesară pentru a găsi expresiunea ariei unui triunghiu, ne vom servi în cele ce urmează și de proprietățile paralelogramelor.

Inainte de a începe studiul trigonometriei, vom arăta că se poate stabili și direct măsura unghiurilor, fără a trece prin măsura arcelor, precum și modul de a executa fără ajutorul compasului unele construcțiuni relative la unghiuri.

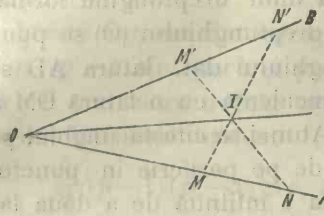
Măsurarea unghiurilor.

Vom lua ca unitate de măsură unghiul drept, și vom raporta toate unghiurile la această unitate de măsură. Vom găsi măsura unui unghiu în raport cu această unitate întocmai cum se găsește măsura unei drepte, și anume: 1) vom căuta de cîte ori se coprinde unghiul drept în unghiul dat; 2) de cîte ori restul se coprinde în unghiul drept; 3) de cîte ori restul obținut la operațiunea (2) se coprinde în restul operațiunei (1), etc., până cînd nu vom mai obține nici un rest dacă unghiul dat e comensurabil cu unghiul drept, sau un rest ori cît de mic am voi în cazul contrar. Măsura unghiului o deducem apoi întocmai ca măsura unei drepte în raport cu alta.

Pentru a putea face măsura unui unghiu dat, vedem că ne trebue să știm a construi un unghiu egal cu altul dat. Putem face această construcțiune cu ajutorul echerului în modul următor. Fie dat unghiul AOB. Pentru a construi un unghiu egal cu acesta, ducem o dreaptă *oa;* luăm pe OA punctul M și pe *oa* punctul *m* așa că OM=*om;* ridicăm în M și *m* perpendiculare pe dreptele OA și *oa*. Fie N punctul unde perpendiculara ridicată în N întîlnește linia OB. Pe perpendiculara ridicată în *m* luăm *mn*=MN, și ducem linia *onb*. Unghiul *aob* va fi egal cu unghiul AOB, din cauza egalității triunghiurilor OMN, *omn*, cari au OM=*om*, MN=*mn* și $\overset{\frown}{OMN}=\overset{\frown}{omn}$ ca drepte.



Putem face și împărțirea unui unghiu în două părți egale fără ajutorul compasului. Pe laturile unghiului dat AOB, luăm OM=OM′, ON=ON′ și ducem dreptele MN′, M′N care se taie în I.



Linia OI este bisectrița unghiului AOB. In adevăr triunghiurile OMN′, OM′N având unghiul din O comun și laturile adiacente egale prin construcție sînt egale și prin urmare $\widehat{ON'M}=\widehat{ONN'}$ și $\widehat{OM'N}=\widehat{OMN'}$. Triunghiurile MNI M′N′I au laturile MN=M′N′ ca diferențe de lungimi egale, unghiurile din N și N′ egale după cum am arătat mai sus, iar unghiurile din M și M′ sînt egale ca suplimentare unghiurilor egale OM′N și OMN′. Deci aceste triunghiuri sînt egale și prin urmare MI=M′I. Triunghiurile OMI, OM′I sînt egale ca având laturile OM=OM′ prin construcție, MI=M′I după cum am arătat mai sus, iar latura OI comună. Rezultă de aci egalitatea unghiurilor IOM, IOM′, c.c.e.d.d.

Ca diviziune a unghiului drept vom întrebuința *diviziunea centezimală*. Vom împărți *unghiul drept* în 100 de părți egale numite *grade;* gradul în 100 părți egale numite *minute* sau *centigrade;* minutul în 100 de părți egale numite *secunde;* iar secunda în 100 părți egale numite *sutimi de secundă*. De aci reese că submultipli unghiului drept merg din sută în sută ca și submultipli metrului patrat. Așa dar 1 unghiu drept, 17 grade 5 minute și 25 sutimi de secundă, le vom scrie:

$$1^d,17050025,$$

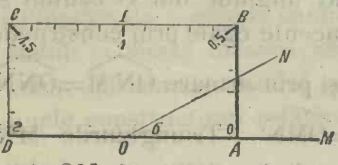
litera *d* însemnînd unghiuri drepte.

Actualmente se întrebuințează mai mult *diviziunea sexagezimală* și anume se împarte unghiul drept în 90 grade; gradul în 60 minute; minutul în 60 secunde, secunda în 100 sutimi de secundă. Putem trece ușor de la o diviziune la alta observînd că $100\times100\times100$ secunde centezimale echivalează cu $90\times60\times60$ secunde sexagezimale, sau că 1 secundă centezimală echivalează cu $\frac{90\times60\times60}{100\times100\times100}=0{,}324$ secunde sexagezimale. Ast-fel unghiul de mai sus se va scri în sistemul sexagezimal:

$$1170500{,}25\times0{,}324=379242{,}08=1^d15^m20^m42^s{,}08.$$

Pentru a face transformarea inversă vom divide cu 0,324 secundele sexagezimale.

Ca instrument de măsură a unghiurilor vom întrebuința *raportorul dreptunghiular*, care are forma unui dreptunghiu format din 2 patrate alăturate. Mijlocul laturei dreptunghiului (O) se pune în vîrful unghiului dat, latura AD se pune în coincidență cu o latură OM a unghiului. Atunci se citește unghiul pe diviziunile de pe periferie în punctul unde aceasta e întîlnită de a doua latură ON. Modul de gradațiune îl vom indica mai tîrziu.



Din cele expuse mai sus reese că măsurarea unghiurilor se poate face independent de cunoștința proprietăților arcelor de cerc și a măsurării lor. In cele ce urmează vom considera numai unghiurile mai mari ca 0 și mai mici ca 2 drepte.

(Va urma) I. Ionescu.

O PROPRIETATE A PUTERILOR LUI 2

APLICAȚIUNE.

Să ne propunem să găsim între numerele inferioare unui număr dat N, două numere m, m' $(m < m')$, astfel ca suma numerelor consecutive:

$$m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots\ m',$$

să fie egală cu N.

Suma acestor $m'-m+1$ numere în progresiune aritmetică este:

$$S = \frac{1}{2}(m'+m)(m'-m+1).$$

Pentru ca această sumă să fie egală cu N, trebue să avem:

(1) $$(m'+m)(m'-m+1)=2N.$$

Să presupunem că N nu este o putere a lui 2. In acest caz numărul 2N poate fi descompus în doi factori p, p' $(p > p' > 1)$, dintre care unul par iar celalt impar și diferit de 1. Avem astfel:

$$pp'=2N.$$

Să punem: $$m'+m=p,$$

$$m'-m+1=p'.$$

Resolvînd aceste ecuațiuni obținem:

$$m' = \frac{1}{2}(p+p'-1),$$

$$m = \frac{1}{2}(p-p'+1).$$

Aceste numere sînt întregi și pozitive fiind-că numerele $p+p'-1$ și $p-p'+1$ sînt pare și pozitive: ele sînt inferioare lui N, fiind că cel mai mare număr m' este inferior lui N după cum se poate vedea din neidentitatea:

$$\frac{1}{2}(p-1)(p'-1) > o, \text{ (s'a presupus mai sus } p > p' > 1)$$

neidentitate care ne dă:

$$\frac{1}{2}(p+p'-1) < \frac{1}{2}pp',$$

sau:

$$m' < N.$$

Numerele m și m' astfel obținute, fiind întregi pozitive, inferioare lui N și verificînd ecuațiunea (1), sînt numerele căutate. Problema este deci posibilă cînd, cum am presupus, numărul N nu este o putere a lui 2.

Să presupunem acum că N este o putere a lui 2.

Vom arăta că, în acest caz, suma S a unor numere consecutive inferioare lui N:

$$m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots\ m',$$

nu poate fi egală cu N nici cu un multiplu al lui N; că, prin urmare, în acest cas problema este imposibilă.

In adevăr, pentru ca această sumă S să fie un multiplu de N, trebue ca îndoitul ei, adică produsul $(m'+m)(m'-m+1)$, să fie un multiplu de 2N.

Fiind-că însă, numerele m' și m sînt inferioare lui N, suma lor, adică cel mai mare din factorii $(m'+m)$, $(m'-m+1)$, este inferioară lui 2N; deci nici unul din acești factori nu poate fi multiplu de 2N. De altă parte, acești factori, diferind printr'un număr impar $2m-1$, unul din ei este in mod necesar impar, prin urmare prim cu 2N care, prin ipoteză, este o putere a lui 2. Așa fiind, pentru ca produsul $(m'+m)(m'-m+1)$ să fie un multiplu de 2N, trebue ca unul din factorii $m'+m$, $m'-m+1$ să fie multiplu de 2N, cea ce am văzut că este imposibil.

Cele ce preced ne permit să demonstrăm următoarea propoziţiune:

Pentru ca între numerele inferioare unui număr dat N *să nu existe nici o grupă de numere consecutive a căror sumă să fie un multiplu de* N, *este necesar și suficient ca* N *să fie o putere a lui* 2.

Condițiunea este necesară, căci dacă ea nu este îndeplinită, numărul N nu este o putere a lui 2 și în acest caz există, cum am demonstrat, între numerele inferioare lui N, o grupă de numere consecutive a căror sumă este egală cu N.

Condițiunea este și suficientă căci, cum am văzut, cînd numărul N este o putere a lui 2, el nu poate divide o sumă de numere consecutive inferioare lui.

Aplicațiune. Să considerăm pe o circonferență [1]) N puncte.

Parcurgînd în același sens circonferența, să unim un punct cu următorul, acesta cu al 4-lea, al 4-lea cu al 7-lea și așa mai încolo, lăsînd succesiv de o parte 1, 2, 3, ... N—1 arce și oprindu-ne la a N—1 coardă. Formăm astfel o linie frîntă cu N vîrfuri. Pentru ca linia frîntă ast-fel construită să-și aibă fie-care din cele N vîrfuri pe cîte unul din cele N puncte considerate, este necesar și suficient ca două vîrfuri ale acestei linii să nu coincidă. Insă ca două vîrfuri, spre exemplu al m^{lea} și al m'^{lea} ($m<m'$), să nu coincidă, este necesar și suficient ca în construcțiunea liniei, circonferența să nu fi fost parcursă, (plecînd de la al m^{lea} vîrf pînă la al m'^{lea} vîrf) de un număr întreg de ori. Numărul de diviziuni parcurse pe circonferență este însă în acest caz un multiplu de N, fiind că N este numărul de diviziuni de pe circonferență. De altă parte acest multiplu de N este suma numerelor consecutive inferioare lui N:

$$m,\ m+1,\ .\ .\ .\ .\ .\ m'-1,$$

căci pentru a fi ajuns de la al m^{lea} vîrf la al m'^{lea} vîrf, am parcurs succesiv:

$$m,\ m+1,\ .\ .\ .\ .\ .\ m'-1 \text{ diviziuni.}$$

Am văzut însă că pentru ca să nu existe nici un astfel de număr, multiplu de N și sumă de numere consecutive inferioare lui N, este necesar și suficient ca N să fie o putere a lui 2. Cînd prin

[1]) Sau pe un contur închis oare-care.

urmare avem : $N=2^n$ și numai atunci, neputînd exista două numere m, m' $(m<m'<N)$ astfel ca suma numerelor:

$$m,\ m+1,\ \ldots\ldots\ m'-1,$$

să fie un multiplu de N, nu pot exista nici două vîrfuri cari să ocupe acelaș punct pe circonferență. In acest caz prin urmare toate 2^n vîrfuri se găsesc fie-care pe cîte unul din cele 2^n puncte considerate pe circonferență.

Observări. 1° Cînd cele 2^n arce de circonferență sînt egale, linia frîntă considerată este formată din coarde dintre cari a 2^{n-1} este un diametru al circonferenței iar cele l'alte 2^n-2 sînt două cîte două simetrice în raport cu centrul circonferenței.

2° Aplicațiunea de mai sus este o generalizare a unei proprietăți descriptive a liniei frînte care formează obiectul chestiunii No. 89, propusă de D-l *A. G. Ioachimescu* în *„Gazeta Matematică“*.

Putem găsi ușor lungimea liniei poligonale ast-fel construită. Dacă circonferența e divizată în 2^n părți, lungimele coardelor succesive vor fi:

$$2R\sin\frac{\pi}{2^n},\ 2R\sin 2\frac{\pi}{2^n},\ 2R\sin 3\frac{\pi}{2^n},\ \ldots\ldots\ 2R\sin\frac{(2^n-1)\pi}{2^n}.$$

Dacă însemnăm cu L lungimea liniei poligonale avem:

$$L=2R\left[\sin\frac{\pi}{2^n}+\sin\frac{2\pi}{2^n}+\sin\frac{3\pi}{2^n}+\ldots\ldots+\sin\frac{(2^n-1)\pi}{2^n}\right].$$

Făcînd suma celor 2^n-1 sinusuri de arce în progresiunea aritmetică avem:

$$L=2R\,\frac{\sin\dfrac{(2^n-1)\pi}{2.2^n}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\sin\left[\frac{\pi}{2^n}+\frac{(2^n-2)\pi}{2.2^n}\right],$$

sau:

$$L=2R\,\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\sin\frac{\pi}{2}=2R\cot g\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Aceasta este expresiunea căutată. Pentru $n=1$ avem:

$$L_1=2R\cot g\frac{\pi}{4}=2R.$$

Pentru $n=2$, avem:

$$L_2 = 2R\cot g\frac{\pi}{8} = 2R(1+\sqrt{2}).$$

Pentru $n=3$, care e cazul din problema 89, găsim :

$$L_3 = 2R\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{8}}\right).$$

I. Moscuna.

CHESTIUNI DE MATEMATICI PROPUSE LA EXAMENUL INSCRIS DE BACALAUREAT.

(Sesiunea Septembre 1895, București.)

SERIA I (19 Septembre.)

1.— A se efectua adunarea următoarelor trei fracțiuni:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Suma obținută va fi redusă la cea mai simplă expresiune.

2.— A se demonstra cu ce este egală suprafața sferei în funcțiune de rază.

3.— Se dă:

$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Se vor calcula valorile $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$.

(Timpul acordat 3 ore.)

SERIA II (21 Septembre.)

1.— A împărți trinomul $1-13x^6-8x^7$ prin trinomul $1-x-x^2$.

2.— Să se demonstre teorema:

«Dacă un triunghiu oare-care are două laturi neegale, unghiul opus celei mai mari din aceste două laturi este mai mare de cît unghiul opus celei-lalte laturi considerate.»

3.— A se demonstra relațiunile:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(Timpul acordat 3 ore.)

PROBLEME REZOLVITE [1]

* **Problema 105.** — *Să se demonstreze că coarda determinată pe înălțimea corespunzătoare laturei* BC *a unui triunghiu, de către cercul înscris, e văzută din centrul cercului sub un unghiu* θ *dat de formula :*

[1] Problema 143 a fost rezolvită și de D-l *B. Paraschivescu* în mod analog cu soluția dată de D-l *Gr. N. Makarie.*

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\pm\frac{\sin B-\sin C}{1-\cos A}.$$

Să se arate cum trebue modificată formula pentru cercurile exînscrise, și să se deducă că coardele determinate pe acea înălțime de cercurile exînscrise unghiurilor B *și* C, *precum și de cercul înscris și de cercul exînscris unghiului* A, *sînt proporționale cu razele acestor cercuri.* **(V. Cristescu.)**

Soluție dată de D-nul I. Moscuna (Bacalaureat, București).

Fie în triunghiul ABC, I centrul cercului înscris; EE' coarda determinată pe înălțimea corespunzătoare laturei BC de către cercul înscris; M, N proecțiunile punctului I pe înălțimea considerată și pe latura AC.

Avem în mod evident:

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{IM}{IE}=\frac{IM}{IN}$$

și fiind-că:

$$IM=IA\sin\widehat{IAM}\ ;\quad IN=IA\sin\frac{A}{2},$$

relațiunea de mai sus se poate scrie:

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{\sin\widehat{IAM}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Se poate videa însă ușor că:

$$\measuredangle IAM=\pm\frac{B-C}{2},$$

în care formulă va trebui să luăm semnul + cînd unghiul $B>C$, și semnul — cînd unghiul $B<C$.

Inlocuind pe IAM prin valoarea sa, obținem:

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\pm\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Imulțind ambii termeni ai fracțiunei din egalitatea precedentă cu membrii egalității:

$$2\cos\frac{B+C}{2}=2\sin\frac{A}{2},$$

obținem :

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\pm\frac{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}.$$

sau:

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\pm\frac{\sin B-\sin C}{1-\cos A}. \qquad (1)$$

Aceiași formulă (1) ne dă unghiul sub care e văzută, din centrul I_a al cercului exînscris în unghiul A, coarda DD' determinată pe înălțimea corespunzătoare laturei BC, de către acest cerc. In adevăr punctul A fiind centrul de asemănare directă a cercurilor I și I_a, unghiurile DI_aD', EIE' sînt egale ca formate de raze paralele și îndreptate în același sens.

Valoarea lui θ dată de formula (1) este reală numai cînd:

$$\sin\frac{B-C}{2}<\sin\frac{A}{2},$$

(presupunem $B>C$). Unghiurile $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ fiind mai mici ca 90^0 și sinusul între 0^0 și 90^0 crescînd împreună cu unghiul corespunzător, inegalitatea de mai sus este echivalentă cu condițiunea:

$$B-C<A$$

care este satisfăcută cînd, unghiurile B și C sînt ascuțite. In acest caz înălțimea corespunzătoare laturei BC tae cercul înscris și cercul exînscris unghiului A.

Cînd unul din unghiurile B sau C este obtuz, valoarea lui θ dată de formula (1) nu mai este reală. In adevăr dacă unghiul $B>90^0$, atunci avem:

$$B>C+A, \qquad \text{sau} \qquad B-C>A.$$

In acest caz înălțimea scoborîtă din A nu mai tae cercul înscris. Ea tae însă cercurile exînscrise unghiurilor B și C, ale căror centre să le însemnăm cu I_b și I_c.

Coardele determinate pe înălțimea ce pleacă din A de către cercurile I_b, I_c sînt văzute din centrele respective sub un același unghiu θ' dat de formula:

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{\sin B+\sin C}{1+\cos A},$$

formula ce se poate demonstra în mod analog cu formula (1).

Din egalitatea unghiurilor sub care sînt văzute din centrele cercurilor I_b, I_c coardele determinate pe înălțimea ce pleacă din A, rezultă proporționalitatea acestor coarde cu razele cercurilor. De asemenea, pentru același motiv, coardele determinate pe înălțimea ce pleacă din A de către cercurile I, I_a sînt proporționale cu razele acestor cercuri.

Aceste proporționalități rezultă de altfel și din aceia că punctul A este centrul de asemănare directă a cercurilor I, I_a precum și centrul de asemănare inversă a cercurilor I_b, I_c.

***Problema 109**. — (generalizată).— *Prin vîrfurile* A *și* C *ale unui patrulater* ABCD *se duce o circonferență care întîlnește latura* CD *într'un punct* M. *Prin punctele* M, B *și* D *se duce o a doua circonferență. Să se determine puntul* M *așa ca raportul razelor celor două circonferențe să fie un număr dat.* (G. Țițeica.)

Soluție dată de D-l I. Moscuna (Bacalaureat, București).

Fie AA′ și BB′ perpendicularele coborîte din A și B pe latura opusă CD; R_1 și R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAC și MBD.

După o proprietate cunoscută avem:

$$MA \cdot AC = 2R_1 \times AA',$$
$$MB \cdot BD = 2R_2 \times BB',$$

deci:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{R_1}{R_2} \times \frac{AA'}{BB'} \times \frac{BD}{AC} = k.$$

De oare-ce membrul al doilea este cunoscut, cestiunea se reduce a găsi pe CD un punct M ale cărui distanțe la punctele A și B sînt într'un raport dat. Așa dar punctul M se va afla la intersecția dreptei CD cu circonferința loc al punctelor ale căror distanțe la A și B sînt în raportul k. Avem deci două, una sau nici o soluție, după cum acea circonferință taie, este tangentă sau nu intersectează dreapta CD.

D-l *A. Iliovici* a dat o soluțiune algebrică a acestei chestiuni.

Problema 111. — *Să se găsească:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^4}.$$

(G. Țițeica.)

Să considerăm integrala următoare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{m\cos^2 x + n\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{mn}}, m>0, n>0,$$

a cărei valoare este imediată. Luînd derivata în raport cu m a ambelor membre, găsim:

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{(m\cos^2 x + n\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4m\sqrt{mn}},$$

tot așa luînd derivata în raport cu n, se obține:

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{(m\cos^2 x + n\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4n\sqrt{mn}},$$

de unde adunînd:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(m\cos^2 x + n\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{mn}}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

Luînd derivatele ambelor membre ale egalității (1) și (2) în raport cu m și n și adunînd se găsește:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(m\cos^2 x + n\sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16\sqrt{mn}}\left(\frac{3}{m^2} + \frac{2}{mn} + \frac{3}{n^2}\right);$$

și în același mod:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(m\cos^2 x + n\sin^2 x)^4} = \frac{\pi}{32\sqrt{mn}}\left(\frac{5}{m^3} + \frac{3}{m^2 n} + \frac{3}{mn^2} + \frac{5}{n^3}\right).$$

Punînd $m=a^2$, $n=b^2$ se obține integrala cerută. Se poate găsi o formulă de recurență, care să ne dea integrala conținînd puterea n cînd se cunoaște integrala care conține puterea $(n-1)$.

S'au primit soluțiuni de la D-nii: *B. Ionescu* și *D. Negulescu*, licențiați în Matematice, bazate amîndouă pe teoria variabilelor imaginare. Procedeul mai de sus e mai elementar și mai simetric.

***Problema 120.** — *Să se găsească, în mod elementar, valorile maxime și minime ale produsului:* $(x-3)(2x+1)(3x-1)$.

(C. Miclescu.)

Soluțiune dată de D-nii: Bogdan Ionescu, A. Iliovici, Gr. N. Makarie și *G. Penescu* (Student, București).

Vom întrebuința metoda *coeficienților nedeterminați* (Metoda lui *Grillet*). Înmulțim pe al doilea și al treilea factor cu m, n și punem condițiunea ca suma factorilor să fie constantă, apoi ca factori să fie egali între ei. Obținem astfel relațiunele:

$$1+2m+3n=0. \tag{1}$$

$$x-3=m(2x+1)=n(3x-1). \tag{2}$$

care dau:

$$m=\frac{x-3}{2x+1}, \qquad n=\frac{x-3}{3x-1}.$$

și:

$$18x^2-34x-4=0.$$

Cea din urmă relațiune dă valorile lui x pentru care productul este maxim sau minim; aceste valori sînt:

$$x_1=2, \qquad x_2=-\frac{1}{9}$$

iar valorile corespunzătoare ale produsului sînt:

$$y_1=-25, \qquad y_2=\frac{784}{243}.$$

y_1 este evident un minimum al produsului dat, iar y_2 un maximum.

Produsul:

$$y=(x-3)(2x+1)(3x-1),$$

variază de la $-\infty$ la $+\frac{784}{243}$, care este un maximum, cînd x variază de la $-\infty$ la $-\frac{1}{9}$; după acea descrește pînă la valoarea $y_1=-25$, care corespunde variațiunei lui x de la $-\frac{1}{9}$ la $+2$; în urmă crește pînă la $+\infty$, cînd x variază de la $+2$ la $+\infty$.

D-l *Badea Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a liceului din Ploești), ne a trimes o soluțiune foarte bună a acestei chestiuni, precum și o reprezentare grafică, a variațiunei funcțiunei. D-l *Badea Paraschivescu* s'a servit în soluțiunea D-sale de teoria elementară a derivatelor; lipsa de spațiu ne împedică a publica și această soluție.

Problema 123. — *Să se găsească suprafața a cărei podară în raport cu un punct fix dat să fie o sferă dată. Chestiunea analoagă pentru un punct și un cerc date într'un plan.* (C. Lupu.)

Soluție dată de D-l Bogdan Ionescu, (București).

Luăm centrul sferei date ca origina coordonatelor și punctul dat P pe axa OX la o distanță a de origină. Chestiunea revine la a căuta învălitoarea planelor ce trec prin M (punct pe sfera dată) și perpendiculare pe PM. Ecuația sferei va fi:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Ecuațiunile dreptei PM le putem scrie:

$$x=\lambda r,\ y=\mu r,\ z=\nu r,$$

$$\frac{X-a}{r\lambda-a}=\frac{Y}{r\mu}=\frac{z}{r\nu},$$

în care:

(1) $$\lambda^2+\mu^2+\nu^2-1=0=f(\lambda, \mu, \nu).$$

Ecuația planului PM va fi deci:

$$(r\lambda-a)(X-r\lambda)+r\mu(Y-r\mu)+r\nu(Z-r\nu)=o,$$

sau: (2) $$\lambda(Xr+ar)+\mu Yr+\nu Zr-aX-r^2=o=\varphi(\lambda, \mu, \nu).$$

Pentru a găsi învăluitoarea vom elimina pe λ, μ, ν intre ecuațiile 1), 2) și următoarele:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial\lambda}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial\mu}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial\nu}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}},$$

adică:

(3) $$\frac{\lambda}{Xr+ar}=\frac{\mu}{Yr}=\frac{\nu}{Zr}.$$

Din 1), 2) și 3) scoatem:

$$\frac{1}{r\sqrt{(X+a)^2+Y^2+Z^2}}=\frac{1}{aX+r^2},$$

care e ecuația locului căutat. Această ecuație se poate scrie:

$$X^2(r^2-a^2)+Y^2r^2+Z^2r^2=r^2(r^2-a^2),$$

sau:

(4) $$\frac{X^2}{r^2}+\frac{Y^2}{r^2-a^2}+\frac{Z^2}{r^2-a^2}=1.$$

Aceasta e o suprafață de revoluție în jurul lui OX. Cînd punc-

tul e în interiorul sferei ($r>a$) suprafața e un elipsoid; când punctul P e pe sferă ($r=a$), suprafața se reduce la un punct; și când punctul P e exterior sferei ($r<a$), atunci suprafața e un hiperboloid.

Pentru partea a doua a chestiunei procedînd în mod analog găsim pentru ecuațiunea curbei căutate:

$$\frac{X^2}{r^2}+\frac{Y^2}{r^2-a^2}=1.$$

Accasta reprezintă o elipsă, hiperbolă sau un punct, după cum: $a<r$, $a>r$ sau $a=r$.

* **Problema 125.** — *Se dă trinomul* ax^2+bx+c *și se cere: 1) Să se determine a, b, c, ast-fel ca trinomul să aibă aceiași valoare pentru* $x=a$, $x=b$ *și* $x=c$; *2) In aceste condițiuni să se găsească rădăcinile trinomului.* **(I. Ionescu).**

Soluțiune dată de D-l Gr. N. Makarie, (București).

Din enunciu rezultă următoarele ecuațiuni:

(1) $\quad a^3+ab+c=ab^2+b^2+c=ac^2+bc+c.$

De aci deducem suprimînd termenul c:

$$a^3+ab=ac^2+bc, \quad \text{și} \quad ab^2+b^2=ac^2+bc,$$

de unde:

$$(a-c)(a^2+ac+b)=o, \quad \text{și} \quad (b-c)(ab+ac+b)=o.$$

Prin urmare egalitățile 1) se pot satisface în următoarele patru moduri:

2) $\quad a-c=o, \quad$ și $\quad b-c=o.$

3) $\quad a-c=o, \quad$ și $\quad ab+ac+b=o.$

4) $\quad a^2+ac+b=o, \quad$ și $\quad b-c=o.$

5) $\quad a^2+ac+b=o, \quad$ și $\quad ab+ac+b=o.$

Din 2) deducem:

6) $\quad a=c=b.$

Din 3) deducem:

7) $\quad a=c, \qquad b=-\frac{a^2}{a+1}.$

Din 4) deducem:

8) $\quad b=c=-\frac{a^2}{a+1}.$

Din 5) deducem:

9) $\quad a=b=-(c+1).$

Prin urmare trinomul căutat este de una din următoarele 4 forme:

$a)$ $\qquad mx^2+mx+m.$

$b)$ $\qquad mx^2-\frac{m^2}{m+1}x+m.$

$c)$ $\qquad mx^2-\frac{m^2}{m+1}x-\frac{m^2}{m+1}.$

$d)$ $\qquad mx^2+mx-(m+1).$

De aci se vede că numai trinoamele $a)$ și $d)$ sînt întregi. Rădăcinele acestor trinoame sînt:

$a')$ $\qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ (independent de m)

$b')$ $\qquad x=\frac{m\pm\sqrt{-(m+1)(3m+1)}}{2(m+1)}.$

$c')$ $\qquad x=\frac{m\pm\sqrt{5m^2+4m}}{2(m+1)}.$

$d')$ $\qquad x=\frac{m\pm\sqrt{5m^2+4m}}{2m}.$

Se vede de aci că doi din coeficienții a, b, c trebue să fie egali. Aceasta de alt-fel se poate prevede, de oare-ce un trinom de gradul II nu poate avea aceiași valoare pentru mai mult de două valori ale variabilei.

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (București).

Fie d valoarea comună a trinomului pentru $x=a$, $x=b$, $x=c$. Valorile a, b, c, nu pot fi toate diferite căci ele verifică ecuațiunea:

$$ax^2+bx^2+c-d=o,$$

care fiind de gradul al 2-lea nu poate avea mai mult ca două rădăcini.

Trebue deci să avem una din egalitățile:

$$a=b, \quad b=c, \quad c=a.$$

Să presupunem că avem una din aceste egalități; în acest caz, trinomul devine de una din formele:

$$f_1(x)=ax^2+ax+c,$$
$$f_2(x)=ax^2+bx+b,$$
$$f_3(x)=ax^2+bx+a.$$

Substituind în $f_1(x)$ lui x pe a și c, trebue să avem, după enunț:

Mai avem: $\qquad \left.\begin{matrix} f_1(a)=f_1(c) \\ a=b \end{matrix}\right\}$ (α).

Valorile b, c, sînt date în funcțiune de a de sistemul celor două ecuațiuni precedente.

Tot ast-fel sistemele:

$$\left.\begin{matrix} f_2(a)=f_2(b), \\ b=c. \end{matrix}\right\} (\beta) \qquad \left.\begin{matrix} f_3(a)=f_3(b), \\ c=a. \end{matrix}\right\} (\gamma)$$

dau alte sisteme de soluțiuni adică pe b, c, în funcțiune de a.

Sistemele precedente de ecuațiuni devin după calcul și simplificare:

$$\left.\begin{matrix} a(a+c+1)(a-c)=o, \\ a=b \end{matrix}\right\} (\alpha') \qquad \left.\begin{matrix} (a+1)b^2-ab-a^3=o, \\ b=c. \end{matrix}\right\} (\beta')$$

$$\left.\begin{matrix} (a+1)b^2-ab-a^3=o, \\ c=a. \end{matrix}\right\} (\gamma')$$

Sistemul de ecuațiuni (α') se desface în trei alte sisteme; sistemele (β') și (γ') se desfac în cîte două alte sisteme de ecuațiuni.

Soluțiunile tuturor acestor sisteme sînt:

(1) $a=b=o.$ (4) $a=b=c.$ (6) $a=b=c.$

(2) $\left\{\begin{matrix} c=-(a+1), \\ a=b. \end{matrix}\right.$ (5) $\left\{\begin{matrix} b=-\dfrac{a^2}{a+1}, \\ b=c. \end{matrix}\right.$ (7) $\left\{\begin{matrix} b=-\dfrac{a^2}{a+1}, \\ c=a. \end{matrix}\right.$

(3) $a=b=c.$

Depărtînd sistemul de soluțiuni (1) pentru care trinomul se reduce la constanta c, avem în definitiv, ca soluțiuni ale problemei, patru sisteme distincte: (2), (3), (5), (7).

Pentru ca trinomul ax^2+bx+c să aibă o aceiași valoare pentru $x=a$, $x=b$, $x=c$, este deci necesar și suficient ca el să fie de una din formele:

$$ax^2+ax-(a+1),\ ax^2+ax+a,\ ax^2-\frac{a^2}{a+1}x-\frac{a^2}{a+1},\ ax^2-\frac{a^2}{a+1}x+a.$$

Rădăcinile respective ale acestor trinoame sînt:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a(5a+4)}}{2a},\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a(5a+4)}}{2(a+1)},$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4(a+1)^2}}{2(a+1)}.$$

***Problema 134.**— *Să se probeze că expresiunea :*

$$(a^{2^m}+1)(a^{2^{m-1}}+1)^2(a^{2^{m-2}}+1)^3 \ldots\ldots(a^{2^{m-n}}+1)^{n+1}$$

se poate pune sub forma unui produs de sume de termini în progresiune geometrică. **(C. Popovici.)**

Soluție dată de D-l I. Moscuna (Bacalaureat, București) și *A. Iliovici* (Student, Iași).

Expresiunea dată se poate descompune în $n+1$ produse:

$$P_1=(a^{2^{m-n}}+1)(a^{2^{m-n+1}}+1)\ldots\ldots(a^{2^{m-1}}+1)(a^{2^m}+1)$$

$$P_2=(a^{2^{m-n}}+1)(a^{2^{m-n+1}}+1)\ldots\ldots(a^{2^{m-1}}+1)$$

. . . . . .

$$P_n=(a^{2^{m-n}}+1)(a^{2^{m-n+1}}+1)$$

$$P_{n+1}=(a^{2^{m-n}}+1).$$

Propositiunea va fi stabilită dacă vom demonstra că fie-care din aceste produse poate fi pus sub forma unei sume de termini în progresiune geometrică.

Or, avem, înmulțind și împărțind cu $(a^{2^{m-n}}-1)$, unul oare-care din aceste produse, al p^{lea} spre exemplu:

$$P_p=\frac{(a^{2^{m-n}}-1)(a^{2^{m-n}}+1)\ldots\ldots(a^{2^{m-p+1}}+1)}{(a^{2^{m-n}}-1)}.$$

Observînd că produsul de la numărător se poate efectua, căci avem de înmulțit succesiv suma a două numere prin diferența lor, putem scrie, efectuînd produsul:

$$P_p=\frac{(a^{2^{m-p+2}}-1)}{a^{2^{m-n}}-1}.$$

Sub această formă se vede că produsul P_p este suma termenilor progresiunei geometrice:

$$1,\quad a^{2^{m-n}},\quad a^{2^{m-n+1}},\ldots\ldots\quad a^{2^{m-p+1}}.$$ c.c.e.d.d.

Soluție dată de D-l Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici. București).

Să punem pentru prescurtare :

$$a^{2^{m-n}}=\lambda.$$

Expresiunea dată devine:

$$(\lambda^{2^n}+1)(\lambda^{2^{n-1}}+1)^2(\lambda^{2^{n-2}}+1)^3\ldots\ldots(\lambda+1)^{n+1},$$

în care putem considera ca factori ce o formează următorii:

$$(\lambda+1),\ (\lambda^2+1)(\lambda+1),\ (\lambda^{2^2}+1)(\lambda^2+1)(\lambda+1),\ \ldots\ldots;$$
$$(\lambda^{2^n}+1)(\lambda^{2^{n-1}}+1)(\lambda^{2^{n-2}}+1)\ldots\ldots(\lambda+1),$$

și care sînt niște progresii geometrice cu primul termen 1, rațiunea λ și ultimul termen respectiv:

$$\lambda^{2^1},\ \lambda^{2^1+2^1},\ \lambda^{2^1+2^1+2^1}\ldots\ldots\lambda^{2^1+2^1+2^1+\ldots\ldots+2^n}.$$

In adevăr acest lucru este evident pentru primul și al doilea factor; rămîne să arătăm că dacă e adevărat pentru factorul:

$$(\lambda^{2^{k-1}}+1)(\lambda^{2^{k-2}}+1)\ldots\ldots(\lambda^2+1)(\lambda+1),$$

este adevărat și pentru factorul:

$$(\lambda^{2^k}+1)(\lambda^{2^{k-1}}+1)\ldots\ldots(\lambda^{2^1}+1)(\lambda+1),$$

să punem:

$$\Sigma_{k-1}=2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots\ldots+2^1+2^0;$$

Presupunem dar ca adevărat:

$$(1)\quad (\lambda^{2^{k-1}}+1)(\lambda^{2^{k-2}}+1)\ldots\ldots(\lambda^{2^1}+1)(\lambda^{2^0}+1)=$$
$$\lambda^{\Sigma_{k-1}}+\lambda^{\Sigma_{k-1}-1}+\ldots\ldots+\lambda+1.$$

Vom demonstra că:

$$(2)\quad (\lambda^{2^k}+1)(\lambda^{2^{k-1}}+1)\ldots\ldots(\lambda^{2^1}+1)(\lambda^{2^0}+1)=\lambda^{\Sigma_k}+\lambda^{\Sigma_k-1}+\ldots+\lambda+1.$$

In adevăr înmulțind cu $\lambda^{2^k}+1$ ambii membrii ai egalității (1) avem pe de o parte în primul membru pe prima parte a egalității (2) iar pe de alta în al doilea observăm că: înmulțind toți termenii cu λ^{2^k} obținem o progresie geometrică cu primul termen λ^{Σ_k} cu rațiunea λ^{-1} și cu ultimul termen λ^{2^k}; apoi înmulțindu-i cu 1, obținem o progresie geometrică cu primul termen $\lambda^{\Sigma_{k-1}}$, cu aceași rațiune și cu ultimul termen 1. Aceste două progresii nu formează de cît una și aceași dacă avem:

$$(3)\qquad 2^k=\Sigma_{k-1}+1.$$

Dar din (1) avem:

$$(4) \qquad 2^{k-1} = \Sigma_{k-2} + 1.$$

Înmulțind de o parte și de alta pe (4) cu 2 obținem tocmai (3).

c.c.e.d d.

***Problema 146.** — *Să se rezolve ecuația :*

$$\sin 2x - 2(\sin x + \cos x + 1)\{2\sqrt{2}\cos(x - 45^0) + 1\} = 0.$$

(Gr. N. Makarie.)

Soluție dată de D-nii: G. Dragu (București); *A. Iliovici* (Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași); *C. Mateiescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Craiova), *C. Popovici* (Iași); *G. Penescu* (Student, București) și *G. Giușcă* (București).

Avem:

$$2\sqrt{2}\cos(x - 45^0) = 2\sqrt{2}(\cos x \cos 45^0 + \sin x \sin 45^0) =$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cos x + 2\sin x.$$

Înlocuind pe $2\sqrt{2}\cos(x - 45^0)$ prin $2\cos x + 2\sin x$ și pe $\sin 2x$ prin $2\sin x \cos x$, ecuațiunea dată devine:

$$2\sin x \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) - 8\sin x \cos x - 6\sin x - 6\cos x - 2 = 0,$$

sau în fine: $\sin x \cos x + \cos x + \sin x + 1 = 0,$

de unde:

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0.$$

Deci rădăcinile ecuațiunei date sînt date de următoarele două ecuațiuni:

$$\sin x = -1 \qquad \text{și} \qquad \cos x = -1.$$

De unde rezultă că x poate avea următoarele valori:

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{3\pi}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \pi.$$

Primele două serii de soluțiuni sînt identice căci:

$$(2k+1)\pi - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2(k-1)\pi + \frac{3\pi}{2} = 2k'\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

A treia serie de soluțiuni se poate scrie fără dublu semn:

$$x = (2k+1)\pi.$$

***Problema 150.** — *Se consideră două numere pozitive a, b precum și media lor geometrică m. Se cere a se ști:* 1) *De care din cele două numere a, b se apropie mai mult m;*

2) *Care este limita către care tinde raportul diferențelor* $a-m$, $b-m$ *când* b *tinde către* a. (I. Ionescu.)

Soluție dată de D-l B. Paraschivescu, (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești).

Să presupunem $a>b$. Observînd că $m=\sqrt{ab}$ avem:

$$a-m=a-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b}),$$

$$b-m=b-\sqrt{ab}=\sqrt{b}\,(\sqrt{b}-\sqrt{a}).$$

De aci se vede imediat că $a-m>b-m$. In adevăr prima diferență e pozitivă iar a doua e negativă căci $\sqrt{b}<\sqrt{a}$. Dar această neegalitate are loc și în valoare absolută, căci de și ambele diferențe au un factor comun $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ dar celalt factor $\sqrt{a}$ al primei diferențe e mai mare ca celalt factor $\sqrt{b}$ al diferenței a doua. Prin urmare m se apropie mai mult de b de cît de a, adică de cel mai mic din cele două numere date, de cît de cel mai mare.

Avem apoi:

$$\frac{a-m}{b-m}=-\frac{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Cînd $a=b$, atunci $m=a=b$, iar raportul diferențelor devine -1. Nu putem lua dublu semn pentru radical căci raportul e totdeauna negativ.

Soluție dată de D-l A. Iliovici, (Student, Iași).

Să presupunem $a>b$ și să punem:

$$a=b(1+\alpha)^2,$$

α fiind o cantitate pozitivă. Avem în acest caz:

$$m=\sqrt{ab}=b(1+\alpha),$$

$$a-m=b(1+\alpha)(1+\alpha-1)=b\alpha(1+\alpha),$$

$$b-m=b(1-1-\alpha)=-b\alpha.$$

Cum $1+\alpha>1$, rezultă că m se apropie mai mult de b de cît de a, adică de cel mai mic din cele două numere de cît de cel mai mare. Avem apoi:

$$\frac{a-m}{b-m}=-\frac{b\alpha(1+\alpha)}{b\alpha}=-(1+\alpha).$$

Dar cînd b tinde către a, α tinde către zero, și prin urmare raportul diferențelor tinde către -1.

Soluție dată de D-l C. Popovici, (Student, Iași).

Să punem $a=bq$, q fiind un număr pozitiv mai mare ca 1. Vom avea:

$$q > \sqrt{q} > 1;$$

și prin urmare, înmulțind cu b peste tot:

$$bq > b\sqrt{q} > b,$$

sau:

$$a > \sqrt{b}.bq > b,$$

și în fine:

$$a > m > b.$$

Apoi:

$$a - m = b(q - \sqrt{q}) = b\sqrt{q}(\sqrt{q} - 1),$$
$$b - m = b(1 - \sqrt{q}) = -b(\sqrt{q} - 1).$$

Cum $\sqrt{q} > 1$ se vede că m se apropie mai mult de b. Avem încă:

$$\frac{a-m}{b-m} = -\sqrt{q}.$$

Cînd $a=b$, avem $\sqrt{q}=1$. Deci raportul devine -1.

***Problema 159.**— *Să se rezolve ecuația :*

$$4x^7 - 8ax^6 - 4(c^2+d)x^5 + 8a(c^2+d)x^4 + d(4c^2+d)x^3$$
$$-2ad(4c^2+d)x^2 - c^2d^2x + 2ac^2d^2 = o.$$ (G. Iliovici.)

Soluție dată de D-nii: A. Iliovici (Iași); *Ioseph Wittner* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Focșani); *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Turnu-Severin) și *I. Anastasiadi* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Ecuația dată se poate scrie succesiv:

$$4x^6(x-2a) - 4(c^2+d)x^4(x-2a) + d(4c^2+d)x^2(x-2a) - c^2d^2(x-2a) = o,$$
$$(x-2a)(4x^6 - 4c^2x^4 - 4dx^4 + 4c^2dx^2 + d^2x^2 - c^2d^2) = o,$$
$$(x-2a)[4x^4(x^2-c^2) - 4dx^2(x^2-c^2) + d^2(x^2-c^2)] = o,$$
$$(x-2a)(x^2-c^2)(4x^4 - 4dx^2 + d^2) = o,$$
$$(x-2a)(x^2-c^2)(2x^2-d)^2 = o.$$

Se vede dar că ecuația propusă are 3 rădăcini simple, adică:

$$x_1 = 2a, \qquad x_2 = +c, \qquad x_3 = -c,$$

și 2 rădăcini duble, adică:

$$x_{4,5} = +\sqrt{\frac{d}{2}}, \quad x_{6,7} = -\sqrt{\frac{d}{2}}.$$

PROBLEME PROPUSE

*182. Să se demonstreze că pentru n întreg și pozitiv, expresiunea:

$$49^{n+2}.39^{2n}-75.2^{2n+5}-4^{n}$$

este divizibilă prin 1897. (I. IONESCU.)

*183. Într'un tetraedru se consideră cea mai scurtă distanță AB între două coame opuse și paralelogramul CDEF cu vîrfurile în mijloacele celor-alte patru coame. Să se demonstreze: 1) că planul CDEF este perpendicular pe dreapta AB și o împarte în două părți egale; 2) că volumul tetraedrului este egal cu două treimi din produsul lungimei AB prin suprafața CDEF. (C. MICLESCU.)

*184. Fie I, R înălțimea unui con și raza sferei înscrise; S, s suprafața totală a conului și suprafața sferei; în fine V și v volumele acelorași corpuri.

a) Să se demonstreze că:

$$V=\frac{S\times R}{3}.$$

b) Să se determine raportul:

$$\frac{V}{v}=\frac{S}{s}=m,$$

cînd se dă:

$$\frac{I}{R}=k.$$

c) Să se găsească minimul lui m cînd k variază. (G. ȚIȚEICA.)

185. Produsul a nouă numere întregi consecutive nu poate fi un cub perfect. (I. GHIBALDAN.)

*186. Să se construiască un patrulater cunoscîndu-se trei laturi și unghiurile adiacente celei de a patra laturi. (I. MOSCUNA.)

*187. Să se găsească o progresiune aritmetică de 4 termeni știindu-se că produsul termenilor de rang par este 128 iar al celor de rang impar 48. (I. IONESCU.)

*188. Fie A′, B′, C′ picioarele înălțimilor unui triunghiu ABC; H punctul de întîlnire al înălțimilor; A″, B″, C″ mijlocul dreptelor AH, BH, CH. Se cere a se găsi aria exagonului A′B″C′A″B′C″ cînd punc-

tul H e în interiorul triunghiului, sau diferența ariilor patrulaterelor A′B″OC″, B′A″C′O cînd punctul H este exterior (unghiul A obtus), O fiind intersecția dreptelor B′C″, C′B″. (A. Iliovici.)

*189. Să se determina forma generală a întregilor x, y ast-fel ca numerele:

$$7^{x}+1, \qquad 7^{x+y}+1,$$

să fie în același timp divizibile cu 10. (G. Țițeica.)

*190. Se înscrie în un cerc două triunghiuri echilaterale, ast-fel că vîrfurile unuia să se afle la jumătatea arcelor subîntinse de laturile celuilalt. Se cere a se găsi aria comună celor două triunghiuri în funcțiune de raza cercului. (Cornelius Ionescu.)

*191. Să se demonstreze că numărul 1653 poate fi descompus într'o sumă de numere impare consecutive în trei moduri, și să se găsească acele descompuneri. (C. Miclescu.)

*192. Cari sînt numerile de forma $71\beta x\alpha$ scrise în sistemul duodecimal, divizibile cu α, știind că $\alpha=9+1$ și $\beta=\alpha+1$? Să se verifice divizibilitatea efectuîndu-se diviziunile direct în sistemul duodecimal. (Gr. N. Makarie.)

193. In vîrfurile unui triunghiu aplicăm forțe invers proporționale cu înălțimile respective și dirigiate după acele înălțimi de la vîrf spre bază. Să se demonstreze că triunghiul rămîne în echilibru. Să se conchidă că înălțimile trec prin același punct.

(I. Ionescu.)

*194. Pe o dreaptă dată se iau trei puncte fixe A, B, C. Prin punctul C se duce o dreaptă mobilă pe care se iau punctele D, E situate la distanțe invariabile de punctul C. Să se determine locul punctelor de intersecție a dreptelor AE, BD cînd dreapta DEC se mișcă în jurul punctului C. (Bogdan Ionescu.)

*195. Prin vîrful B al unui triunghiu ABC se duce o paralelă la AC și se ia pe aceasta spre A lungimea BD=AB. De asemenea prin C se duce o paralelă la latura AB și se ia pe aceasta spre A lungimea CE=AC. Să se demonstreze că circonferențele cari trec prin A și au ca centre punctele D și E sînt tangente.

(B. Paraschivescu.)

TEOREME ASUPRA TRIUNGHIULUI.

I. *Se unește un punct* P *al planului unui triunghiu* ABC *cu vîrfurile triunghiului; dreptele* PA, BC *dau prin intersecția lor un punct* A_1 *și în mod analog se obțin punctele* B_1, C_1. *Dreptele* AB, A_1B_1 *dau un punct* P_3, BC *cu* B_1C_1 *un punct* P_1 *și în fine* CA *cu* C_1A_1 *un punct* P_2: *punctele* P_1, P_2, P_3 *sînt în linie dreaptă.*

Ne vom servi de coordonate trilineare. Insemnăm cu α', β', γ' coordonatele punctului P. Ecuația dreptei PA va fi:

$$\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'},$$

iar a dreptelor PB, PC:

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}.$$

Coordonatele punctelor A_1, B_1, C sînt proporționale cu soluțiunile date de ecuațiele:

$$\alpha=0, \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \beta=0, \frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \gamma=0, \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}.$$

Ecuațiele dreptelor A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, se pot scrie imediat:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}+\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}.$$

Deci coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3 sînt proporționale cu soluțiunile ecuațiilor:

$$\alpha=0, \frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}=0, \quad \beta=0, \frac{\gamma}{\gamma'}+\frac{\alpha}{\alpha'}=0, \quad \gamma=0, \frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}=0,$$

care satisfac ecuației:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}=0,$$

care reprezintă o dreaptă. c.c.e.d.d.

Vom numi în cele ce urmează, o dreaptă *corespondentă* punctului dat P $(\alpha'\beta'\gamma')$, o asemenea dreaptă obținută după teorema I, cu ecuația:

$$\Sigma \frac{\alpha}{\alpha'}=0,$$

și vice-versa, punctul *corespondent* unei drepte cu ecuația:

$$m\alpha+n\beta+p\gamma=0,$$

un punct a cărui coordonate sînt proporționale cu $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$.

Asemenea vom numi *inversul* unui punct dat, un alt punct, a cărui coordonate sînt proporționale cu inversele coordonatelor celui d'intăi.

II. *Simetricele dreptelor, ce unesc un punct* P *cu vîrfurile unui triunghiu, în raport cu bisectriţele interioare, se întîlnesc în inversul punctului* P.

Simetrica dreptei PA cu ecuația:

$$\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$$

se poate căpăta ușor, aflînd coordonatele simetricului punctului P în raport cu bisectrița unghiului A și scriind ecuația dreptei, ce trece prin acel punct și A și ast-fel obținem:

$$\beta\beta'-\gamma\gamma'=0.$$

In mod analog avem pentru ecuațiele simetricelor dreptelor PB, PC în raport cu bisectriţele unghiurilor B și C.

$$\gamma\gamma'-\alpha\alpha'=0,\ \alpha\alpha'-\beta\beta'=0.$$

Aceste 3 drepte sînt concurente în punctul a cărui coordonate sînt proporționale cu:

$$\frac{1}{\alpha'},\ \frac{1}{\beta'},\ \frac{1}{\gamma'},$$

adică inversul punctului P.

III. *Dîndu-se o dreaptă* Δ *în planul unui triunghiu* ABC *și luîndu-se pe ea trei puncte* $P_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $P_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $P_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, *inversele acestor 3 puncte dau 3 drepte corespondente concurente în un punct, al cărui invers are ca dreaptă corespondentă, dreapta dată* Δ.

Ecuația dreptei Δ este:

$$(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)\alpha+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)\beta+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\gamma=0;$$

punctele P_1, P_2, P_3 fiind în linie dreaptă avem condiția:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=0.$$

Dreptele corespondente inverselor punctelor P_1, P_2, P_3 au ca ecuațiuni respectiv:

$$\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma=0$$
$$\alpha_2\alpha+\beta_2\beta+\gamma_2\gamma=0$$
$$\alpha_3\alpha+\beta_3\beta+\gamma_3\gamma=0,$$

care drepte sînt concurente, avînd în vedere condiția (1). Punctul lor de concurență are ca coordonate, cantități proporționale cu:

$$\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2,\ \gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2,\ \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2;$$

se vede, că dreapta corespondentă inversului acestui punct, este tocmai dreapta Δ. c.c.e.d.d.

IV. *Dreptele corespondente centrelor cercurilor exînscrise unui triunghiu* ABC *sînt laturile triunghiului* $A_1B_1C_1$, *relativ la centrul cercului înscris, triunghiu menționat în teorema întăia.*

Centrele celor 3 cercuri exînscrise au coordonatele proporționale cu soluțiunile ecuațiunilor:

$$-\alpha=\beta=\gamma,\ -\beta=\gamma=\alpha,\ -\gamma=\alpha=\beta,$$

iar dreptele corespondente lor au respectiv ca ecuațiuni:

$$-\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha-\beta+\gamma=0,\ \alpha+\beta-\gamma=0,$$

care, dacă ne referim la teorema I, sînt tocmai laturile triunghiului indicat în teoremă.

V. *Cînd o dreptă trece prin un punct fix* $P(\alpha',\beta',\gamma')$ *punctul corespondent al acestei drepte descrie o conică circumscrisă triunghiului.*

Ecuația dreptei ce trece prin un punct fix α',β',γ' este:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\lambda\beta+\gamma}{\lambda\beta'+\gamma'},$$

λ fiind un parametru variabil. Luînd cantitățile proporționale cu coordonatele punctului corespondent acestei drepte, ele sînt date de sistemul:

$$\alpha(\lambda\beta'+\gamma')=-\beta\alpha'\lambda=-\gamma\alpha'.$$

Eliminînd pe λ între aceste ecuațiuni se obține locul punctului acestuia, conica indicată.

$$\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\beta'}{\beta}+\frac{\gamma'}{\gamma}=0.$$

Caz particular. Cînd P devine punctul de intersecție al simedianelor atunci:

$$\frac{\alpha'}{a}=\frac{\beta'}{b}=\frac{\gamma'}{c},$$

a, b, c fiind laturile triunghiului, și conica devine un cerc:

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=o.$$

Observațiune. Conica ce corespunde la punctul $P(\alpha',\beta',\gamma')$ are ca tangentă în punctul A o dreaptă, care formează cu AP și AC, BA un fascicul armonic; asemenea și pentru punctele B,C.

In adevăr ecuația conicei fiind:

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\beta'}{\beta}+\frac{\gamma'}{\gamma},$$

și a tangentei în punctul $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$

$$\alpha f'_{\alpha_1}+\beta f'_{\beta_1}+\gamma f'_{\gamma_1}=o,$$

avem pentru punctul A, ecuația tangentei:

$$\beta\gamma'+\gamma\beta'=o;$$

ecuația dreptei AP este:

$$\beta\gamma'-\gamma\beta'=o;$$

se vede că aceste două drepte împreună cu dreptele AB și AC cu ecuațiele:

$$\gamma=o,\quad \beta=o$$

formează un fascicol armonic.

VI. *Cînd o dreaptă se învîrtește în jurul unui punct fix, polul său în raport cu conica, descrisă de punctul corespondent acestei drepte, descrie dreapta corespondentă punctului fix.*

Avem conica:

$$(1)\quad \frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta'}{\beta}+\frac{\gamma'}{\gamma}=o,$$

α',β',γ' fiind coordonatele punctului fix P. Ecuația dreptei ce trece prin P este:

$$(\lambda\beta'+\gamma')\alpha=-\lambda\alpha'\beta=-\alpha'\gamma.$$

Polul său în raport cu (1) are coordonatele satisfăcînd ecuațiunilor:

$$\frac{\beta'\gamma+\gamma'\beta}{\lambda\beta'+\gamma'}=-\frac{\gamma'\alpha+\alpha'\gamma}{\alpha'\lambda}=-\frac{\alpha'\beta+\beta'\alpha}{\alpha'};$$

eliminînd pe λ între aceste ecuațiuni se obține:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

c.c.ed.d.

Bogdan Ionescu.

UN NOU METOD PENTRU STUDIUL TRIGONOMETRIEI PLANE.

(Urmare)

Despre coeficienții paralelogramelor.

Se știe că aria unui dreptunghiu se obține înmulțind lungimile a două laturi cosecutive, fără a fi nevoe de vre-o construcțiune geometrică. Din contră aria unui paralelogram nu se poate obține până ce nu vom găsi lungimea înălțimei corespunzătoare bazei alese, ceea-ce necesită o construcțiune geometrică. Pentru a ne dispensa de această construcțiune geometrică și a simplifica ast-fel găsirea ariei unui paralelogram, ar fi de ajuns să cunoaștem raportul dintre aria paralelogramului dat și aria unui dreptunghiu avînd aceleași lungimi pentru laturi, căci atunci nu am avea de cît să înmulțim produsul laturilor paralelogramului (aria dreptunghiului auxiliar), cu raportul cunoscut, pe care îl vom numi *coeficientul parelelogramului* și pe care îl vom însemna prin litera K. Avem ast-fel următoarea teoremă:

Teorema I. Aria unui paralelogram este egală cu produsul a două laturi adiacente înmulțit cu coeficientul paralelogramului.

Fie ABCD un paralelogram și ABC'D' un dreptunghiu ast-fel că AB=CD=C'D' și AC=AD'. Vom avea după cele spuse:

$$1) \qquad K=\frac{ABCD}{ABC'D'},$$

sau: $$ABCD=K\times ABC'D'.$$

Dar ABC'D' fiind un dreptunghiu putem să înlocuim aria sa prin AB×AD' sau AB×AD de oare-ce AD=AD' prin ipoteză. Deci:

$$2) \qquad ABCD=K\times AB\times DA.$$

Dacă în această egalitate vom înlocui aria paralelogramului ABCD prin produsul bazei AB cu înălțimea DI corespunzătoare, vom avea:

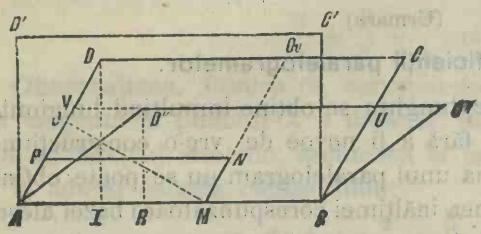
$$AB\times DI=K\times AB\times AD,$$

de unde: $$3) \qquad K=\frac{AB\times ID}{AB\times DA}=\frac{DI}{DA}.$$

De aci rezultă următoarea teoremă:

Teorema II. Coeficientul unui paralelogram este raportul dintre o înălțime a acestuia și latura adicentă bazei corespunzătoare înălțimei.

Din egalitatea 3) care ne dă pe K, vedem că acest coeficient este totdeauna mai mic sau cel mult egal cu unitatea, din cauză că numărătorul DI (o perpendiculară) este totdeauna mai mic sau cel mult egal cu AD (o oblică) Deci:



Corolar. Coeficientul unui paralelogram este un număr fracționar sau incomensurabil mai mic sau cel mult egal cu 1.

Vom stabili acum următoarea teoremă importantă:

Teoroma III. Coeficientul unui paralelogram depinde numai de unghiul [1] *paralelogramului, iar nici de cum de lungimile laturilor lui.*

Fie ABCD, AMNP două paralelograme cari au același unghiu A, și pe care le am așezat ast-fel ca acest unghiu să fie comun ambelor paralelograme. Fie K și K' coeficienții acestor două paralelograme. Fie MJ înălțimea paralelogramului AMNP, corespunzătoare bazei AP. In fine să prelungim latura MN pînă în Q unde taie latura CD. După egalitatea 3) avem:

$$K=\frac{DI}{DA},\qquad K'=\frac{MJ}{MA}.$$

Putem exprima în două moduri diferite aria paralelogramului AMQD și avem:

$$AMQD=AM\times DI=AD\times MJ.$$

De aci deducem:

$$\frac{DI}{DA}=\frac{MJ}{MA}.$$

Comparînd această egalitate cu egalitățile ce ne dau pe K și K' deducem:

$$K=K'.$$

Așa dar lungimea laturilor unui paralelogram nu influențează nici de cum coeficientul acestuia. Să arătăm acum că coeficientul depinde de unghiul paralelogramului.

---

[1] Vom lua ca unghiu al paralelogramului, unghiul ascuțit al acestuia. Consecințele și modul de demonstrațiune rămîn aceleași și în cazul cînd am lua unghiul obtus al paralelogramului drept unghiu al acelui paralelogram.

Fie ABC″D″ un paralelogram care are un unghiu mai mic ca al paralelogramului ABCD, dar ale căror laturi sînt respectiv egale, şi să aşezăm aceste paralelograme aşa că latura AB să fie comună. Punctul D″ va cădea între paralelele AB, CD, căci unghiul ADD″ e ascuţit de oare-ce e unghiul de la bază a unui triunghiu isoscel ADD″, iar unghiul ADC al paralelogramului fiind obtuz, urmează că dreaptă DD″ e cuprinsă în interiorul unghiului ADC, şi prin urmare punctul D″ cade între AB şi DC. Punctul D″ fiind coprins între AB şi DC, înălţimea DR″ a paralelogramului ABC″D″ e mai mică ca înălţimea DI a paralelogramului ABCD. Bazele acestor două paralelograme fiind egale rezultă că ariile lor vor fi neegale. Urmează de aci că coeficienţii acestor paralelograme sînt diferiţi, de oare-ce laturile lor sînt egale iar ariile neegale. Se poate demonstra uşor că diferenţa acestor două arii e egală cu aria paralelogramului CUVD.

Coeficienţii unghiurilor.

Din cauză că coeficientul unui paralelogram depinde numai de unghiul acestui paralelogram îl vom numi de aci înainte *coeficientul unghiului.* Fie-care unghiu îşi va avea prin urmare coeficientul său. Vom însemna prin K_α coeficientul unui unghiu α.

Teorema IV. Coeficienţii a două unghiuri suplimentare sînt egali.

Fie α şi α' două unghiuri supllimentare. Să formăm un paralelogram ABCD aşa că:

$$\sphericalangle DAB=\alpha, \qquad \sphericalangle ABC=\alpha'.$$

Vom avea pentru expresiunea ariei paraleogramului:

$$ABCD=K_\alpha \times AB \times AD=K_{\alpha'} \times AB \times BC.$$

Suprimînd din ultima egalitate factorul comun AB şi factorii egali AD şi BC, ne rămîne:

$$K_\alpha=K_{\alpha'}, \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Prin urmare putem scrie în mod general:

$$4) \qquad K_\alpha=K_{2-\alpha},$$

căci unghiurile α şi $2-\alpha$ au ca sumă două unghiuri drepte.

In cele ce urmează vom întrebuinţa adesea ori şi coeficientul complimentului unui unghiu. Complimentul unui unghiu α fiind

$1-\alpha$, vom însemna acest coeficient prin $K_{1-\alpha}$. Dacă unghiul α ar fi obtuz, atunci complimentul său $1-\alpha$ ar fi negativ [1]), și vom considera atunci și coeficientul complimentului ca negativ, căci după cum vom vedea mai tîrziu, această convenţiune are de efect a da o generalitate complectă formulelor ce vom stabili. Prin urmare vom lua ca coeficient al complimentului unui unghiu $\alpha > 1$, coeficientul unghiului pozitiv $\alpha-1$ cu semnul minus înainte.

In fine în formulele ce vom stabili mai departe vom introduce și raportul dintre coeficientul unui unghiu α și coeficientul complimentului acestuia. Vom însemna acest raport prin notaţiunea R_α și 'l vom numi *raportul lui* α. Vom avea prin urmare egalitatea:

$$5) \qquad R_\alpha = \frac{K_\alpha}{K_{1-\alpha}},$$

sau cînd α e obtus:

$$5') \qquad R_\alpha = -\frac{K_\alpha}{K_{\alpha-1}}.$$

Cînd unghiul α al unui paralelogram se anulează, aria paralelogramului se anulează și prin urmare coeficientul K_α devine zero. Cînd unghiul α devine drept, paralelogramul devine dreptunghiu și raportul ariilor paralelogramului către dreptunghiu devine egal cu unitatea; deci K_α devine egal cu unitatea. Apoi servindu-ne de relaţiunile 4), 5) și 5') putem forma următorul tablou pentru coeficienţi și rapoartele unghiurilor 0; 1; și 2.

α	K_α	$K_{1-\alpha}$	R_α
0	0	1	0
1	1	0	infinit $\left(\frac{1}{0}\right)$.
2	0	-1	0

(Va urma)

I. Ionescu.

[1]) Teoria logaritmilor necesitînd noţiuni relative la cantităţile negative și infinite, nu vom mai reveni aci asupra acestor feluri de cantităţi.

ORDONATA MEDIE A UNUI SEGMENT DE CURBĂ.

Numim *ordonata medie* a unui segment de curbă AB limita mediei aritmetice a ordonatelor echidistante ale punctelor sale, cînd această echidistanţă tinde către zero.

Teoremă. Ordonata medie a unui segment de curbă AB *este egală cu suprafaţa* ABCD *mărginită de segmentul* AB, *de ordonatele* AC *şi* BD *ale extremităţilor sale şi de axa absciselor, împărţită prin proecţiunea* CD *a segmentului* AB *pe axa absciselor.*

In adevăr, dacă însemnăm cu S suprafaţa ABCD, cu $y_1, y_2, y_3, \ldots$ y_n ordonatele echidistante ale punctelor segmentului AB şi cu α echidistanţa acestor ordonate, avem:

$$S=\alpha\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)=\alpha\sum_1^n y_i-\alpha\frac{y_1+y_n}{2}.$$

Şi observînd că $CD=n\alpha$ şi punînd $CD=a$, avem:

$$\frac{\sum_1^n y_i}{n}=\frac{S}{n\alpha}+\frac{y_1+y_n}{2n}=\frac{S}{a}+\frac{y_1+y_n}{2}.$$

Dacă însemnăm cu y_m ordonata medie a segmentului AB şi făcînd în egalitatea din urmă pe α să tindă către zero, n va tinde către infinit din cauza egalităţii $n\alpha=a$ şi vom avea:

$$y_m=\lim_{n=\infty}\left[\frac{S}{a}+\frac{y_1+y_2}{2n}\right]=\frac{S}{a}. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

In cazul cînd segmentul AB tae axa absciselor, porţiunile din suprafaţa S aflate în partea ordonatelor negative va trebui scăduţă din porţiunile despre ordonatele pozitive.

Observare. Această teoremă poate servi, de exemplu, pentru aflarea mediei raţionale a temperaturei dintr'un interval de timp dat, cunoscînd curba descrisă de un termometru cu aparat înregistrator şi calculul se poate face foarte lesne dacă am măsura suprafaţa cu un planimetru.

C. Miclescu.

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL ÎNSCRIS DE ADMISIUNE IN ȘCOALA NORMALĂ DE INSTITUTORI.

1) Chestiuni propuse în Iunie 1896.

a) Să se împartă volumul unei sfere în 3 părți echivalente, prin sfere concentrice.

b) Un aliagiu de aur și argint cîntărește 400 grame; raportul între aur și argint este ca $\frac{5}{3}$. La acest aliagiu se mai adaugă 18 grame aur. Care este cantitatea de aur și argint și care este noul raport?

2) Chestiuni propuse în Septembre 1896.

a) Să se împartă numărul 460 în 3 părți proporționale cu rădăcina pătrată a numerilor 2, 3, 5.

b) Să se afle suprafața totală a solidului format din un cilindru circular drept, găurit în interior, în care raza bazei mici e jumătate din raza bazei mari.

PROBLEME REZOLVITE [1]

Problema 96. — *Fie* P *un punct oare-care al dreptei ce unește mijloacele laturilor* AB, AC *ale unui triunghiu* ABC. Dreptele BP, CP *întîlnesc laturile* AB, AC *în punctele* α, β. *Să se determine învălitoarea dreptei* $\alpha\beta$. (Bogdan Ionescu.)

Soluție dată D-l A. Iliovici, (Student, Iași).

Luăm dreapta BC ca ax al x-ilor și BA ca ax al y-ilor și să însămnăm cu $2a$, $2b$ lungimile laturilor BC, BA și fiie (λ, b) coordonatele punctului P. Ecuațiele dreptelor AC, BP, CP vor fi:

$$bx+ay-2ab=o, \qquad (1)$$

$$bx-\lambda y=o, \qquad (2)$$

$$b(x-2a)-(\lambda-2a)y=o. \qquad (3)$$

Punctul α fiind intersecția dreptelor BA, CP, cordonatele sale vor fi:

$$x=o, \qquad y=\frac{2ab}{2a-\lambda}.$$

[1]) Problema 146 a fost rezolvită și de D-nii *Marin Mateescu* și *C. Țițirigă*, iar problema 150 a rezolvit-o și D-l *T. M. Vladimirescu*.

Dreapta $\alpha\beta$ trecînd prin punctul de intersecție β al dreptelor (1) și (2), ecuația ei va fi de forma:

$$bx+ay-2ab+k(bx-\lambda y)=o. \qquad (4)$$

Exprimînd că coordonatele punctului α satisfac ecuația (4), obținem:

$$k=\frac{\lambda-a}{\lambda},$$

și introducînd această valoare în (4), găsim că ecuația dreptei $\alpha\beta$ este:

$$\lambda(bx+ay-2ab)+(\lambda-a)(bx-\lambda y)=o. \qquad (5)$$

Ordonînd această ecuație în raport cu λ obținem:

$$y\lambda^2-2(bx+ay-ab)\lambda+abx=o. \qquad (6)$$

Ecuația învălitoarei drepte $\alpha\beta$ se va obține eliminînd pe λ între ecuația (6) și derivata sa în raport cu λ, sau exprimînd că ecuația (6) are o rădăcină dublă în λ, ceia ce ne dă:

$$(bx+ay-ab)^2-abxy=o,$$

sau:
$$b^2x^2+abxy+a^2y^2-2ab(bx+ay)+a^2b^2=o.$$

Învălitoarea dreptei $\alpha\beta$ este deci elipsa înscrisă în triunghiul ABC și tangentă laturilor triunghiului în mijlocul lor.

Soluție geometrică dată de D-l I. Moscuna, (Bacalaureat, București).

Invelitoarea dreptei $\alpha\beta$ este conica înscrisă în triunghiu, tangentă laturilor AB, AC, în mijloacele lor M, N.

In adevăr, fie β' punctul de întîlnire al laturei AC cu tangenta dusă acestei conice din α. Patrulaterul $\alpha\beta'CB$ fiind circumscris conicei considerate, diagonalele sale $B\beta'$, $C\alpha$, se taie pe coarda MN care unește punctele de contact ale două laturi opuse. Așa fiind, punctul β' se confundă cu β iar dreapta $\alpha\beta$ cu tangenta $\alpha\beta'$. c.e.d.d.

Observațiune. Am putea înlocui în enunț dreapta MN cu o dreaptă oare-care din planul triunghiului ast-fel ca să existe o conică înscrisă (sau exînscrisă) triunghiului, punctele de contact a două laturi ale triunghiului fiind intersecțiunile lor cu dreapta dată. Dreapta $\alpha\beta$ este în continuu tangentă conicei.

Soluție geometrică dată de D-l C. Lupu, (Inginer, București).

Pentru rezolvarea problemei ne vom servi de următoarea teoremă a lui *Chasles:*

Cînd avem două diviziuni omografice (α), (β) *descrise pe două drepte* OA, OB, *dreapta care unește două puncte corespunzătoare înfășură o conică tangentă la dreapta* OA *în punctul* A *corespunzător punctului* O *în diviziunea* α, *și la dreapta* OB *în punctul* B *corespunzător lui* O *în diviziunea* β.

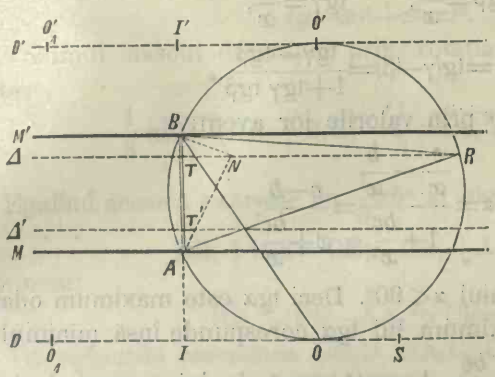
Așa fiind, fie a, b, c mijlocurile laturilor BC, AC, AB ale triunghiului considerat. Punctele α, P descriu două diviziuni omografice (omologice), asemenea β și P. Punctele α și β descriu deci două diviziuni omografice una alteia, ca descriind două diviziuni omografice unei a treia. De altă parte, cînd β vine în A, P și α vin în b; cînd α coincide cu A, P și β se recunosc în c. Deducem deci, că dreapta $\alpha\beta$ înfășură o conică tangentă în b și c la AC și AB. Cînd punctul P se depărtează la infinit pe dreapta bc, α vine în C și β în B. Conica precedentă K este prin urmare tangentă la la dreapta BC. Pentru ca să determinăm punctul de contact facem următoarele două observațiuni. 1° Dreapta care unește mijlocul unei coarde cu punctul de contact al unei tangente paralele la o conică este un diametru. 2° Diametrul care trece prin mijlocul unei coarde (conjugat acelei coarde) trece prin polul acelei coarde. Rezultă de aci, de o parte că punctul de contact căutat este mijlocul a al laturei BC, că medianele sînt diametre ale conicei K, în fine că centrul de greutate este centrul acelei conice.

***Problema 131.** — *Peste un rîu rectiliniu cu lățimea constantă de 30 metri se află un pod așezat normal pe direcțiunea curentului. Care sînt punctele de unde podul pare cel mai lung, cînd îl privim de la o depărtare de 24 metri de la mal.* (I. Ionescu).

Soluțiune geometrică dată de D-nii I. Moscuna, (București); *A. Iliovici,* (Iași) și *C. Popovici,* (Iași).

Fie AB podul, M și M′ malurile rîului, depărtate de 30 m. De oare-ce nu s'a specificat de la ce mal și în ce direcțiune s'a dat depărtarea de 24 metri, rezultă că punctul căutat poate fi pe una din cele 4 drepte. D,D′, Δ, Δ′ depărtate cu 24 metri, de la maluri. Să căutăm punctele de pe uscat. Fie O unul din punctele căutate. Chestiunea revine la a determina punctul O ast-fel ca unghiul AOB să fie maximum. Să ducem circonferența circonscri să triunghiu-

lui AOB. Zicem că această circonferență e tangentă la dreapta D. In adevăr în caz contrariu dreapta D va tăia circonferența încă în un punct S, și din ori ce punct coprins între O și S s'ar vedea podul supt un unghiu mai mare ca unghiul AOB, de oare-ce acest unghiu are vîrful pe circonferență, pe cînd celalt ar avea vîrful în interiorul circonferenței. Prin urmare unghiul AOB nu ar fi cel mai mare, ceea ce e contra ipotesei. Dacă I e punctul unde AB taie dreapta D, avem :



$$\overline{IO}^2 = IA \times IB = IA \times (IA + AB) = 24 \times 54 = 1296,$$

$$IO = 36 \text{ metri.}$$

Se vede imediat că pe maluri avem 4 puncte O, O', O_1, O_1' care indeplinesc condițiunea cerută.

Să determinăm acum punctele de pe dreptele Δ, Δ'. Să ducem prin A și B o circonferență care taie dreapta Δ în punctul R. Fie T punctul de întîlnire al dreptelor Δ și AB, și N un punct între T și R. Unghiul ANB>ARB, de oare-ce primul are vîrful în interiorul circonferenței, iar al doilea pe circonferență. Rezultă de aci că nu vom putea avea unghiul maximum dacă circomferența dusă prin AB, taie dreapta Δ în alt punct de cît T. Deci punctul T este punctul căutat, ceea-ce de alt-fel era evident. Deci pe apă sau insule avem 2 puncte T și T' cari indeplinesc condiția cerută. Problema admite în total 6 soluțiuni.

Soluțiune dată de D-l Bogdan Ionescu, (Licențiat în Matematici, București) și *I. Anastasiadi* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele. București).

Să însemnăm:

$$\sphericalangle BOA = \alpha, \quad \sphericalangle BOI = \gamma, \quad \sphericalangle AOI = \beta.$$

$$AB = a, \quad AI = b, \quad BI = c, \quad IO = x.$$

Avem:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{x}, \qquad \operatorname{tg}\gamma=\frac{c}{x},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta},$$

sau înlocuind tangentele prin valorile lor avem:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{c}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{bc}{x^2}}=\frac{c-b}{x+\frac{bc}{x}}.$$

Se vede ușor că unghiul $\alpha<90^0$. Deci $\operatorname{tg}\alpha$ este maximum odată cu maximum lui α. Maximum lui $\operatorname{tg}\alpha$ corespunde însă minimului numitorului variabil $x+\frac{bc}{x}$. Această sumă de doi termeni al căror produs e constant e minimă, cînd termenii sînt egali. Deci:

$$x=\frac{bc}{x},$$

de unde: $$x=\sqrt{bc},$$

și înlocuind pe b și c prin valorile lor numerice găsim $x=36^m$. Problema admite 4 soluțiuni $0, 0', 0_1, 0_1'$ plus două soluțiuni evidente T și T'. Se vede de asemenea că punctele de unde podul pare cel mai scurt sînt I, I' și punctele la infinit pe dreptele Δ,Δ'.

O soluțiune trigonometrică mai complicată a acestei probleme a fost dată și de D-nii *Gr. N. Makarie* (București) și *C. Popovici* (Student, Iași).

***Problema 137.** — *Să se afle înălțimea și laturile paralele* AC, BD *ale unui trapez dreptunghiu* ABCD, *cunoscîndu-se latura oblică* CD, *aria trapezului și volumul născut prin rotația sa în jurul laturei oblice* CD. (Tr. Ripianu.)

Soluție dată de D-l A. Iliovici (Student, Iași).

Să însemnăm cu x, y, z laturile AC, BD și înălțimea AB și cu l lungimea laturei oblice CD. Fie a^2 aria dată a trapezului și $\frac{1}{3}\pi b^3$ volumul născut prin rotația sa în jurul laturei CD. Să ducem perpendicularele AA_1, BB_1 pe CD și perpendiculara CC_1 pe BD și fie E punctul de întîlnire al laturilor AB, CD.

Avem:

$$(x+y)z=2a^2, \qquad 1)$$

iar triunghiul CDC_1 ne dă:

$$(y-x)^2+z^2=l^2. \tag{2}$$

Volumul născut de trapez prin rotația sa în jurul laturei CD este:

$$\frac{1}{3}\pi\overline{BB_1}^2(DB_1+B_1E)-\frac{1}{3}\pi\overline{AA_1}^2(CA_1+A_1E).$$

Egalînd această expresie cu $\frac{1}{3}\pi b^3$ și observînd că:

$$DB_1+B_1E=DE;\quad CA_1+A_1E=CE,$$

obținem:

$$\overline{BB_1}^2\times DE-\overline{AA_1}^2\times CE=b^3. \tag{3}$$

Triunghiurile asemenea BB_1D, AA_1C, CC_1D ne dau:

$$\frac{BB_1}{y}=\frac{AA_1}{x}=\frac{z}{l},$$

de unde:

$$BB_1=\frac{yz}{l},\qquad AA_1=\frac{xz}{l}.$$

Triunghiurile asemenea DBE, CAE, CC_1D ne dau:

$$\frac{DE}{y}=\frac{CE}{x}=\frac{l}{y-x},$$

de unde:

$$DE=\frac{ly}{y-x},\quad CE=\frac{lx}{y-x}.$$

Cu ajutorul relațiunilor precedente, egalitatea (3) devine:

$$\frac{z^2}{l}\times\frac{y^3-x^3}{y-x}=b^3$$

sau:

$$z^2(x^2+xy+y^2)=b^3l. \tag{4}$$

Problema se reduce deci la rezolvirea ecuațielor (1), (2) și (4) în raport cu x, y, z.

Din ecuația (1) deducem:

$$x+y=\frac{2a^2}{z}. \tag{5}$$

și ridicînd la patrat obținem:

$$x^2+2xy+y^2=\frac{4a^4}{z^2}, \tag{6}$$

iar ecuația (2) se poate scrie:

$$x^2-2xy+y^2=l^2-z^2.$$

Scăzînd pe (7) din (6) obţinem: (7)

$$xy=\frac{a^4}{z^2}-\frac{l^2-z^2}{4}. \quad (8)$$

Dacă scădem acum ecuaţia (8) din (6), obţinem:

$$x^2+xy+y^2=\frac{3a^4}{z^2}+\frac{l^2-z^2}{4}$$

şi înlocuind în (4) obţinem ecuaţia:

$$z^4-l^2z^2+4b^3l-12a^4=o$$

de unde obţinem pe z:

$$z=+\sqrt{\frac{l^2\pm\sqrt{l^4-16b^3l+48a^4}}{2}}. \quad (9)$$

Cunoscînd pe z, ecuaţiele (5) şi (8) ne dau atunci suma şi produsul necunoscutelor x, y. Ele vor fi deci rădăcinele ecuaţiei:

$$U^2-\frac{2a^2}{z}U+\frac{a^4}{z^2}-\frac{l^2-z^2}{4}=o. \quad (10)$$

de unde:

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2}{z}\mp\sqrt{\frac{l^2-z^2}{4}}.$$

Discuţie. Formula (9) ne dă o singură valoare reală pentru z (cea cînd luăm semnul + înaintea radicalului al doilea) cînd:

$$b^3<\frac{3a^4}{l} \quad (11)$$

Insă pentru asemenea valori ale lui b, x şi y nu sînt reali, căci pentru realitatea rădăcinilor ecuaţiei (10) trebue să avem:

$$b^3\geq\frac{3a^4}{l}.$$

Formula (9) ne dă două valori reale pentru z cînd:

$$\frac{3a^4}{l}\leq b^3\leq\frac{3a^4}{l}+\frac{l^3}{16},$$

în care caz ecuaţia (10) ne dă totdeauna valori reale pentru x şi y.

Pentru ca aceste valori ale lui x şi y să fie admisibile, ele trebue să fie şi pozitive. Ecuaţia (10) însă ne arată că pentru ca rădăcinile sale să fie pozitive, e de ajuns ca produsul lor să fie pozitiv, adică trebue să avem:

$$\frac{a^4}{z^2}-\frac{l^2-z^2}{4}\geq o,$$

sau: $$z^4 - l^2z^2 + 4a^4 \geq o. \qquad (12)$$

Inlocuind pe z prin valorile date de formula (9), inegalitatea (12) devine:

$$b^3 \leq \frac{4a^4}{l}.$$

Prin urmare dacă:

$$l \leq 2a,$$

pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca:

$$\frac{3a^4}{l} \leq b^3 \leq \frac{4a^4}{l}$$

și vom avea cîte două perechi de valori admisibile pentru x, y și z.

Iar dacă:

$$l \geq 2a,$$

va trebui să avem:

$$\frac{3a^4}{l} \leq b^3 \leq \frac{3a^4}{l} + \frac{l^2}{16}$$

și problema are iarăși două soluții.

* **Problema 139.** — *Prin vîrful* B *al uni triunghiu* ABC *se duce o paralelă la latura* AC. *Pe această paralelă se ia o lungime* BD *egală cu latura* AB. *De asemenea prin* C *se duce o paralelă la latura* AB, *pe care se ia o lungime* CE *egală cu* AC. *Dreptele* CD, BE *se întretaie în punctul* O *și întîlnesc respectiv laturile* AB, AC *în punctele* P, N; *iar dreapta* AO *întîlnește latura* BC *în punctul* S. *Să se demonstreze că între ariele triunghiurilor ce s'au format, avem următoarele relațiuni:*

1) *Triunghiurile* ABN, BCP *sînt echivalente; de asemenea triunghiurile* ACP, CBN *sînt echivalente.*

2) *Dacă* b, c *sînt lungimele laturilor* AC, AB *avem:*

$$\frac{APC}{ANB} = \frac{b}{c}; \qquad \frac{ASC}{ASB} = \frac{b^2}{c^2}; \qquad \frac{NOC}{POB} = \frac{b^3}{c^3}.$$

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l A. Iliovici, (Student, Iași) și *Bogdan Ionescu,* (Licențiat în Matematici, București).

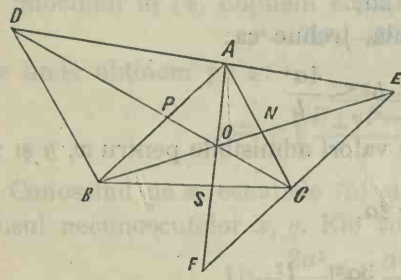
I. In triunghiurile ABN, ABC dacă considerăm ca baze laturile AN, AC atunci ele vor avea aceiași înălțime, și deci:

$$\frac{ABN}{ABC}=\frac{AN}{AC} \qquad (1)$$

De asemenea vom avea:

$$\frac{BCP}{ABC}=\frac{BP}{AB} \qquad (2)$$

Dar triunghiurile asemenea ABN, CEN ne dau:



$$\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{CE}=\frac{AB}{AC}. \qquad (3)$$

căci prin construcție CE=AC. Din (3) deducem:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AB}{AB+AC}. \qquad (4)$$

Triunghiurile BPD, APC sînt și ele asemenea și ne dau în același mod:

$$\frac{BP}{AB}=\frac{AB}{AB+AC}. \qquad (5)$$

Dacă comparăm egalitățile (1), (2), (4) și (5) deducem:

$$\frac{ABN}{ABC}=\frac{BCP}{ABC},$$

sau: $$ABN=BCP.$$

De aci deducem imediat că și triunghiurile APC, BNC sînt echivalente, scăzînd, pe rînd, din triunghiul ABC triunghiurile echivalente BCP, ABN.

II. 1). Avem:

$$\frac{APC}{ABC}=\frac{AP}{AB}, \qquad \frac{ANB}{ABC}=\frac{AN}{AC}.$$

Impărțind una prin alta aceste două egalități obținem:

$$\frac{APC}{ANB}=\frac{AC}{AN}\times\frac{AP}{AB}. \qquad (6)$$

Din egalitatea (4) însă deducem:

$$\frac{AC}{AN}=\frac{b+c}{c}, \qquad (7)$$

iar egalitatea (5) ne dă:

$$\frac{AB-AP}{AB}=\frac{AB}{AB+AC}=\frac{AP}{AC},$$

de unde:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AC}{AB+AC}=\frac{b}{b+c}. \qquad (8)$$

Egalitatea (6) devin dar:

$$\frac{APC}{ANB}=\frac{b+c}{c}\times\frac{b}{b+c}=\frac{b}{c}.$$

2). Avem:

$$\frac{ASC}{ASB}=\frac{SC}{SB}. \qquad (9)$$

Fie F punctul unde dreapta AS întîlneşte pe CE. Triunghiurile asemenea CSF, BSA ne dau:

$$\frac{SC}{SB}=\frac{CF}{AB}. \qquad (10)$$

Dar din triunghiurile asemenea OCF, OAP şi OCE, OPB deducem:

$$\frac{CF}{AP}=\frac{OC}{OP}=\frac{CE}{BP},$$

de unde:

$$CF=\frac{AP\times CE}{BP}. \qquad (11)$$

Ţinînd samă de egalităţile (5), (8) şi (11) egalitatea (10) devine:

$$\frac{SC}{SB}=\frac{AC}{AB+AC}\times\frac{CE}{AB}\times\frac{AB+AC}{AB}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

şi deci:

$$\frac{ASC}{ASB}=\frac{b^2}{c^2}.$$

3) Triunghiurile NOC, POB avînd unghiurile opuse la vîrf NOC, POB egale ne dau:

$$\frac{NOC}{POB}=\frac{ON\times OC}{OP\times OB}=\frac{ON}{OB}\times\frac{OC}{OP}. \qquad (12)$$

Triunghiurile asemenea NOC, BOD şi POB, COE ne dau respectiv:

$$\frac{ON}{OB}=\frac{NC}{BD} \quad \text{şi} \quad \frac{OC}{OP}=\frac{CE}{BP},$$

şi prin urmare relaţiunea (12) devine:

$$\frac{NOC}{POB}=\frac{AC}{AB}\times\frac{NC}{BP},$$

căci CE=AC şi BD=AB.

Din egalitatea (3) deducem:

$$\frac{NC}{AC}=\frac{AC}{AB+AC}, \qquad (13)$$

și împărțind pe (13) prin (5) obținem:

$$\frac{NC}{BP}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Vom avea deci:

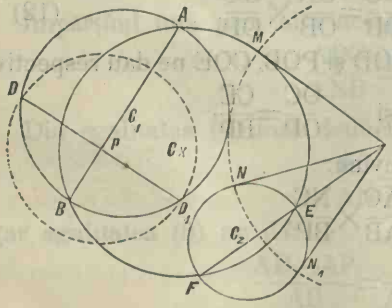
$$\frac{NOC}{POB}=\frac{AC}{AB}\times\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^3=\frac{b^3}{c^3}.$$

***Problema 144.**— *Se dă circonferința* C *și două puncte fixe, unul* P *interior și altul* Q *exterior circonferenței. Prin punctul* P *se duce o secantă, ce taie circonferența* C *în punctele* A, B. *Pe* AB *ca diametru se descrie o circonferință* C_1 *și se iau punctele de intersecție* D,D_1 *ale circonferenței* C_1 *cu perpendiculara pe* AB *în punctul* P. *Se cere locul punctelor* D,D_1 *când secanta* AB *variază. De asemenea prin punctul* Q *se duce o secantă, ce taie circonferința* C *în punctele* E, F; *iar pe* EF *ca diametru se descrie o circonferință* C_2. *Se cere a se găsi locul punctelor de contact ale circonferenței* C_2 *cu tangentele duse din* Q, *când secanta* EF *variază.* (A. Iliovici.)

Soluție dată de D-nii: G. Iliovici (Elev în Clasa VI de la Liceul Național din Iași); *Bogdan Ionescu* (Licențiat în Matematici, București) și *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Ploești).

1. Coarda DD_1 fiind perpendiculară pe diametrul AB al circonferenței C_1, avem:

$$\overline{PD}^2=\overline{PD_1}^2=PA\times PB.$$



De altă parte se știe că produsul $PA\times PB$ e constant, căci el este egal cu puterea punctului P în raport cu circonferența dată C. Vom avea deci:

$$PD=PD_1=\sqrt{R-d^2}=\text{const.}$$

R fiind raza circonferenței C și d distanța PC.

Locul punctelor D, D_1 este deci o circonferență cu centrul

în P și de o rază egală cu jumătatea coardei perpendiculară pe diametrul PC.

2. Fie N și N_1 punctele de contact ale circonferenței C_2 cu tangentele duse din Q. Avem:

$$\overline{QN}^2=\overline{QN_1}^2=QE\times QF.$$

Dacă M este punctul de contact al circonferenței C cu tangenta dusă din Q, avem:

$$QE\times QF=\overline{QM}^2=d_1^2-R^2$$

d_1 fiind distanța QC.

Avem deci:

$$QN=QN_1=\sqrt{d_1^2-R^2}=\text{const.}$$

Locul punctelor N,N_1 este deci o circonferență cu centrul în Q și de o rază egală cu QM.

Problema 147. — *Fie* B,C *proiecțiile unui punct fix* A *pe laturile unui unghiu drept* MON, *mobil în jurul vîrfului său* O. *Se cere învelitoarea dreptei* BC. *Să se explice rezultatul.* (G. Țițeica.)

Soluțiune și generalizare date de D-l Bogdan Ionescu (Licențiat în Matematici, București).

Fie I intersecția dreptelor AO, BC. Figura ABOC e un dreptunghiu în care AO este o diagonală fixă. Deci BC va trece necontenit prin I, mijlocul lui AO. Învelitoarea căutată este deci punctul I.

Să considerăm acum cazul cînd unghiul MON este oare-care. Patrulaterul ABOC este inscriptibil în cercul cu diametru OA, căci unghiurile din B și C sînt drepte; dar, de oare-ce unghiul BOC este constant în mărime, coarda BC va fi și ea constantă în mărime, și prin urmare la o aceiași depărtare de centrul cercului, care e mijlocul I al dreptei OA. De aci rezultă că dreapta BC rămîne necontenit tangentă la cercul cu centrul în I, și cu raza IP; P fiind piciorul perpendicularei coborîtă din I pe BC. Înfășurătoarea în acest caz e deci o circonferență.

D-l *Gr. N. Makarie* a dat o soluție analitică a acestei probleme.

Problema 158. — *Să se găsească reziduurile cuadratice relative la modulul prim 43.* (I. Ghibaldan.)

Soluție dată de D-l B. Parashivescu, (Elev în Clasa VII, a Liceului St. Petru și Pavel din Ploești).

Pentru a rezolvi această problemă ne vom servi de următoarea regulă: Pentru a forma reziduurile cuadratice relative la modulul m, se formează patratele numerilor $1, 2, 3 \ldots \ldots \frac{m}{2}$ dacă m e par, sau patratele numerilor $1, 2, 3 \ldots \ldots \frac{m-1}{2}$ dacă m e impar, și se ia resturile diviziunilor acestor patrate prin m. Aceasta se obține mai simplu în modul următor. Plecînd de la 1 și adăogînd acestuia succesiv numerele impare $3, 5, 7, 9 \ldots \ldots$, și cînd suma trece peste peste m, vom scădea pe m din acea sumă. Dacă m este par cel din urmă număr întrebuințat este $\frac{m}{2}$ sau $\left(\frac{m}{2}-1\right)+1$, al cărui patrat este $\left(\frac{m}{2}-1\right)^2+2\left(\frac{m}{2}-1\right)+1$, sau $\left(\frac{m}{2}-1\right)^2+m-1$. Operațiunile se vor termina deci cînd vom adăoga numărul impar imediat inferior modulului. Dacă m e impar și egal cu $2n+1$, cel din urmă număr întrebuințat este n care se poate scrie $(n-1)+1$ și al cărui patrat este $(n-1)^2+2(n-1)+1$ sau $(n-1)^2+2n-1$. Operațiunile se vor termina deci cînd vom adăoga numărul impar imediat inferior modulului.

In cazul dat m este impar. Deci numărul reziduurilor este $\frac{43-1}{2}=21$, iar ultimul număr impar ce vom întrebuința este $43-2=41$. Aceste reziduuri se găsesc ast-fel:

$1,$ $1+3=4,$ $4+5=9,$ $9+7=16,$
$16+9=25,$ $25+11=36,$ $36+13-43=6,$ $6+15=21,$
$21+17=38,$ $38+19-43=14,$ $14+21=35,$ $35+23-43=15,$
$15+25=40,$ $40+27-43=24,$ $24+29-43=10,$ $10+31=41,$
$41+33-43=31,$ $31+35-43=23,$ $23+37-43=17,$ $17+39-43=13,$
$13+41-43=11.$

Reziduurile căutate sînt deci în ordinea mărimei:

1, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 23, 24, 25, 31, 35, 36 38, 40, 41.

***Problema 163.** — *Să se demonstreze că egalitatea:*

$$(\sqrt{A}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{B}+\sqrt{a})^2=(\sqrt{A+b}+\sqrt{B+a})^2$$

atrage după sine egalitatea:

$$(A-a)(B-b)+(\sqrt{Aa}-\sqrt{Bb})^2=o. \quad \text{(I. Ionescu.)}$$

Soluțiune dată de D-ra Maria Albiuetz (Elevă în Clasa IV

secundară de la Pensionatul Warlam, Iași), *S. N. Corbeanu* (Turnu-Severin), *G. Dragu* (București), *I. Drăgănescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele), *G. Giușcă* (Student, București), *A. Iliovici* (Student, Iași), *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași), *Corneliu Ionescu* (Iași), *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Turnu-Severin), *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești), *G. Penescu* (Student, București), *C. Popovici* (Student, Iași), *C. N. Răileanu* (Iași), *I. Sichitiu* (Elev în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova), *C. Țițirigă* (Elev în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova) și *J. Wittner* (Elev în Clasa VII a Liceului din Focșani).

Efectuînd ridicările la patrat la expresiunea dată, avem:

$$A+b+2\sqrt{Ab}+B+a+2\sqrt{Ba}=A+b+B+a+2\sqrt{(A+b)(B+a)},$$

sau reducînd:

$$\sqrt{Ab}+\sqrt{Ba}=\sqrt{(A+b)(B+a)}.$$

Ridicînd la patrat ambii membri ai acestei egalități, avem:

$$Ab+Ba+2\sqrt{Ab.Ba}=AB+Aa+Bb+ab,$$

sau: $$(AB-Ab)-(aB-ab)+Aa+Bb-2\sqrt{Aa.Bb}=o$$

de unde:

$$A(B-b)-a(B-b)+(\sqrt{Aa}-\sqrt{Bb})^2=o$$

și în fine:

$$(A-a)(B-b)+(\sqrt{Aa}-\sqrt{Bb})^2=o. \qquad \text{c.c.c.d.}$$

PROBLEME PROPUSE

*196. Se consideră două diametre dreptunghiulare AA', BB' ale unui cerc cu centrul O. Pe OB se ia OD=AB, se unește A cu D și fie E punctul de intersecție al dreptei AD cu cercul O. Se duce apoi tangenta în E la cerc și fie F punctul unde această tangentă întîlnește diametrul AA'. Să se demonstreze că AF=AA'.

(G. Țițeica.)

*197. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{2x}. \qquad \text{(I. Ionescu.)}$$

*198. Să se circumscrie unui cerc dat un patrulater cunoscîndu-i-se diagonalele și știind că ele se taie în unghiu drept.

(I. Moscuna.)

199. Se dă un triunghiu ABC și două puncte X, Y în planul său. Se consideră punctele x_1, intersecția dreptei AX cu BC, x_2, intersecția dreptei BX cu AC, x_3 intersecția dreptei CX cu AB; în același mod se construesc punctele y_1, y_2, y_3 corespondente punctului Y. Dreptele x_1y_2 și x_2y_1 dau prin intersecția lor un punct z_1; de asemenea dreptele x_2y_3 și x_3y_2 dau un punct z_2, în fine dreptele x_3y_1 și y_3x_1 dau un punct z_3. Să se demonstreze că punctele X, Y, z_1, z_2, z_3 sînt în linie dreaptă. (BOGDAN IONESCU.)

*200. Se consideră un punct fix A și un alt punct P mobil pe o circonferență cu centrul O. Se cere locul punctului M unde bisectrița unghiului POA întîlnește cercul circumscris triunghiului POA. (G. ȚIȚEICA.)

*201. Se consideră două raze dreptunghiulare OA, OB, ale unui cerc cu centrul O și fie C mijlocul arcului AB. Se unește punctul A cu C și fie D punctul de intersecție al dreptei AC cu raza OB. Să se demonstreze că dreapta CD este egală cu latura octogonului stelat înscris în cercul O. (C. ȚIȚIRIGĂ.)

*202. Să se găsească o progresie aritmetică, în care patratul sumei primei treimi din numărul terminilor, plus patratul sumei treimei a doua, să fie egal cu patratul sumei ultimei treimi din numărul terminilor, știindu-se că toți terminii progresiei sînt întregi și pozitivi și că primul termin este de două cifre și egal cu patratul rațiunei. (A. ILIOVICI.)

*203. Se consideră ecuația:

$$x^3-(a+b+c)x^2-(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)x-a^3-b^3-c^3 \\ +a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2=0,$$

care admite ca rădăcini numerile: $-1, 0, +1$. Să se afle a, b, c. (BOGDAN IONESCU.)

204. Se umple cu apă un vas de revoluțiune care are un orificiu în fund. Să se determine forma acestui vas, astfel că deschizînd orificiul, nivelul superior al apei să scadă în mod uniform sau uniform accelerat. (I. IONESCU.)

ASUPRA PATRULATERELOR INSCRIPTIBILE.

Se cunoaște condițiunea pentru ca un patrulater ABCD să fie inscriptibil; între unghiurile sale trebue să avem relația:

(1) $$A+C=B+D=180^0.$$

Se poate găsi o altă condițiune de asemenea necesară și suficientă pentru ca patrulaterul ABCD să poată fi înscris într'o circonferință, condițiune care de și nu aplicabilă în general, poate duce însă adesea la proprietăți interesante.

1.-- Consider un patrulater ABCD și un altul $\alpha\beta\gamma\delta$ circumscris celui d'întâi. Zic că, dacă triunghiurile $A\alpha B$, $B\beta C$, $C\gamma D$, $D\delta A$ sînt isoscele, patrulaterul ABCD este inscriptibil, și reciproc. Din demonstrațiunea care urmează, se va deduce de o dată propoziținea directă și cea reciprocă. In adevăr, duc prin A o dreaptă oare-care $A\alpha$, prin B o alta $B\alpha$, așa ca triunghiul $A\alpha B$ să fie isoscel; prin C, dreapta $C\beta$ întîlnind dreapta αB în β, și formînd triunghiul isoscel $B\beta C$; prin D, în fine $D\gamma$ făcînd cu βC triunghiul isoscel $C\gamma D$. Zic că dacă și triunghiul $D\delta A$ este isoscel, patrulaterul ABCD este inscriptibil.

Pentru aceasta, fie $\widehat{A\alpha B}=\alpha$, deduc:

$$\widehat{\alpha AB}=\widehat{\alpha BA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\quad \widehat{\beta BC}=\widehat{\beta CB}=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-B$$

$$\widehat{\gamma CD}=\widehat{\gamma DC}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+B-C,\quad \widehat{\delta DA}=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-B+C-D$$

și cum:

$$\widehat{\delta AD}=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-A$$

pentru ca $D\delta A$ să fie isoscel va trebui ca:

(2) $$\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-B+C-D=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-A$$

sau

$$A+C=B+D$$

și fiind că:

$$A+C+B+D=360^0$$
$$A+C=B+D=180^0$$

deci patrulaterul ABCD este inscriptibil.

Reciproc, dacă ABCD este inscriptibil, condițiunea (1) și prin urmare (2) este împlinită deci:

$$\widehat{\delta AD} = \widehat{\delta DA}.$$

Rezultă deci, că în cazul patrulaterului inscriptibil, și numai în acest caz se poate circumscrie un patrulater $\alpha\beta\gamma\delta$ așa ca toate triunghiurile $A\alpha C$, $B\beta C$,... să fie isoscele.

Observare. Din demonstrațiunea precedentă se vede clar, că dacă se poate circumscrie un patrulater $\alpha\beta\gamma\delta$ împlinind condițiunile precedente, se pot înscrie o infinitate, căci prima latură $A\alpha$ este arbitrară.

2.— Dacă se presupune cunoscut unghiul $A\alpha B = \alpha$, se poate, printr'un calcul ușor, deduce cele-lalte unghiuri ale patrulaterului $\alpha\beta\gamma\delta$.

Se găsește ast-fel:

$$\beta = 2B - \alpha,\ \gamma = \alpha - 2B + 2C,\ \delta = 2B - 2C + 2D - \alpha.$$

Din aceste formule se deduc următoarele propozițiuni pe cari mă mărginesc a le enunța:

a^0.— Dacă $\alpha\beta\gamma\delta$ poate fi un romb, ABCD este un dreptunghiu.

b^0.— Dacă $\alpha\beta\gamma\delta$ are două unghiuri opuse egale, ABCD este un trapez isoscel.

c^0.— Pentru ca patrulaterul $\alpha\beta\gamma\delta$ să fie inscriptibil, trebue ca:

$$\alpha = A + B - \frac{\pi}{2}.$$

d^0.— Dacă $\alpha = \beta$, $B = \alpha$.

e^0.— Dacă $\alpha = \beta$ și $\gamma = \delta$, avem $B = \alpha$, $C = \frac{\pi}{2}$ etc.

Se mai pot deduce multe proprietăți, sau se poate trata o problemă inversă: dîndu-se un patrulater $\alpha\beta\gamma\delta$ să se studieze posibilitatea și proprietățile patrulaterelor ABCD, care se bucură de proprietatea că toate triunghiurile αAB, βBC, δDA sînt isoscele.

Nu mă opresc asupra acestei probleme.

Aplicațiune. — *Se consideră un patrulater plan articulat* ABCD, *și un sistem de patru forțe oare-cari ca mărime, aplicate perpendicular pe mijlocul fie-cărei laturi, și situate în planul patrulaterului. In poziținea de echilibru, patrulaterul* ABCD *este inscriptibil.*

In adevăr, în poziția de echilibru, liniile de acțiune ale reacțiu-

nilor laturilor formează un patrulater $\alpha\beta\gamma\delta$ bucurîndu-se de proprietățile enunțate mai sus.

3.— Reiau problema primitivă (1) printr'o altă metodă, care se poate aplica cu mult succes în foarte multe cazuri.

Pe o dreaptă XX', iau 4 puncte a,b,c,d. Este evident, că dacă se duce prin a o dreaptă oare-care aa', prin b o dreaptă bb' egal înclinată (nu paralelă) ca aa' pe XX', prin c o dreaptă cc' egal înclinată ca bb' în fine prin d o dreaptă dd' egal înclinată ca cc', dreptele aa' și dd' sînt egal înclinate pe XX'. Transformînd prin inversiune, proprietatea în chestiune rezultă fără greutate; căci punctele A,B,C,D transformatele punctelor a,b,c,d formează un patrulater inscriptibil, iar dreptele aa', bb'... se transformă în cercuri ale căror tangente în A,B,... formează un patrulater $\alpha\beta\gamma\delta$ așa ca $\widehat{\alpha AB}=\widehat{\alpha BA}$,...

Demonstrațiunea precedentă se poate aplica fără schimbare la un poligon inscriptibil cu un număr păreche de laturi, cărora li se poate prin urmare circumscrie o infinitate de poligoane formînd triunghiuri isoscele. Aceiași demonstrațiune arată clar că pentru un poligon cu un număr nepăreche de laturi, proprietatea nu se mai aplică; căci dacă se consideră o dreaptă XX' și 5 puncte arbitrare luate pe ea, dreapta dusă prin ultimul punct și egal înclinată ca cea dusă prin penultimul punct, nu e în general egal înclinată cu cea dusă prin primul punct; nu e egal înclinată de cît în cazul cînd dreapta dusă prin primul punct coincide cu XX', sau e perpendiculară pe aceiași dreaptă. In primul caz poligonul $\alpha\beta\gamma\delta$..... este format de tangentele duse la cercul circumscris poligonului dat în vîrfurile lui; în al doilea caz poligonul $\alpha\beta\gamma\delta$ se reduce la razele aceluiași cerc duse la vîrfurile poligonului dat.

4. — Inainte de a termina am să dau o aplicațiune simplă de modul cum se pot demonstra unele proprietăți prin inversiune.

Consider un cerc O și trei puncte A,b,c pe acest cerc. Fie d mijlocul arcului bc. Dreapta Ad este bisectrița unghiului bAc. Așa fiind, transform prin inversiune luînd ca pol punctul A.

Punctele b,c,d vin în B,C,D:

$$Ab \times AB = Ac \times AC = Ad \times AD = k.$$

Se știe, și se poate de altminteri demonstra ușor, că:

$$bd=k.\frac{BD}{AB.AD},\quad cd=k.\frac{CD}{AC.AD}$$

cum însă $bd=cd$, rezultă:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}$$

adică teorema cunoscută asupra bisectriței.

G. Țițeica.

UN NOU METOD PENTRU STUDIUL TRIGONOMETRIEI PLANE.

(Urmare)

Relațiuni între elementele unui triunghiu.

In cele ce urmează vom însemna cu a,a',a'' lungimile laturilor unui triunghiu $AA'A''$, cu α,α',α'' unghiurile formate în vîrfurile A,A',A'' și respectiv opuse laturilor a,a',a''. Vom însemna cu S aria unui triunghiu oare-care.

Teorema V. Aria unui triunghiu este egală cu produsul a două laturi înmulțit cu semicoeficieutul unghiului cuprins între ele.

Pentru a demonstra aceasta să construim un paralelogram pe laturile AA', AA'' și care să aibă unghiul $A'AA''$. Se știe că aria acestui paralelogram este dublul ariei triunghiului, ast-fel că teorema I ne dă:

$$2S=K_\alpha\times AA'\times AA'',$$

de unde cu notațiunile admise:

$$6)\qquad S=\frac{1}{2}.a'a''.K_\alpha,\qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Teorema VI. Laturile unui triunghiu sînt proporționale cu coeficienții unghiurilor opuse.

După teorema precedentă avem:

$$S=\frac{1}{2}a'.a''.K_\alpha=\frac{1}{2}a.a''K_{\alpha'}=\frac{1}{2}.a.a'.K_{\alpha''}$$

Impărțind aceste egalități cu $\frac{1}{2}a.a'.a''$ obținem:

$$\frac{K_\alpha}{a}=\frac{K_{\alpha'}}{a'}=\frac{K_{\alpha''}}{a''}=\frac{2S}{a.a'.a''},$$

și răsturnînd primele trei rapoarte avem:

$$7) \qquad \frac{a}{K_\alpha} = \frac{a'}{K_{\alpha'}} = \frac{a''}{K_{\alpha''}}, \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Teorema VII. O latură a unui triunghiu este egală cu suma produselor fie-căreia din cele-lalte două, prin coeficientul complimentului unghiului pe care fie-care din aceste două laturi îl face cu prima latură.

Ducem înălțimea AB a triunghiului. Se pot întîmpla 2 cazuri:

1) *Punctul* B *cade între* A *și* A'. In acest caz avem:

$$S = ABA' + ABA''.$$

Să însemnăm cu ε' și ε'' unghiurile BAA', BAA''. Inlocuind ariile din egalitatea precedentă prin expresiunile lor deduse cu ajutorul teoremei V, iar aria S prin expresiunea cunoscută $\frac{1}{2}$A'A''×AB, vom avea:

$$\frac{1}{2}a \times AB = \frac{1}{2}AB \times a''K_{\varepsilon'} + \frac{1}{2}AB \times a'K_{\varepsilon''}.$$

Divizînd această egalitate cu $\frac{1}{2}$AB, avem:

$$a = a''.K_{\varepsilon'} + a'.K_{\varepsilon''}.$$

Dar unghiurile ε' și α' de o parte și ε'' și α'' de altă parte sînt complimentare, căci triunghiurile AA'B, AA''B sînt dreptunghii în B. Deci:

$$\varepsilon' = 1 - \alpha', \quad \varepsilon'' = 1 - \alpha''$$

și egalitatea precedentă devine:

$$a = a''.K_{1-\alpha'} + a'.K_{1-\alpha''}, \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

2) *Punctul* B *cade pe prelungirea laturei* A'A''. Să presupunem că B cade pe partea lui A'', și să însemnăm ca și mai sus cu ε' și ε'' unghiurile BAA', BAA''. Vom avea:

$$S = ABA' - ABA''$$

sau:

$$\frac{1}{2}a \times AB = \frac{1}{2}AB \times a''K_{\varepsilon'} - \frac{1}{2}AB \times a'.K_{\varepsilon''},$$

de unde:

$$a = a''.K_{\varepsilon'} - a'.K_{\varepsilon''}.$$

Dar avem în acest caz:

$$\varepsilon' = 1 - \alpha', \quad \varepsilon'' = \alpha'' - 1,$$

deci:

$$K_{\varepsilon'} = K_{1-\alpha'} \quad K_{\varepsilon''} = -K_{1-\alpha''}.$$

Prin urmare:

$$a=a''.K_{1-\alpha'}+a'.K_{1-\alpha''} \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Prin urmare prin faptul că considerăm coeficienții complimentelor unghiurilor obtuse ca negativi, teorema VII e adevărată în toate cazurile. Avem deci următoarele trei egalități:

$$8)\quad \begin{cases} a=a'.K_{1-\alpha''}+a''.K_{1-\alpha'} \\ a'=a.K_{1-\alpha''}+a''.K_{1-\alpha} \\ a''=a.K_{1-\alpha'}+a'.K_{1-\alpha} \end{cases}$$

Teorema VII. Patratul laturei unui triunghiu este egal cu suma patratelor celor-lalte două, mai puțin dublul produs al acestor două din urmă laturi, înmulțit cu coeficientul complimentului unghiului cuprins între ele.

Să înmulțim egalitățile 8) respectiv cu a, a', a'' și să scădem pe prima din suma celor două din urmă. Vom obține făcînd reducerile:

$$a'^2+a''^2-a^2=2a'.a''.K_{1-\alpha}$$

de unde:

$$9)\quad a^2=a'^2+a''^2-2a.a''.K_{1-\alpha} \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

In același mod vom găsi:

$$9')\quad a'^2=a^2+a''^2-2a'.a''.K_{1-\alpha'}.$$

$$9'')\quad a''^2=a^2+a'^2-2a.a'.K_{1-\alpha''}.$$

Cazul triunghiului dreptunghiu. Să presupunem că unghiul α devine drept. Atunci unghiurile α' și α'' vor fi complimentare; a va fi ipotenuza iar a' și a'' catetele unui triunghiu dreptunghiu. In acest caz avem:

$$K_\alpha=K_1=1, \qquad K_{\alpha'}=K_{1-\alpha''}, \qquad K_{1-\alpha}=K_0=0.$$

Formulele 7) devin în acest caz:

$$\frac{a}{1}=\frac{a'}{K_{\alpha'}}=\frac{a''}{K_{\alpha''}},$$

de unde: $$10)\quad a'=a.K_{\alpha''}, \quad a''=a.K_{\alpha''}.$$

Prin urmare avem următoarea teoremă:

Teorema IX. O catetă a unui triunghiu dreptunghiu e egală cu ipotenuza înmulțită cu coeficientul unghiului opus.

Divizînd egalitățile 10) obținem:

$$\frac{a'}{a''}=\frac{a.K_{\alpha'}}{a.K_{\alpha''}}=\frac{K_{\alpha'}}{K_{1-\alpha'}}=R_{\alpha'}$$

de unde: 11) $a'=a''.R_{\alpha'}$.

De aci deducem următoarea teoremă:

Teorema X. O catetă a unui triunghiu dreptunghiu este egală cu cealaltă înmulțită cu raportul unghiului opus.

Egalitatea 9) devine în cazul triunghiului dreptunghiu:

$$a^2=a'^2+a''^2-2.a'.a''K_{1-1}=a'^2+a''^2-2.a'.a''\times o.$$

sau: 12) $a^2=a'^2+a''^2$,

de unde următoarea teoremă:

Teorema XI. Patratul ipotenuzei unui triunghiu dreptunghiu este egal cu suma patratelor celor două catete.

Aceste trei teoreme se pot stabili și direct, observînd că aria triunghiului dreptunghiu are ca expresiune $\frac{1}{2}a'.a''$.

(Va urma) I. Ionescu.

Soluțiunile chestiunilor propuse la concursul înscris pentru admiterea în anul preparator al Școalei de Poduri și Șosele din București.

(7 Octombre 1896.)

ARITMETICĂ.

Un comerciant dă unui bancher la 14 Mai patru polițe cu scadențe deosebite și anume:

Una de 518 lei cu scadența la 30 Mai,
„ „ 370 „ „ „ „ 14 Iunie,
„ „ 1600 „ „ „ „ 6 Iulie,
„ „ 720 „ „ „ „ 1 August,

și în locul lor bancherul îi dă o singură poliță de o sumă egală cu suma celor patru polițe de mai sus și care produce tot atîta dobîndă, ca și cele patru polițe la un loc. Se întreabă care este ziua scadenței acelei poliță.

Se știe că pentru a găsi *scadența medie* a mai multor polițe trebue să înmulțim fie-care capital prin numărul zilelor pănă la scadență, iar suma produselor obținute să o împărțim prin suma

capitalurilor. Cîtul obținut ne va da numărul zilelor până la scadența medie. Ast-fel:

Capitalul	518.	Numărul	zilelor	de la	14 Mai	la	30 Mai	este	16.	Produsul.	8288
«	370.	«	«	«	14	«	14 Iunie	«	30.	«	11100
«	1600.	«	«	«	14	«	6 Iulie	«	52.	«	83200
«	720.	«	«	«	14	«	1 Aug.	«	78.	«	56160
	3208										158748

$$\frac{158748}{3208}=49.$$

Deci scadența poliței unice va fi la 3 Iulie.

ALGEBRĂ.

1) *Să se simplifice expresiunea:*

$$\frac{x^2+y+\sqrt[3]{z^2}-2x\sqrt{y}+2x\sqrt[3]{z}-2\sqrt[6]{y^3z^2}}{x^2-y-\sqrt[3]{z^2}+2\sqrt[6]{y^3z^2}}.$$

Numărătorul acestei expresiuni se poate scrie:

$$x^2-2x\sqrt{y}+y+2\sqrt[3]{z}\,(x-\sqrt{y})+\sqrt[3]{z^2}=(x-\sqrt{y})^2+2\sqrt[3]{z}\,(x-\sqrt{y})+\sqrt[3]{z^2}=(x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z})^2.$$

Numitorul expresiunei date se poate scrie:

$$x^2-(y-2\sqrt{y}\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2})=x^2-(\sqrt{y}-\sqrt[3]{z})^2=(x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z})\,(x+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}).$$

Numărătorul și numitorul avînd pe $x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}$ ca factor comun, valoarea simplificată a expresiunei date este:

$$\frac{x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}}{x+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}}.$$

2) *Fie ecuațiunea:*

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{a}{x}}=\sqrt{2b},$$

în care a e un număr pozitiv dat. Să se indice cum trebue să fie b pentru ca ecuațiunea făcută rațională să aibă: 1° *rădăcini reale și neegale;* 2° *rădăcini egale. Să se rezolve.*

Punem:

$$\sqrt{\frac{x}{a}}=y, \quad \text{deci} \quad \sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{1}{y}.$$

Inlocuind avem:

$$y+\frac{1}{y}=\sqrt{2b},$$

sau: $$y^2-\sqrt{2b}.y+1=o,$$

de unde: $$y=\frac{\sqrt{2b}\pm\sqrt{2b-4}}{2}=\sqrt{\frac{b}{2}}\pm\sqrt{\frac{b}{2}-1}.$$

Inlocuind pe y prin egalul său $\sqrt{\frac{x}{a}}$ avem:

$$\frac{x}{a}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\pm\sqrt{\frac{b}{2}-1}\right)^2=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}-1\pm2\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}},$$

de unde: $$x=a(b-1\pm\sqrt{b^2-2b}).$$

Pentru ca să avem două rădăcini neegale și reale, trebue să avem:

$$b^2-2b>o$$

sau: $$b(b-2)>o$$

de unde: $b>2$ sau $b<o$.

E de observat că pentru $b<o$, radicalele ecuațiunei date devin imaginare, dar ecuațiunea făcută rațională admite rădăcini reale. Cînd $b=o$ sau $b=2$, ecuațiunea transformată admite rădăcini reale și egale, dar ecuațiunea dată nu admite valoarea $b=o$, fără a lua unul din radicalii din membrul întâi cu semnul —.

3) *Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:*

$$1)\quad\begin{cases}x-ay+a^2z-a^3=o,\\x-by+b^2z-b^3=o,\\x-cy+c^2z-c^3=o.\end{cases}$$

Scăzînd prima ecuațiune din celelalte două obținem:

$$2)\quad\begin{cases}z(a^2-b^2)-y(a-b)=a^3-b^3,\\z(a^2-c^2)-y(a-c)=a^3-c^3.\end{cases}$$

Divizînd aceste ecuațiuni respectiv prin $(a-b)$, și $(a-c)$, obținem:

$$3)\quad\begin{cases}z(a+b)-y=a^2+ab+b^2,\\z(a+c)-y=a^2+ac+c^2.\end{cases}$$

Scăzînd aceste ecuațiuni obținem:

$$z(b-c)=b^2-c^2+ab-ac=(b-c)(a+b+c),$$

de unde: $$z=a+b+c.$$

Inlocuind pe z în prima din ecuațiunile 3) obținem:

$$y=(a+b+c)(a+b)-a^2-ab-b^2=ab+bc+ca.$$

Inlocuind pe y și z în prima din ecuațiunile date avem:

$$x=a(ab+ac+bc)-a^2(a+b+c)+a^3,$$

$$x=abc.$$

GEOMETRIE.

1) *Cu o rază dată, să se descrie o circonferență, care să fie tangentă de o dată la o dreaptă dată și la o circonferență dată.*

Fie D dreapta dată, C circonferența dată, C′ circonferența căutată și r și r' razele acestor două circonferențe. C și C′ fiind tangente, distanța centrelor lor O și O′ va fi egală cu suma sau diferența razelor. De altă parte distanța punctului O′ la dreapta D trebue să fie egală cu r'. De aci rezultă următoarea construcțiune. Ducem de o parte și de alta a dreptei D două paralele Δ, Δ' la distanța r' de D. Din centrul O cu raze egale cu $r+r'$ și $r-r'$ (sau $r'-r$ cînd $r'>r$) descrim două circonferințe Γ, Γ'. Centrul O′ va fi la intersecțiunea dreptelor Δ, Δ' cu circonferențele Γ, Γ'. Se vede de aci că problema poate admite până la 8 soluțiuni și anume în 4 cazuri circonferințele C, C′ sînt tangente exterioare și în alte 4 cazuri tangente interioare. Problema poate fi și imposibilă cînd Δ, Δ'; Γ, Γ' nu au nici un punct de întîlnire.

2) *Să se calculeze volumul unei sfere circumscrise unui cub cu latura egală cu 1.*

Patratul diagonalei unui cub fiind suma patratelor laturilor, se vede imediat că diagonala cubului cu latura 1 are ca valoare $\sqrt{3}$. Dar această diagonală este și diametru al sferei. Raza sferei va fi deci $\frac{\sqrt{3}}{2}$ și vom avea:

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$

de unde: $V=2{,}721$

cu o eroare mai mică ca 0,001.

TRIGONOMETRIE.

Se dă $tgx=2-\sqrt{3}$. *Să se calculeze* $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$. *Din valoarea obținută pentru* $\sin 2x$ *să se deducă expresiunea generală a arcelor corespunzătoare.*

Avem succesiv:

1) $$\frac{\sin x}{\cos x}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=4+3-4\sqrt{3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1}=\frac{7-4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}=\frac{(7-4\sqrt{3})(8+4\sqrt{3})}{64-48}$$

$$\sin^2 x=\frac{56-48-4\sqrt{3}}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4.2}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4.2}$$

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2.\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2) In același mod găsim:

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

3) Avem:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=+\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$$

De aci deducem:

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad \text{și} \quad 2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6},$$

sau:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{12} \quad \text{și} \quad x=k\pi+\frac{5\pi}{12}.$$

4) Avem:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}=\frac{8\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5) Avem:

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}.$$

6) Avem:

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}.$$

C. Țițirigă.

CONGRESUL INTERNAȚIONAL AL MATEMATICIANILOR DIN ANUL 1897.

Sînt aproape trei ani de cînd se urmărește de către matematicianii din diferite țări ideia de a se întruni în Congrese internaționale. După mai multe schimbări de vederi între dînșii, s'a ajuns la înțelegerea de a se alege un comitet pentru organizarea primului Congres, care să aibă loc în 1897. In urmă s'a stabilit ca acest Congres să aibă loc în Elveția la Zurich, și pentru acest scop s'a constituit un comitet local de organizare al Congresului, compus din D-nii: *Bleuler, Burkhardt, G. Dumas, J. Franel, G.-F. Geiser, A. Herzog, A. Hurwitz, H. Minkowski, J. Rebstein, F. Rudio, F.-H. Weber,* cărora li s'a atașat următorii matematicieni din alte țări: *L. Cremona* (Roma), *A.-C. Greenhill* (Woolwich), *G.-W. Hill* (West-Nyack, U. S. A.), *F. Klein* (Gœttingue), *A. Markoff* (St. Petersburg), *F. Mertens* (Viena), *G. Mittag-Leffler* (Stockholm), *G. Oltramare* (Geneva), *H. Poincaré* (Paris), *K. Vondermühl* (Bâle).

Acest comitet a decis ca primul Congres să aibă loc în zilele de 9, 10 și 11 August (stil nou), în localul Școalei Politechnice federale din Zurich. Comitetul local de organizare al Congresului a adresat apoi matematicianilor din toate țările următorul apel:

Domnule,

Știți că ideia unui Congres internațional al Matematicianilor a fost desbătută foarte mult în ultimii ani de către învățații care doreau realizarea unui asemenea Congres. Avîndu-se în vedere excelentele rezultate obținute în alte ramuri științifice prin Congrese internaționale, s'a crezut că ar fi un real avantaj de a se asigura executarea unui asemenea proiect.

In urma unui schimb de vederi foarte activ, se căzu de acord asupra unui prim punct. Prin situația sa geografică centrală, prin tradițiunile și experiența sa în materie de Congrese internaționale, Elveția se păru cu totul indicată ca țara în care să se facă prima încercare de reunire a Matematicianilor. S'a hotărît îndată după aceia de a se alege orașul Zurich ca sediu al Congresului.

Matematicianii din Zurich nu 'și fac nici o iluzie asupra dificultăților pe care vor trebui să le învingă. Dar chiar în interesul acestei întreprinderi, ei au crezut că nu pot să înlăture promisiunile așa de onorabile ce li s'au făcut din toate părțile. Ei s'au decis deci să ia toate măsurile pregătitoare pentru viitorul Congres, și să contribue la reușita lui pe cît le va permite puterile. Ast-fel s'a constituit, cu ajutorul Matematicianilor din alte țări, sub-

semnatul Comitet de organizare, însărcinat **să reunească la Zurich în 1897 pe Matematicianii din lumea întreagă.**

Congresul la care sînteți prietenește rugat de a asista, va avea loc la Zurich în zilele de 9, 10 și 11 August (stil nou) 1897, în salele Școalei Politechnice federale. Comitetul vă va comunica din vreme textul programului hotărît, rugîndu-vă să'i trimeteți aderarea D-voastră. Dar chiar de acum, ne permitem a vă face cunoscut că lucrările științifice și chestiunile de ordin administrativ, se vor referi mai ales la subiecte de interes general sau de importanță recunoscută.

Congresele științifice au de asemenea prețiosul avantaj de a favoriza și de a întreține relațiunile personale. Comitetul local își va da toată silința pentru obținerea acestei părți, și în acest scop va face un modest program de petreceri și de întruniri intime.

E de dorit ca speranța pusă în acest prim Conges să se realizeze pe deplin. E de dorit ca numeroși participanți să contribue prin prezența lor de a creia între colegi, nu numai raporturi științifice de la unul la altul, dar încă relațiuni de prietenie bazate pe cunoștințe personale. E de dorit în fine ca Congresul nostru să servească la răspîndirea și propășirea științelor matematice.

N.B. A se adresa corespondențele privitoare la afacerile Congresului D-lui Profesor G.-F. Geiser, Kusnacht-Zurich.

PROBLEME REZOLVITE [1]

Problema 119. — *Să se probeze că produsul:*

$$\frac{2^3+2+1}{2^3-2}\times\frac{3^3+3+1}{3^3-3}\times\ldots\ldots\frac{n^3+n+1}{n^3-n}\ldots,$$

e convergent și cînd n tinde către ∞, *valoarea sa tinde către o limită finită mai mică ca* $e^{\frac{7}{4}}$, *e fiind baza logaritmilor neperieni.* (Bogdan G. Ionescu.)

Soluție dată de D-nul A. Iliovici, (Student, Iași).

Termenul general al produsului poate fi pus sub formele:

[1]) S'au primit prea tîrziu, pentru a se putea menționa în numărul trecut, soluțiile următoarelor probleme:

De la D-l *G. Giușcă* o soluție trigonometrică a problemei 131; de la D-l *A. Iliovici* o soluție analitică a problemei 147; de la D-l *G. Iliovici* o soluție analitică a problemei 96, o soluție geometrică a problemei 131 și soluția problemei 139; de la D-l *Corneliu Ionescu* o soluție geometrică și una trigonometrică a problemei 131; de la D-nii *C. Mateiescu, I. Moscuna* și *T. Vladimirescu* soluția problemei 163.

$$\frac{n^3+n+1}{n^3-n}=\frac{n^3+n+1-n+n}{n^3-n}=1+\frac{2n+1}{n^3-n};$$

dar:

$$1+\frac{2n+1}{n^3-n}<e^{\frac{2n+1}{n^3-n}}$$

deci, însemnînd cu P limita valorei produsului și cu s limita seriei $\sum\frac{2n+1}{n^3-n}$, cînd n tinde către ∞, avem:

$$P<e^{s}.$$

De aci se vede că convergența și valoarea limită a produsului depinde de convergența și valoarea limită a seriei $\sum\frac{2n+1}{n^3-n}$. Se vede ușor că ea este o serie convergentă și ca să aflăm valoarea sa transformăm termenul general în o sumă de fracțiuni simple și obținem:

$$\frac{2n+1}{n^3-n}=\frac{3}{2(n-1)}-\frac{2}{2n}-\frac{1}{2(n+1)};$$

făcînd pe $n=2, 3 \ldots$ și adunînd obținem $\frac{7}{4}=s$;

deci:

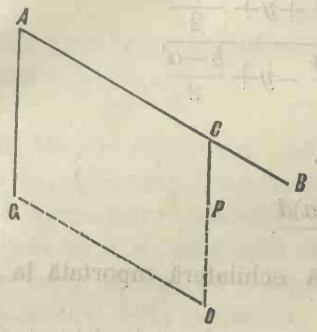
$$P<e^{\frac{7}{4}}.$$ c.c.e.d.d.

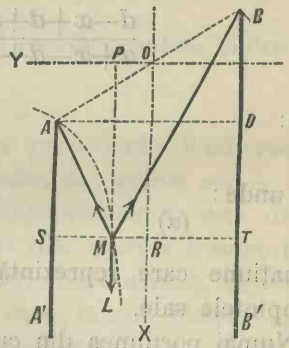
Problema 132. — *Să se determine curba pe care se mișcă:* 1) *Găleata unui puț cu cumpănă:* 2) *O lampă electrică atîrnată în mod mobil pe o sîrmă care trece prin extremitățile a doi stîlpi de înălțimi diferite, cînd lungimea sîrmei variază.* (C. Lupu.)

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (București) și *C. Popovici* (Student, Iași).

1) Fie AB cumpăna, C punctul ei de oscilațiune, G găleata. Prelungim piciorul cumpenei ast-fel ca CO=AG. Figura GACO este un paralelogram, de oare-ce laturile lui verticale sînt egale prin construcție. Deci OG=AC. Lungimea OG fiind constantă iar punctul O fix, punctul G va descrie un arc de circonferență egal în mărime cu arcul de circonferență descris de punctul A.

2) Fie A,B punctele de care e suspendată sîrma, L lampa și M punctul mobil de suspensiune al lămpei. Ducem dreapta AB și prin mijlocul ei ducem două axe coordonate: una OY orizontală și și alta OX verticală și îndreptată în jos. Vom presupune că firul este inextensibil și vom neglija greutatea lui față cu greutatea lămpei.





Pentru o lungime dată a sîrmei, punctul M nu poate descrie decît o elipsă ale cărei focare sînt punctele A,B și a cărei axă mare e egală cu lungimea sîrmei. Pentru ca punctul M să fie în echilibru pe această elipsă, trebue ca direcțiunea forței (greutatea lămpei) să coincidă cu normala la elipsă în punctul M; dar în acest caz razele vectorii MA, MB fac cu verticala unghiuri egale, căci normala în M trebue să fie verticală. Ducem prin A și M orizontalele AD și ST. Punem:

$$MR=y, \quad MP=x.$$

Triunghiurile dreptunghii asemenea MAS, MBT ne dau:

$$\frac{MS}{MT}=\frac{AS}{BT}.$$

Să însemnăm cu $2d$, distanța dintre stîlpi, cu a și b înălțimea stîlpilor AA', BB'. Avem:

$$SM=d-x, \quad MT=d+x, \quad AS=OR-\frac{1}{2}BD=y-\frac{b-a}{2}.$$

$$BT=OR+\frac{1}{2}BD=y+\frac{b-a}{2}.$$

Inlocuind în egalitatea precedentă aceste valori avem:

$$\frac{d-x}{d+x}=\frac{y-\frac{b-a}{2}}{y+\frac{b-a}{2}},$$

de unde aplicînd o teoremă a proporţiilor:

$$\frac{d-x+d+x}{d+x-d+x}=\frac{y-\frac{b-a}{2}+y+\frac{b+a}{2}}{y+\frac{b-a}{2}-y+\frac{b-a}{2}},$$

sau:

$$\frac{d}{x}=\frac{2y}{b-a},$$

de unde:

$$(\alpha) \qquad xy=\frac{(b-a)d}{2},$$

ecuaţiune care reprezintă o hiperbolă echilateră raportată la asimptotele sale.

Numai porţiunea din curbă cuprinsă între dreptele AA' şi OX convine problemei. E uşor de văzut *a priori* că punctul A face parte din locul punctului M; dar aceasta se poate vedea şi din ecuaţiune, căci coordonatele acestui punct sînt: d şi $\frac{b-a}{2}$. De asemenea şi punctul B e situat pe hiperbola (α). Porţiunea din această curbă situată în sus de punctul B ar corespunde problemei dacă am înlocui lampa cu un balon pe care l'ar reţine sîrma. Cele-lalte porţiuni de curbă, de la A spre stînga şi de la B spre dreapta, ar corespunde cazului unui balon de o putere ascensională foarte mică, şi care ar fi expus la acţiunea unui vînt orizontal bătînd de la B spre A sau vice-versa.

Problema 136. — *Să se probeze că expresiunea:*

$$A=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}},$$

tinde către o limită determinată, cînd numărul radicalilor suprapuşi tinde către infinit, a fiind un număr pozitiv dat. Pentru ce valori ale lui a limita precedentă este raţională şi întreagă? Cînd a tinde către zero, A *tinde către unitatea.*

(A. G. Ioachimescu.)

Soluţiune dată de D-l I. Moscuna, (Bacalaureat, Bucureşti).

Fie A_n valoarea expresiunei date în care ar figura un număr limitat n de radicale suprapuse. Avem:

$$A_{n+1}=\sqrt{a+A_n}. \tag{1}$$

A_n crește evident în același timp cu n, deci vom avea:

$$A_{n+1}>A_n, \tag{2}$$

din (1) și (2) deducem:

$$\sqrt{a+A_n}>A_n,$$

ambii membri ai acestei inegalități fiind pozitivi, putem rîdica la patrat și avem:

$$A_n^2-A_n-a<o. \tag{3}$$

Rădăcinile trinomului din inegalitatea precedentă fiind reale, pentru că această inegalitate să fie satisfăcută, trebue ca A_n să fie cuprins între rădăcinile trinomului. Expresiunea A_n este deci, ori-care ar fi n, inferioară rădăcinei celei mai mari a trinomului. (Nu avem evident să ținem seamă de rădăcina negativă, căci A_n este pozitiv). Prin urmare A_n care crește cu n, rămîne inferior unei anumite valori; el are deci o limită cînd n tinde către infinit.

Fie A această limită. Egalitatea (1) devine:

$$A^2-A-a=o,$$

care dă, ca valoare pozitivă a lui A:

$$A=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}). \tag{4}$$

Pentru ca această valoare să fie rațională și întreagă, trebue să avem, m reprezentînd un număr întreg:

$$1+4a=(2m+1)^2,$$

de unde:

$$a=m(m+1).$$

Făcînd în (4) pe $a=o$, avem:

$$A=1.$$

O soluțiune analoagă, a fost dată de D-l *C. Popovici,* (Iași).

Problema 141. — *Se consideră o cicloidă al cărei vîrf este* A *și fie* M *un punct oare-care al curbei. Să se demonstreze să raza cercului generator, care trece prin centrul de curbură corespunzător punctului* M, *determină pe tangenta în acest punct un segment egal cu a treia parte a arcului* AM.

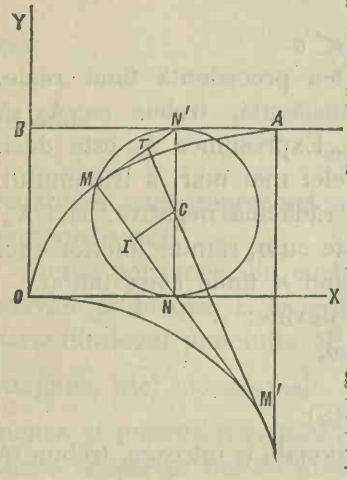
(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l Al. M. Melencovici, (Student, București) și *A. Iliovici* (Student, Iași).

Fie C centrul cercului generator ce trece prin M și NN′ diametrul perpendicular pe baza AB a cicloidei. Dacă unim punctul M cu N′ și N, atunci MN′ este tangenta, iar MN normala corespunzătoare punctului M al cicloidei.

Dacă pe MN luăm o lungime MM′=2MN, vom avea în M′ centrul de curbură, iar MM′ va fi raza de curbură al punctului M.

Locul punctului M′ este desfășurata curbei date, și e o cicloidă egală cu cicloida dată. Lungimea unui arc al desfășuratei este egală cu diferența razelor de curbură ce se termină la extremitățile arcului de desfășurată considerat. Raza de curbură în O este zero, fiind-că normala MN devine nulă pentru acest punct. Lungimea arcului OM′ de desfășurată este deci:



$$\text{arc } OM' = MM' = 2NM'.$$

Dacă ne raportăm la cicloida dată, videm după cele spuse că:

$$\text{arc } AM = 2MN'. \qquad (1)$$

Fie T intersecția razei CM′ cu tangenta MN′. Ducem din C perpendiculara CI pe normala MN. In triunghiul MN′N, punctul C este mijlocul dreptei NN′ și prin urmare vom avea: MN′=2CI.

Triunghiurile asemenea M′MT, M′IC ne dau:

$$\frac{MT}{IC} = \frac{MM'}{IM'} = \frac{4}{3},$$

de unde:

$$MT = \frac{4CI}{3} = \frac{2MN'}{3},$$

sau ținînd samă de (1):

$$MT = \frac{1}{3} \text{ arc } AM.$$

c.c.e.d.d.

D-l *A. Iliovici* a dat și o soluție analitică a acestei chestiuni, iar D-l *T. Vladimirescu* a dat o soluțiune cu ajutorul echipolenților.

***Problema 142.** — *Să se găsească între ce limite poate fi luat m pentru ca ecuația :*

(1) $$(m^2-1)x^2-(2m-1)x+1=0,$$

să aibă rădăcinile sale cuprinse între 1 și 2. **(G. Țițeica.)**

Soluție dată de D-nii A. Iliovici, (Iași); *I. Drăgănescu,* (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri); *B. Paraschivescu,* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești) și *Marin Mateescu,* (Elev în Clasa VII a Liceului din Turnu-Severin).

Pentru ca rădăcinile ecuației (1) să fie reale, trebue să avem:

(2) $$m\leq\frac{5}{4}.$$

Să însemnăm cu $f(x)$ primul membru al ecuației date (1). Avem printr'un calcul simplu:

$$f(1)=(m-1)^2$$
$$f(2)=4m^2-4m-1.$$

Pentru ca 1 și 2 să fie exterioare rădăcinilor, trebue ca:

$$(m^2-1)f(1)>0$$
$$(m^2-1)f(2)>0,$$

de unde se deduce:

(3) $$m^2-1>0$$

(4) $$4m^2-4m-1>0.$$

Pentru ca 1 și 2 să fie acum de o parte și de alta a rădăcinilor, e suficient ca semisuma rădăcinilor să fie cuprinsă între 1 și 2, deci:

$$1<\frac{2m-1}{2(m^2-1)}<2,$$

sau ținînd seama de (3):

(5) $$2m^2-2m-1<0$$

(6) $$4m^2-2m-3>0.$$

Chestiunea va fi rezolvată cînd se vor găsi soluțiunile comune inegalităților (2), (3), (4), (5) și (6). Peniru aceasta se procede din aproape în aproape. Din (2) și (3) se deduc soluțiile:

$$1<m\leq\frac{5}{4}$$
$$m<-1.$$

Din acestea din urmă și (4):

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{5}{4}$$

$$m < -1,$$

ținînd seamă și de (5):

$$(7) \qquad \frac{1+\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{5}{4},$$

(6) nu dă nimic nou.

Deci m trebue să fie cuprins între limitele date de (7).

***Problema 154.** — *Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{2a}.$$

(A. G. Ioachimescu.)

Soluțiune dată de D-nii: A. Iliovici (Student, Iași), *T. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei) și *I. Moscuna* (București).

Pun:

$$(1) \qquad \sqrt[6]{x}=u, \quad \sqrt[6]{y}=v, \quad \sqrt[6]{2a}=b$$

și sistemul propus devine:

$$(2) \qquad \begin{cases} u^3+v^3=\dfrac{b^3}{\sqrt{2}} \\ u^2+v^2=b^2. \end{cases}$$

Rîdicînd prima ecuațiune la patrat, pe cea de a doua la cub și scăzîndu-le una din alta obținem:

$$(4uv)^3-6b^2(uv)^2+b^6=0.$$

Observînd ca primul membru al ecuațiunei precedente este divizibil prin:

$$uv-\frac{b^2}{2},$$

această ecuațiune poate fi scrisă:

$$\left(uv-\frac{b^2}{2}\right)\left[4(uv)^2-4b^2(uv)-b^4\right]=0,$$

care dă:

$$(uv)_1=\frac{b^2}{2}, \quad (uv)_2=\frac{b^2}{2}(1+\sqrt{2}), \quad (uv)_3=\frac{b^2}{2}(1-\sqrt{2}).$$

Fie-care din aceste valori ale produsului (uv), combinate succesiv, prin adunare și scădere, cu cea de a doua ecuațiune din sistemul (2), dă:

$$(u+v)_1=b\sqrt{2},\quad (u+v)_2=b\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}},\quad (u+v)_3=b\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}$$

$$(u-v)_1=o,\quad (u-v)_2=b\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\quad (u-v)_3=b\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cdot\sqrt{-1}$$

sau:

$$u_1=\frac{b}{2}\sqrt{2},\qquad v_1=\frac{b}{2}\sqrt{2}$$

$$u_2=\frac{b}{2}\left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right],\qquad v_2=\frac{b}{2}\left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right]$$

$$u_3=\frac{b}{2}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\sqrt{-1}\right],\quad v_3=\frac{b}{2}\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\sqrt{-1}\right]$$

Avînd valorile lui u și v, relațiunele (1) determină valorile corespunzătoare ale lui x și y.

Problema 162. — *Să se determine o parabolă dîndu-se focarul, o tangentă și parametrul.* (Bogdan Ionescu.)

Soluție dată de D-nii I. Anastasiadi, (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, București) și *T. M. Vladimirescu,* (Rîmnicul-Vîlcei).

Insemnăm cu F focarul, cu T tangenta și p parametrul. Se iea simetricul F_1 al focarului F în raport cu tangenta T. Știm că F_1 aparține directriței și că se află la o distanță de F cît p; deci descrim din F o circonferință cu o rază cît p și din F_1 duc tangentele F_1D și F_1D_1 la acest cerc, cari vor fi directrițele celor două parabole, cu focarul în F, care respund la chestiune. Axele lor vor fi respectiv FD și FD_1.

***Problema 181.** — *Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:*

$$\frac{80}{x}+\frac{y}{4}=25,$$

$$\frac{80}{y}+\frac{x}{4}=5.$$

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii M. D. Balassan (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași), *St. N. Corbeanu* (Turnu-Severin), *I. Drăgănescu* (Elev în anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele), *G. Giușcă* (Student București), *L. Hermann* (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab, București); *Al. Ionescu, Al. M.*

Moisescu, I. Kanner și *C. Vasilescu* (Elevi în Clasa V a Liceului Mihai Viteazul, București), *Corneliu Ionescu* (Iași), *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII a Liceului Traian, Turnu-Severin), *C. Mateiescu* (Elev în Clasa VII a Liceului Carol I, Craiova), *V. Oprișan* (Bacalaureat, Ploești), *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului St. Petru și Pavel, Ploești), *G. Penescu* (Student, București), *I. Penescu,* (Elev al Școalei Comenciale, anul VI, gradul II, București), *L. I. Rădulescu* (Elev în Clasa VI a Liceului St. Petru și Pavel, Ploești), *Al. Em. Melencovici* (Student, București), *I. N. Rădulescu, I. Sichitiu* și *C. Țițirigă,* (Elevi în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova), *C. S. Stănulescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, București), *J. Wittner* (Elev în Clasa VII a Liceului Unirea, Focșani) și *Solomon L. Ascher* (Elev în Clasa VI a Liceului Mihai Viteazul, București).

Făcînd să dispară numitorii obținem:

$$A) \begin{cases} 320+xy=100x, \\ 320+xy=20y, \end{cases}$$

Comparînd aceste ecuațiuni deducem:

$$y=5x.$$

Inlocuind în prima din ecuațiunile A) pe y prin $5x$, avem:

$$5x^2-100x+320=o,$$

sau:

$$x^2-20x+64=o,$$

de unde:

$$x=10\pm\sqrt{100-64}=10\pm6.$$

Deci:

$x'=16$ și prin urmare $y'=80.$

$x''=4$ » » » $y''=20.$

Ambele sisteme de soluțiuni satisfac ecuațiile date.

PROBLEME PROPUSE

205. Se consideră un patrulater complect ABCDEF. Fie K, L, M, N, P, Q mijlocurile laturilor AB, BC, CD, DA și a diagonalelor AC, BD al căror punct de întîlnire e G. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor EKM, FLN și GPQ au un punct comun. (E e punctul de întîlnire al laturilor AB, CD; F al laturilor AD, BC).

F. DUBESSET.

(Elev al Școalei Normale Superioare din Paris.)

*206. In punctele M, N, P mijlocurile laturilor BC, CA, AB ale unui triunghiu dat ABC ridicăm perpendiculare, pe care luăm către interiorul triunghiului, lungimile MA_1, NB_1, PC_1 așa că:

$$\frac{MA_1}{BC}=\frac{NB_1}{CA}=\frac{PC_1}{AB}=k.$$

Să se determine, în funcțiune de elementele triunghiului ABC, valoarea lui k pentru care triunghiul $A_1B_1C_1$ este minimum.

(A. Iliovici.)

*207. Să se rezolve ecuația:

$$\left(4a+4c+\frac{ab}{c}\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-1-\frac{a}{c}\right)-2\left(b+2c\right)\left(2+\frac{a}{c}\right)\left(x^2-1-\frac{a}{c}\right)$$
$$+\left[c\left(2+\frac{a}{c}\right)^2-\left(4a+4c+\frac{ab}{c}\right)\right]\left(x^2+1\right)^2=0.$$

(O. Alexandrini.)

*208. Se dă un cerc O și un punct A situat în planul său. Să se găsească poziția unei secante dusă prin A așa, că coarda ce unește un punct A′ de intersecție al cercului cu secanta, cu un punct B′ de intersecție al cercului cu o perpendiculară dusă din centru pe secantă, să aibă o lungime dată l. (Bogdan Ionescu.)

209. Se consideră o conică C înscrisă în triunghiul format de două tangente și coarda de contact relativă la o altă conică C′. Să se demonstreze, că două din coardele comune celor două conice, se întîlnesc în punctul comun celor două polare în raport cu C și C′ ale punctului de întîlnire ale celor două tangente considerate, și că coardele comune formează cu polarele precedente, cu care au un punct comun, un fascicul armonic. (G. Țițeica.)

*210. Fiind date relațiile:

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta'-\beta}=\frac{z-\gamma}{\gamma'-\gamma}=\ldots\ldots\ldots=\frac{t-0}{0'-0},$$
$$\frac{x-\alpha'}{\alpha-\alpha'}=\frac{y-\beta'}{\beta-\beta'}=\frac{z-\gamma'}{\gamma-\gamma'}=\ldots\ldots\ldots=\frac{t-0'}{0-0'},$$

să se deducă egalitatea:

$$\sqrt[2n]{(x-\alpha)^{2n}+(y-\beta)^{2n}+\ldots\ldots+(t-0)^{2n}}$$
$$+\sqrt[2n]{(x-\alpha')^{2n}+(y-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(t-0')^{2n}}$$
$$=\sqrt[2n]{(\alpha-\alpha')^{2n}+(\beta-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(0-0')^{2n}}.$$ (I. Ghibaldan.)

*211. Prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghiu ducem dreptele AA', BB', CC' egale și paralele cu laturile *ab*, *bc*, *ca* ale unui triunghiu *abc*. Să se demonstreze că medianele triunghiurilor ABC, A'B'C' trec prin un același punct. (I. IONESCU.)

*212. Dacă avem $a^2=b^2+c^2$, a, b, c fiind numere întregi prime între ele, nici unul din numerele a, b, c nu este divizibil prin 30. (C. MICLESCU.)

*213. Pe laturile unui exagon regulat ca diametre descrim 6 circonferențe care se vor tăia în vîrfurile exagonului și în alte 6 puncte. Se cere a se găsi: 1) Aria exagonului care are aceste 6 puncte ca vîrfuri; 2) Aria mixtilinie rămasă în interiorul exagonului. (B. PARASCHIVESCU.)

*214. Să se afle adevărata valoare a expresiunei:

$$\frac{\cos A \sin A - \cos B \sin B}{\sin(A-B)}$$

pentru A=B. (AL. EM. MELENCOVICI.)

*215. Se dă o circonferență cu centrul O și un punct oare-care P în planul său, în fine M un punct fix luat pe acea circonferință. Să se ducă prin P o secantă PAB, așa ca:

$$\sphericalangle BMA = \sphericalangle MPA,$$

A și B fiind punctele unde secanta întîlnește circonferența.

216. Se consideră elipsa: (G. ȚIȚEICA.)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=o$$

și triunghiul MAB format de tangentele MA, MB duse la elipsă din un punct M din planul său. Să se demonstreze că dacă punctul M se mișcă pe dreapta:

$$x=a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$$

toate triunghiurile MAB corespunzătoare au ca ortocentru un punct fix.— Proprietate analoagă pentru hiperbolă.

A se deduce din proprietatea pentru elipsă sau hiperbolă, proprietatea corespunzătoare pentru parabolă. (V. CRISTESCU.)

Rectificare. La pagina 134, rîndul 1 și 2 de sus, în loc de: *Chestiuni propuse la examenul înscris de admisiune în Școala Normală de Institutori*, a se ceti: *Chestiuni propuse la concursul înscris de absolvire a Școalei Normale de Institutori.*

UN NOU METOD PENTRU STUDIUL TRIGONOMETRIEI PLANE.

(Urmare)

Cîte-va relaţiuni între coeficienţii unghiurilor.

Inainte de a trece la rezolvirea triunghiurilor, va trebui să mai stabilim unele relaţiuni între elementele unui triunghiu, şi pentru aceasta va trebui să stabilim mai înainte unele relaţiuni între coeficienţii unghiurilor. După cum am spus încă de la început, vom presupune că unghiurile ce intră în formule sînt cuprinse între 0^0 şi 180^0.

Teorema XII. Suma patratelor coeficienţilor a două unghiuri complimentare e egală cu unitatea.

In formulele (10) să presupunem $a=1$. Vom obţine:

$$a'=K_{\alpha'} \quad a''=K_{\alpha''},$$

iar teorema X ne dă:

$$13) \qquad K^2_{\alpha'}+K^2_{\alpha''}=1, \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Unghiurile α' şi α'' sînt complimentare, ca fiind unghiurile ascuţite ale unui triunghiu dreptunghiu.

Teorema XIII. Coeficientul sumei a două unghiuri se obţine făcînd suma produselor coeficientului fie-cărui unghiu prin coeficientul complimentului celuilalt.

Să facem $a=1$ în formulele (7) şi (8). Vom avea:

$$\frac{1}{K_\alpha}=\frac{a'}{K_{\alpha'}}=\frac{a''}{K_{\alpha''}}, \quad \text{de unde } a'=\frac{K_{\alpha'}}{K_\alpha}, \quad a''=\frac{K_{\alpha''}}{K_\alpha}.$$

$$1=a'K_{1-\alpha''}+a''K_{1-\alpha'}=\frac{K_{\alpha'}K_{1-\alpha''}+K_{\alpha''}K_{1-\alpha'}}{K_\alpha}.$$

de unde:

$$14) \quad K_\alpha=K_{2-\alpha}=K_{\alpha'+\alpha''}=K_{\alpha'}K_{1-\alpha''}+K_{\alpha''}K_{1-\alpha'}.$$

Din această formulă mai putem deduce încă şi altele. Ast-fel înlocuind succesiv α' prin $2-\alpha'$ şi $1-\alpha'$ avem:

$$14') \quad K_{\alpha'-\alpha''}=K_{\alpha'}K_{1-\alpha''}-K_{\alpha''}K_{1-\alpha'}=K_{1-\alpha'}K_{1-\alpha''}(R_{\alpha'}-R_{\alpha''}),$$

$$14'') \quad K_{1-(\alpha'-\alpha'')}=K_{1-\alpha'}K_{1-\alpha''}+K_{\alpha'}K_{\alpha''}=K_{1-\alpha'}K_{1-\alpha''}(1-R_{\alpha'}R_{\alpha''}).$$

Divizînd aceste din urmă două relaţiuni obţinem următoarea relaţiune:

15) $$R_{\alpha'-\alpha''}=\frac{R_{\alpha'}-R_{\alpha''}}{1-R_{\alpha'}R_{\alpha''}}.$$

Dacă în 14′) înlocuim pe α' cu $1-\alpha'$ obţinem:

$$K_{1-(\alpha'+\alpha'')}=K_{1-\alpha'}K_{1-\alpha''}-K_{\alpha'}K_{\alpha''}.$$

Dacă aci facem $\alpha'=\alpha''$ vom avea:

$$K_{1-2\alpha'}=K^2_{1-\alpha'}-K^2_{\alpha'}$$

şi dacă înlocuim pe $K_{\alpha'}$ în funcţiune de $K_{1-\alpha'}$ şi viceversa cu ajutorul teoremei XII, avem:

15′) $K_{1-2\alpha'}=K^2_{1-\alpha'}-(1-K^2_{1-\alpha'})=2K^2_{1-\alpha'}-1,$

15″) $K_{1-2\alpha'}=1-K^2_{\alpha'}-K^2_{\alpha'}=1-2K^2_{\alpha'}.$

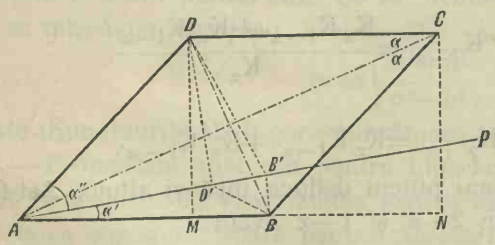
Din aceste două deducem:

$$R^2_{\alpha'}=\frac{1-K_{1-2\alpha'}}{1+K_{1-2\alpha'}},$$

sau extrăgînd rădăcina patrată şi înlocuind α' cu $0{,}5\alpha$, vom obţine:

16) $$R_{0,5\alpha}=\sqrt{\frac{1-K_{1-\alpha}}{1+K_{1-\alpha}}}.$$

Formula (14) avînd o mare importanţă în trigonometrie îi vom da şi o interpretare geometrică. Fie un paralelogram cu laturile egale cu unitatea (un romb cu latura egală cu 1). Să ducem prin un vîrf dreapta AP aşa că $\sphericalangle BAP=\alpha'$ şi $\sphericalangle DAP=\alpha''$. Din punctele B şi D lăsăm perpendiculare pe dreapta AP şi ducem dreptele B′D şi BD′.



Se vede imediat că aria triunghiului ABD este egală cu suma ariilor triunghiurilor AB′D şi ABD′. In adevăr dacă la aria ADD′B adăogăm aria triunghiului BD′D obţinem aria triunghiului ABD. Dacă la aceiaşi arie ADD′B adăogăm aria triunghiului D′B′D obţinem suma ariilor triunghiurilor ABD′ şi ADB′. Dar triunghiurile DD′B şi DD′B′ sînt echivalente

ca având aceiași bază DD′ și vîrfurile pe o paralelă BB′ la baza DD′. Deci avem:

$$ABD=ABD'+ADB'.$$

Dar avem după teorema XI:

$$AD'=AD.K_{1-\alpha''}=1.K_{1-\alpha''}=K_{1-\alpha''}.$$

$$AB'=AB.K_{1-\alpha'}=1.K_{1-\alpha'}=K_{1-\alpha'}.$$

Înlocuind suprafețele din egalitatea precedentă prin valoarea lor avem:

$$\frac{1}{2}.1.1.K_{\alpha'+\alpha''}=\frac{1}{2}.1.K_{1-\alpha''}.K_{\alpha'}+\frac{1}{2}.1.K_{1-\alpha'}.K_{\alpha''},\ \text{c.c.e.d.d.}$$

Se vede de aci că această relațiune se poate citi direct de pe figură.

Dacă în această formulă facem $\alpha'=\alpha''=\alpha$ găsim:

$$16')\qquad K_{2\alpha}=2K_{\alpha}K_{1-\alpha}.$$

Aceasta iar se poate citi direct pe figură, căci exprimă că aria rombului ABCD $(1.1.K_{2\alpha})$ este dublul ariei triunghiului ABC $\left(\frac{1}{2}.2K_{1-\alpha}.K_{\alpha}\right)$.

Relațiunile (15′) și (15″) se pot citi de asemenea pe figură. Fie DM=h înălțimea rombului. Avem:

$$AMD=ABD-MBD$$

și înlocuind ariile prin valorile lor avem:

$$\frac{1}{2}.AD.DM.K_{1-2\alpha}=\frac{1}{2}AB.MD-\frac{1}{2}BD.MD.K_{\alpha},$$

căci unghiurile CAB și BDM sînt egale ca având laturile perpendiculare. Suprimînd MD și înlocuind avem:

$$K_{1-2\alpha}=1-2K_{\alpha}^{2}.$$

Aceiași egalitate între arii o putem exprima ast-fel:

$$ADM=ACN-MDCN$$

$$\frac{1}{2}.AM.MD=\frac{1}{2}AC.CN-DC\times MD$$

de unde supunînd MD și înlocuind:

$$K_{1-2\alpha}=2K_{1-\alpha}^{2}-1.$$

Formule pentru rezolvirea triunghiurilor.

Formulele pe cari le vom întrebuința la rezolvirea triunghiurilor sînt următoarele:

1) Relațiunea între unghiurile unui triunghiu:

$$17) \qquad \alpha+\alpha'+\alpha''=2.$$

2) Relațiunile date de teorema VI adică:

$$18) \qquad \frac{a}{K_\alpha}=\frac{a'}{K_{\alpha'}}=\frac{a''}{K_{\alpha''}}.$$

3) Dacă în formula (16) înlocuim pe $K_{1-\alpha}$ prin valoarea sa dedusă din ecuația (9), vom avea:

$$R_{0,5\alpha}=\sqrt{\frac{1-\frac{a'^2+a''^2-a^2}{2a'a''}}{1+\frac{a'^2+a''^2-a^2}{2a'a''}}}=\sqrt{\frac{a^2-(a'^2+a''^2-2a'a'')}{(a'^2+a''^2+2a'a'')-a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(a'-a'')^2}{(a'+a'')^2-a^2}}$$

sau:

$$R_{0,5\alpha}=\sqrt{\frac{(a-a'+a'')\,(a+a'-a'')}{(a'+a''+a)\,(a'+a''-a)}}.$$

Să însemnăm cu p semiperimetrul triunghiului. Vom avea:

$$2p=a+a'+a'',\quad 2(p-a)=a'+a''-a,\quad 2(p-a')=a''+a-a',$$
$$2(p-a'')=a+a'-a''.$$

Inlocuind aceste valori în formula precedentă, obținem în definitiv:

$$19) \qquad R_{0,5\alpha}=\sqrt{\frac{(p-a')\,(p-a'')}{p(p-a)}}.$$

Pentru unghiurile α' și α'' vom avea încă 2 formule analoage cu aceasta.

4) Formula 15) ne dă:

$$R_{0,5(\alpha'-\alpha'')}=\frac{R_{0,5\alpha'}-R_{0,5\alpha''}}{1+R_{0,5\alpha'}R_{0,5\alpha''}}.$$

Inlocuind aci pe $R_{0,5\alpha'}$ și $R_{0,5\alpha''}$ prin valorile lor deduse cu ajutorul formulei (19) obținem:

$$R_{0,5(\alpha'-\alpha'')}=\frac{\sqrt{\frac{(p-a)(p-a'')}{p(p-a')}}-\sqrt{\frac{(p-a)(p-a')}{p(p-a'')}}}{1+\sqrt{\frac{(p-a)(p-a'')}{p(p-a')}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-a')}{p(p-a'')}}}$$

$$=\sqrt{\frac{p-a}{p(p-a')(p-a'')}}\times\frac{(p-a'')-(p-a')}{1+\frac{p-a}{p}}.$$

$$R_{0,5(\alpha'-\alpha'')}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-a')(p-a'')}}\times\frac{a'-a''}{2p-a}=\frac{a'-a''}{a'+a''}\times\frac{1}{R_{0,5\alpha}}$$

de unde:

$$20)\qquad R_{0,5(\alpha'-\alpha'')}\cdot R_{0,5\alpha}=\frac{a'-a''}{a'+a''}.$$

Pentru diferențele $\alpha-\alpha'$, și $\alpha-\alpha''$ vom avea încă două formule analoage ca acestea.

Formulele (17), (18), (19), (20) sînt suficiente pentru a găsi laturile și unghiurile necunoscute ale unui triunghiu cînd cunoaștem unele din ele. Vom mai stabili cîte-va expresiuni ale suprafețelor.

5) Teorema V ne dă:

$$21)\qquad S=\frac{1}{2}a'a''K_{\alpha}.$$

6) Inlocuind pe a'' cu valoarea sa dedusă din (18) avem:

$$S=\frac{1}{2}\cdot a'.\frac{a'K_{\alpha''}}{K_{\alpha'}}\cdot K_{\alpha}=\frac{a'^2K_{\alpha}.K_{\alpha''}}{2K_{2-\alpha'}}$$

sau:

$$22)\qquad S=\frac{a'^2K_{\alpha}K_{\alpha''}}{2K_{\alpha+\alpha''}}.$$

7) Din formula (9) deducem:

$$a^2=a'^2+a''^2+2a'a''-2a'a''(1+K_{1-\alpha}),$$

de unde:

$$1+K_{1-\alpha}=\frac{(a'+a'')^2-a^2}{2a'a''}=\frac{(a'+a''+a)(a'+a''-a)}{2a'a''}$$

$$=\frac{2p(p-a)}{a'a''}.$$

sau avînd în vedere formula (21) deducem:

$$\frac{1+K_{1-\alpha}}{K_{\alpha}}=\frac{2}{a'a''K_{\alpha}}\cdot p(p-a)=\frac{p(p-a)}{S}.$$

De unde:

$$S=\frac{p(p-a)K_\alpha}{1+K_{1-\alpha}}=p(p-a)\sqrt{\frac{K_\alpha^2}{(1+K_{1-\alpha})^2}}=p(p-a)\sqrt{\frac{1-K_{1-\alpha}^2}{(1+K_{1-\alpha})^2}}.$$

Să înmulțim numărătorul și numitorul cu $1-K_{1-\alpha}$ și vom avea ținînd samă de formula (13).

$$S=p(p-a)\sqrt{\frac{(1-K_{1-\alpha})(1+K_{1-\alpha})}{(1+K_{1-\alpha})(1+K_{1-\alpha})}}$$

$$S=p(p-a)\sqrt{\frac{1-K_{1-\alpha}}{1+K_{1-\alpha}}},$$

și după formula (16) avem:

$$S=p(p-a)R_{0,5\alpha},$$

iar după formula (19) avem:

$$23)\quad S=p(p-a)\sqrt{\frac{(p-a')(p-a'')}{p(p-a)}}=\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}.$$

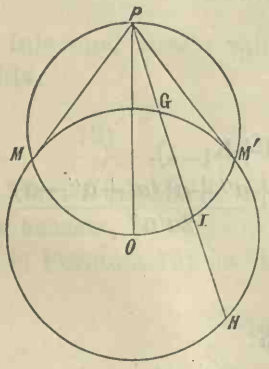
(Va urma) I. Ionescu.

CHESTIUNI DE MAXIMUM ȘI MINIMUM REZOLVITE GEOMETRICEȘTE. [1]

I. *Cînd produsul a două cantități e constant, suma lor e minimă cînd factorii sînt egali.*

Insemnăm cu x, y cele două cantități; avem dar:

$$xy=k^2.$$



Descriu din O ca centru o circonferență cu o rază arbitrară și pe un diametru al său consider un punct P exterior cercului dat, așa ca lungimea tangentei dusă din P la cercul O să fie egală cu k. Insemn cu M, M' punctele de contact a celor două tangente duse din P la cercul O. Consider o secantă PGH. Cele două cantități x, y sînt PG și PH, fie de exemplu:

[1] A se videa *Gazeta Matematică*, Anul I, pag. 75 și Anul II, pag. 17.

$$PG=x, \qquad PH=y.$$

Pe OP ca diametru descriu un cerc și fie I intersecția acestui cerc cu secanta PGH. Să vedem variația sumei $x+y$. Se vede de pe figură că I e mijlocul segmentului GH deci:

$$x+y=PG+PH=PG+PG+2GI=2(PG+GI)=2PI.$$

Insă după variația secantei PG în jurul punctului P, se vede că minimul lui PI e cînd ea ocupă posițiunile extreme PM, PM' adică cînd:

$$x=y. \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

II. *Cînd productul a două cantități x, y e constant, suma patratelor e minimă cînd factorii sînt egali.*

Ne servim de aceiași figură și aceleași notațiuni ca în teorema I. Avem dar:

$$x^2+y^2=\overline{PG}^2+(PG+2GI)^2=2\overline{PG}^2+4\overline{GI}^2+4PG.GI.$$
$$=2(\overline{PG}^2+\overline{GI}^2+2PG.GI)+2\overline{GI}^2=2\overline{PI}^2+2\overline{GI}^2.$$

Cînd secanta, învîrtindu-se în jurul punctului P, se apropie de poziținile limite PI și GI scad și în fine la limite:

$$GI=o, \qquad PI=k$$

și atunci:

$$x^2+y^2=2k^2$$

iar

$$x=y=k. \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Bogdan Ionescu.

Soluțiunile chestiunilor propuse la concursul inscris de absolvire a Școalei Normale de Institutori.

1) Chestiuni propuse în Iunie 1896.

a) *Să se împartă volumul unei sfere în 3 părți echivalente prin sfere concentrice.*

Fie r raza sferei date și x, y razele sferelor ce despart sfera dată în părți echivalente. Vom avea egalitățile:

$$\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi y^3-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi y^3,$$

sau:

$$x^3=y^3-x^3=r^3-y^3.$$

De aci deducem:

$$y^3=2x^3, \qquad \text{și} \qquad x^3=r^3-2x^3$$

sau: $$y=x\sqrt[3]{2}, \qquad \text{și} \qquad x=\frac{r}{\sqrt[3]{3}}=\frac{r\sqrt[3]{9}}{3}$$

și prin urmare:

$$x=\frac{r\sqrt[3]{9}}{3}, \qquad y=\frac{r\sqrt[3]{18}}{3}.$$

b) *Un aliagiu de aur și de argint cîntărește 400 grame; raportul între aur și argint este* $\frac{5}{3}$. *La acest aliagiu se mai adaogă 18 grame aur. Care este cantitatea de aur și de argint, și care este noul raport?*

Fie x, y cantitățile de aur și argint din aliagiu. Avem ecuațiunile:

$$x+y=400, \qquad \frac{x}{y}=\frac{5}{3}.$$

De aci deducem:

$$x=\frac{5}{3}y, \qquad y+\frac{5}{3}y=400,$$

sau: $$\frac{8}{3}y=400,$$

de unde: $$y=150.$$

Deci: $$x=400-140=250.$$

Aliagiul conține deci 150 grame argint și 250 grame aur. Adăogînd 18 grame aur, raportul devine:

$$\frac{250+18}{150}=\frac{268}{150}=\frac{134}{75}.$$

2) Chestiuni propuse în Septembre 1893.

a) *Să se împartă numărul 460 în 3 părți proporționale cu rădăcina pătrată a numerilor 2, 3, 5.*

Fie x, y, z cele 3 părți căutate ale numărului 460. Avem:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z}{\sqrt{5}}=\frac{x+y+z}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{460}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

De aci deducem:

$$x=\frac{460\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Pentru a face numitorul rațional înmulțim ambii termeni ai fracțiunei cu $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

Vom avea:

$$x=\frac{460\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{460\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2},$$

$$x=\frac{460\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{230\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{6}}.$$

Inmulțim ambii termeni ai fracțiunei cu $\sqrt{6}$ avem:

$$x=\frac{230\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{6},$$

sau făcînd calculele:

$$x=\frac{230}{3}(3+\sqrt{6}-\sqrt{15}).$$

In acelaș mod găsim:

$$y=115(2+\sqrt{6}-\sqrt{10}),$$

$$z=\frac{115}{3}(2\sqrt{15}+3\sqrt{10}-5\sqrt{6}).$$

b) *Să se găsească suprafața totală a solidului format din un cilindru circular drept, găurit în interior, în care raza bazei mici e jumătate din raza bazei mari.*

Fie r raza cilindrului mic și $2r$ raza celui mare, I înălțimea comună a celor două cilindre. Suprafața totală se compune din 2 coroane circulare egale și din suprafețele laterale a două cilindre. Insemnăm deci cu S suprafața, vom avea:

$$S=2\pi(4r^2-r^2)+2\pi rI+4\pi rI,$$

sau:

$$S=6\pi r^2+6\pi rI=6\pi r(r+I).$$

Suprafața totală este egală deci cu intreitul suprafeței totale a cilindrului cel mic.

C. Țițirigă.

PROBLEME REZOLVITE

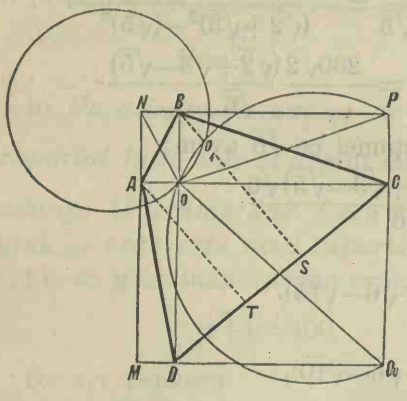
***Problema 135.** — *Să se construiască un pseudo-patrat* ABCD, *cunoscîndu-se laturile* AB, BC *și unghiul* BCD.

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (Bacalaureat, București).

Să presupunem problema resolvită. Fie ABCD pseudopătratul cerut. Prin A și C ducem diagonalei BD paralelele MN și PQ; prin B și D ducem diagonalei AC paralelele NP și MQ.

Formăm astfel patratul MNPQ. Fie O punctul de întîlnire al diagonalelor AC, BD ale pseudopătratului. Unim O cu N, P, Q.



Avem imediat pe figură:

$$\widehat{POQ}=\widehat{BCD},$$
$$ON=AB,$$
$$OP=BC.$$

Aceasta fiind stabilite, să construim o figură asemenea. Pentru aceasta, descriem pe latura $P'Q'$ a unui pătrat oare-care $M'N'P'Q'$, din partea laturei $M'N'$, un segment capabil de unghiul cunoscut $\widehat{POQ}=\widehat{BCD}$. Descriem apoi circonferența,—locul punctelor ale căror distanțe la punctele N' și P' sînt în raportul cunoscut $\frac{ON}{OP}=\frac{AB}{BC}$. Punctul O' de întîlnire al acestei circonferințe cu segmentul capabil de $\widehat{BCD}$ este punctul de întîlnire al diagonalelor pseudopătratului $A'B'C'D'$, ale căror vîrfuri se obțin ducînd prin O paralele dreptelor $M'N'$ și $N'P'$.

Asemănarea evidentă a pseudopătratelor $A'B'C'D'$ și ABCD permite construcțiunea acestui din urmă cînd cel d'întăi este construit.

Avem două soluțiuni, una singură, sau nici una, după cum segmentul de circonferință și circonferența descrise pentru obținerea punctului O' se taie, sînt tangente, sau nu au nici un punct comun.

Pseudopătratul este convex, sau concav, după cum punctul O' este interior sau exterior pătratului $M'N'P'Q'$.

Problema se poate rezolvi mai ușor în modul următor: Presupunînd problema deslegată să coborîm din A și B perpendicularele BS, AT pe latura CD. Se știe că diagonalele AC, BD ale pseudopătratului sînt egale și perpendiculare. Astfel fiind, triunghiurile dreptunghii BDS, ACT sînt egale, ca avînd ipotenuzele AC, BD egale și unghiurile DBS, ACT egale, ca formate de la-

turi perpendiculare. Deci BS=CT. De aci rezultă următoarea construcțiune: Construim unghiul BCD egal cu unghiul dat și luăm BC egal cu latura dată; ducem BS perpendicular pe CD, luăm CT=BS și în T ridicăm o perpendiculară pe CD; vîrful A va fi la intersecția acestei drepte cu circonferența descrisă din B ca centru, cu raza BA cunoscută Vom avea două, una sau nici o soluțiune, după numărul intersecțiunilor acestor două linii.

I. I.

Problema 145. — *Se dă un cerc* O *și un punct* P *fix pe el; se unesc extremitățile* A *și* B *ale unui diametru mobil cu punctul* P. *Să se afle locul punctelor de intersecție ale secantelor* AP, BP *cu diametrul perpendicular pe* AB.

(Bogdan Ionescu.)

Soluție geometrică dată de D-nii A. Iliovici, (Student, Iași) *și G. Iliovici,* (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași).

Insemnăm cu M, M', N, punctele de intersecțiune ale diametrului perpendicular pe AB respectiv cu PA, PB și o dreaptă dusă prin P perpendicular pe PO. Observăm că $\overset{\frown}{PMM'}$ e complimentar cu $\overset{\frown}{OM'B}$ și deci egal cu $\overset{\frown}{OBM'}$ sau cu $\overset{\frown}{OPB}$; dar $\overset{\frown}{OPB} = \overset{\frown}{MPN}$ ca avînd laturile respectiv perpendiculare, deci $\overset{\frown}{MPN} = \overset{\frown}{PMN}$, adică MN=PN. Tot asemenea $\overset{\frown}{NPM'}$ e complimentar cu $\overset{\frown}{MPN}$ și deci egal cu $\overset{\frown}{NM'P}$, căci triunghiul PMM' e dreptunghic, deci NM'=PN=NM. Locul punctelor M, M' este deci *o strofoidă dreaptă*, cu punctul P *punct dublu* și cu asimptota perpendiculară pe OP, la o distanță de P cît raza cercului dat, ear O e vîrful strofoidei.

Se observă că la o rotație complectă a dreptei AB, punctele M, M' descriu de două ori strofoida.

Generalizare dată de D-l I. Moscuna (București).

Fie PN tangenta dusă în P circonferenței; M, M', N intersecțiile dreptelor PA, PB, PN cu o dreaptă perpendiculară pe AB, dusă printr'un punct fix R.

Avem: $\measuredangle PMN = \measuredangle PBA$

ca avînd laturile perpendiculare una pe alta;

$\measuredangle MPN = \measuredangle PBA$

ca avînd aceiași măsură.

Deci: $\measuredangle PMN = \measuredangle MPN.$
Tot ast-fel $\measuredangle NPM' = \measuredangle PM'N.$
De aci rezultă:

$$NM = NP = NM'.$$

Punctele M, M' descriu deci o *strofoidă oblică* cu vîrful în R. Cînd punctul R se află pe diametrul ce trece prin P, strofoida este dreaptă.

D-l *Gr. N. Makarie* a dat o soluție analitică a acestei probleme.

***Problema 148.** — *Patru proprietari vecini: Vasilescu, Ștefănescu, Dumitrescu și Georgescu au fie-care cîte un loc patrat pentru casă, avînd fie-care loc cîte o latură la stradă. Fie-care din aceste patru persoane dă celor patru fii ai lor Ion, Petre, Nicolae și Constantin, cîte un loc patrat din locul lor, avînd la fațadă un unghiu comun. Toate locurile au un număr exact de metri în fațadă, dar diferite lungimi. Fie-cărui părinte i-a mai rămas 105 m.p. Se mai știe că suma perimetrelor locurilor lui Ștefănescu și Georgescu, este aceiași cu suma perimetrelor locurilor lui Ion și Nicolae, și pe de altă parte că suma perimetrelor locurilor lui Georgescu și Nicolae este cu 24 m. mai mare ca suma perimetrelor locurilor lui Vasilescu și Constantin. Se cere a se restabili numele complect al celor patru fii.*

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii I. Moscuna (București) și *Corneliu Ionescu* (Iași).

Fie x lungimea în metri a laturei locului patrat al unui părinte, și y lungimea în metri a laturei locului patrat al fiului respectiv. După enunciu avem:

(1) $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 105.$$

De aci rezultă că trebue să descompunem numărul 105 într'un produs de două numere întregi. Dar factorii primi ai lui 105 fiind 1, 3, 5, 7, divizorii acestui număr sînt pe lîngă aceștia și 15, 21, 35, 105. De aci reesă următoarele descompuneri, observînd că $x+y > x-y$:

$$x+y = 105, \quad 35, \quad 21, \quad 15,$$
$$x+y = \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7,$$

de unde prin adunare și scădere deducem:

x=53, 19, 13, 11,
y=52, 16, 8, 4.

Aceste numere întregi și diferite, conform enunciului, îndeplinind condiția (1) sînt lungimile laturilor celor opt locuri patrate.

Este ușor de văzut că perimetrele locurilor părinților sînt aceleași înainte și după împărțire, și prin urmare condițiunile date între perimetre le putem reduce la condițiuni între laturi, luînd în loc de perimetre a patra parte a acestora. Vom avea astfel următoarele condițiuni între laturi, socotind pentru părinți laturile înainte de împărțire: Lungimea în fațadă a locurilor lui Ștefănescu și Georgescu este aceiași cu a locurilor lui Ioan și Nicolae, și apoi lungimea în fațadă a locurilor lui Georgescu și Nicolae e cu $\frac{24}{4}$=6 m. mai mare ca a locurilor lui Vasilescu și Constantin.

Prima condițiune revine la a găsi două valori ale lui x, a căror sumă să fie egală cu suma a două valori ale lui y. Dar suma a două valori ale lui x și suma a două valori ale lui y nu poate fi de cît:

x: 53+19=72, 53+13=66, 53+11=64, 19+13=32, 19+11=30, 13+11=24
y: 52+16=68, 52+ 8=60, 52+ 4=56, 16+ 8=24, 16+ 4=20, 8+ 4=12

Se vede de aci că numai suma 24 îndeplinește condițiunea impusă. Prin urmare locurile de 13 și 11 metri latură nu pot fi de cît ale lui Ștefănescu și Georgescu, sau viceversa; iar locurile de 16 și 8 metri latură nu pot fi de cît ale lui Ion și Nicolae, sau viceversa. De aci rezultă că suma laturilor locurilor lui Georgescu și Nicolae nu poate fi de cît:

13+16=29, 11+16=27, 13+8=21, 11+8=19.

Prin urmare suma laturilor locurilor lui Vasilescu și Constantin, după condițiunea a doua, nu poate fi de cît una din aceste sume micșorată cu 6, adică unul din numerile:

23, 21, 15, 13.

Însă numărul 53 fiind mai mare ca fie-care din aceste patru numere, reese că locul de 53 metri de latură nu poate fi al lui Vasilescu, de oare-ce suma laturilor locurilor lui și al lui Nicolae ar trebui să fie cel mult 23. De altă parte Vasilescu nu poate avea locurile de 11 și 13 metri, căci acestea aparțin lui Ștefă-

nescu și Georgescu, sau viceversa. Deci *Vasilescu are locul de 19 metri latură.* Acești 19 metri sporiți cu numărul metrilor de latură ai locului lui Constantin, trebue să ne dea unul din numerile din șirul precedent. Nu putem lua numerile 16 și 8 căci acestea aparțin lui Ion și Nicolae, sau viceversa. Deci nu putem lua de cît 19+52, care dă o sumă mult mai mare ca 23, sau 19+4 care ne dă tocmai numărul 23. Deci *Constantin are locul de 4 metri latură.* Dar numărul 23 a fost obținut luînd numerile 13 și 16, adunîndu-le și scăzînd 6. Locul de 13 metri fiind al unui părinte, acesta nu poate fi de cît Georgescu, iar locul de 16 metri fiind al unui fiu, acesta nu poate fi de cît Nicolae, conform condițiunei a doua. Deci *Georgescu are locul de 13 metri latură,* iar *Nicolae are locul de 16 metri latură,* și prin urmare după condițiunea întăia *Ștefănescu are locul de 11 metri latură,* iar *Ion are locul de 8 metri latură.* Cum au mai rămas locurile de 53 și 52 metri și ca persoane Dumitrescu și Petre, rezultă că *Dumitrescu are locul de 53 metri latură,* iar *Petre are locul de 52 metri latură.* Dar am văzut mai sus că dacă părinții au locurile de 53, 19, 13 și 11 metri latură, fii lor au respectiv locurile de 52, 16, 8 și 4 metri. Prin urmare numele complecte al celor patru fii sînt:

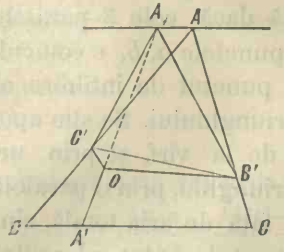
Dumitrescu Petre,
Vasilescu Nicolae,
Georgescu Ion,
Ștefănescu Constantin.

***Problema 149** (generalizată). — *Printr'un punct* O *al planului unui triunghiu oare-care* ABC, *se duc dreptele* OA', OB', OC' *egal înclinate pe laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC, A', B', C' *fiind intersecțiile cu aceste laturi. Unul din triunghiurile asemenea cu triunghiul* ABC, *construit pe* B'C' *ca latură omoloagă laturei* BC *a triunghiului* ABC, *are vîrful* A_1 *situat pe* A'O; *etc. Dacă* O *este mobil în plan, punctele* A_1, B_1, C_1 *descriu niște drepte fixe.* (G. Țițeica.)

Soluțiune și generalizare dată de D-l I. Moscuna.

In adevăr, fie A_1 al treilea vîrf al triunghiului asemenea cu triunghiul ABC, construit de aceiași parte cu punctul A (cazul figurei), pe B'C' ca latură omoloagă laturei BC.

Patrulaterul OB'AC' e inscriptibil, căci:



$$\widehat{OB'A} = \widehat{OC'B}$$

și cum: $\widehat{B'AC'} = \widehat{B'A_1C'}$,

circonferința circumscrisă trece prin A_1, deci: $\widehat{A_1OC'} = \widehat{A_1B'C'} = B = 180^0 - \widehat{A'OC'}$, ceea-ce arată că punctele A_1, O, A' sînt în linie dreaptă.

Dacă O e mobil în plan, A_1 descrie dreapta fixă AA_1 paralelă la BC căci:

$$\widehat{A_1AC'} = \widehat{A_1B'C'} = B.$$

Demonstrație analogă pentru cazul punctelor B_1, C_1 și pentru diferitele poziținni ale punctului O în raport cu ABC.

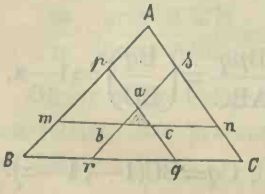
Notă.—S'a primit o bună soluție de la D-l *C. Popovici* (Iași) pentru cazul triunghiului echilateral.

***Problema 152.**— *Într'un triunghiu se duc paralele la laturi cari despart din triunghiu trei trapeze echivalente cu a (m:n) parte din aria triunghiului. Care e valoarea lui (m:n) pentru care cele trei paralele concură în același punct.*

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-l C. Popovici, (Student, Iași).

Suprafețele a două triunghiuri asemenea fiind proporționale cu patratul laturilor omoloage, rezultă că pentru a obține cele trei trapeze cerute e suficient a împărți laturile triunghiului în raportul de $(\sqrt{m}:\sqrt{n})$. Fie m, p, s, n, q, r punctele de diviziune. Ducem dreptele mn, pq, rs cari vor fi paralele cu laturile BC, AC și AB, și prin urmare sînt paralelele căutate. Punctele p și s împărțind laturile AB, AC în părți proporționale, rezultă că linia dreaptă ce ar uni punctele p și s ar fi paralelă cu BC. Figura $Apas$ este un paralelogram, ca având laturile opuse paralele. Deci dreptele Aa, ps se taie în mijlocul fie-căreia din ele. Deci Aa trece prin mijlocul lui ps, și prin urmare și prin mijlocul lui BC care e paralel cu ps. Rezultă de aci că punctul a se află pe mediana eșită din A. In



același mod se poate proba că punctele b, c se află pe medianele eșite din B și C. De aci rezultă imediat că dacă cele 3 paralele sînt concurente, sau cu alte cuvinte dacă punctele a, b, c coincid, punctul de coincidență nu poate fi de cît punctul de întîlnire al medianelor, adică centrul de greutate al triunghiului. Se știe apoi că medianele se taie la 2 treimi plecînd de la vîrf, și prin urmare ariile triunghiulare separate din un triunghiu, prin o paralelă la latură trecînd prin centrul de greutate, față de aria totală, sînt în raportul lui $2^2=4$ către $3^2=9$. Deci raportul căutat al ariilor trapezelor către aria triunghiului este (9—4): 9 sau 5:9.

Soluțiune dată de D-l A. Iliovici (Student, Iași).

Să găsim mai întăi aria triunghiului abc pentru o valoare oare-care alui $(m:n)$. Să însemnăm cu α acest raport. Vom avea prin construcție:

$$\frac{BCmn}{ABC}=\alpha,$$

deci:
$$\frac{Amn}{ABC}=\frac{ABC-BCmn}{ABC}=1-\alpha.$$

De asemenea:

$$\frac{Crs}{ABC}=1-\alpha, \quad \text{și} \quad \frac{Bpq}{ABC}=1-\alpha.$$

Avem apoi din cauza asemănărei triunghiurilor abc, ABC:

$$\frac{abc}{ABC}=\frac{\overline{bc}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Dar:
$$bc=mn-Br-Cq.$$

Avem apoi:

$$\frac{Amn}{ABC}=\left(\frac{mn}{BC}\right)^2=1-\alpha, \quad \frac{Crs}{ABC}=\left(\frac{Cr}{BC}\right)^2=1-\alpha, \quad \frac{Bpq}{ABC}=\left(\frac{Bq}{BC}\right)^2=1-\alpha.$$

De aci deducem:

$$mn=BC\sqrt{1-\alpha}, \quad Br=BC-Cr=BC(1-\sqrt{1-\alpha}), \quad Cq=BC(1-\sqrt{1-\alpha}).$$

Prin urmare:

$$bc=BC(3\sqrt{1-\alpha}-2).$$

Dacă deci însemnăm cu s aria triunghiului abc și cu S aria triunghiului ABC, avem:

$$\frac{s}{S}=\left(\frac{bc}{BC}\right)^2=(3\sqrt{1-\alpha}-2)^2$$

sau:
$$s=S(3\sqrt{1-\alpha}-2)^2.$$

Pentru ca dreptele mn, pq, rs să fie concurente trebue ca să avem $s=o$, cea ce necesită:

$$3\sqrt{1-\alpha}=2,$$

de unde:

$$\alpha=\frac{5}{9}.$$

Aceasta este valoarea căutată a raportului $(m:n)$. Prin urmare:

$$\frac{Amn}{ABC}=\frac{ABC-BmnC}{ABC}=1-\alpha=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

De aci rezultă că dreapta mn trece prin centrul de greutate G al triunghiului, căci el împarte mediana în raport de (2: 3). In acelaşi mod se deduce ca şi celelalte paralele pq şi rs trec prin G. Deci paralelele sînt concurente în centrul de greutate al triunghiului cînd $(m:n)=(5:9)$.

Soluţiune dată de D-l I. Moscuna (Bucureşti).

Un triunghiu oare-care dintr'un plan putînd fi considerat ca proiecţiunea unui triunghiu echilateral din spaţiu şi raporturile dintre suprafeţele de pe un plan, ca şi paralelismul dreptelor, păstrîndu-se în proiecţiune, ne putem mărgini, pentru găsirea raportului $(m:n)$, la consideraţiunea unui triunghiu echilateral. Fie deci triunghiul echilateral ABC; din cauza simetriei punctul de concurenţă al paralelelor din enunţ nu poate fi altul de cît centrul său O şi este chiar acest punct. Fie B'C' paralela la BC dusă prin O.

Avem:

$$\frac{m}{n}=\frac{\text{aria BCC'B'}}{\text{aria ABC}}=1-\frac{\text{aria AB'C'}}{\text{aria ABC}}=1-\frac{\overline{B'C'}^2}{\overline{BC}^2}=1-\frac{2^2}{3^2}=\frac{5}{9}.$$

Observaţie. Punctul de concurenţă al paralelelor în triunghiul oare-care, este proiecţiunea centrului O, adică punctul de întîlnire al medianelor.

***Problema 155.**— *Din vîrful unghiului drept al unui triunghiu dreptunghiu ducem bisectrita, mediana şi înălţimea. In ce caz prima din aceste linii este medie proporţională între celelalte două?* **(I. Ionescu.)**

Soluţiune geometrică dată de D-nii: A. Iliovici (Student, Iaşi); *C. N. Răileanu* (Iaşi) şi *C. Ţiţirigă* (Elev în Clasa VII a Şcoalei Fiilor de Militari din Craiova).

Fie ABC un triunghiu dreptunghiu în A. Ducem bisectriţa AB_1, înălţimea AI şi mediana AM. Avem după enunciu:

$$AB_1=\sqrt{AI\times AM},$$

de unde:

$$\overline{AB_1}^2=AI\times AM,$$

sau:

$$\frac{AB_1}{AI}=\frac{AM}{AB_1}.$$

E uşor de văzut pe figură că unghiurile IAB_1 şi MAB_1 sînt egale. In adevăr presupunînd că AB e cateta cea mai scurtă, avem:

$$\sphericalangle IAB_1=\sphericalangle BAB_1-\sphericalangle BAI=45^0-C=45-(90-B)=B-45^0.$$

$$\sphericalangle MAB_1=\sphericalangle MAB-\sphericalangle B_1AB=B-45^0.$$

Triunghiurile IAB_1 şi MAB_1 avînd deci două laturi proporţionale ale unui unghiu egal, sînt asemenea. Rezultă de aci că avem:

$$\sphericalangle AIB_1=\sphericalangle AB_1M,$$

$$\sphericalangle AB_1I=\sphericalangle AMB_1.$$

Insă aceste egalităţi nu pot fi satisfăcute de cît dacă punctele I, B_1 şi M coincid, adică dacă triunghiul dreptunghiu este isoscel.

Soluţiune algebrică dată de D-nii: Th. M. Vladimirescu (Rîmnicul-Vîlcei), *A. Iliovici* (Student, Iaşi), *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploeşti) şi *G. Iliovici* (Elev al Liceului Naţional din Iaşi).

Să însemnăm cu a ipotenuza şi cu b, c catetele. Avem:

$$AI=\frac{bc}{a},\quad AB_1=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c},\quad AM=\frac{a}{2}.$$

După enunciu va trebui deci să avem:

$$\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}=\frac{bc}{a}\cdot\frac{a}{2},$$

de unde:

$$(b+c)^2=4bc,$$

$$b^2+c^2+2bc-4bc=o,$$

sau:

$$(b-c)^2=o,$$

ceia ce ne dă:

$$b=c.$$

Triunghiul e deci isoscel.

***Problema 165.** — *Pe o dreaptă dată* AB *se ia un punct oare-care* C. *Din* C *ca centru cu* CB *ca rază se descrie o circonferență, iar din* A *se duce o tangentă* AD *la această circonferență al cărei punct de contact este* D. *Să cere să se afle maximul ariei triunghiului* ACD. (A. Iliovici.)

Soluție geometrică dată de D-l C. Popovici (Student, Iași).

Fie a lungimea dată a dreptei AB și E mijlocul segmentului AC. Aria triunghiului CDE fiind jumătate din aria triunghiului CDA, maximul ariei CDA va avea loc în același timp cu maximul ariei CDE. Observăm însă că CD=CB și ED=EA și prin urmare:

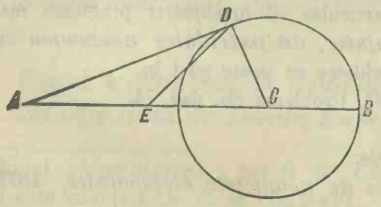
$$ED+EC+CD=AE+EC+CB=AB=\text{const.}$$

Perimetrul triunghiului CDE fiind deci constant, maximul ariei sale are loc cînd triunghiul este echilateral [1]), adică cînd:

$$CD=ED=EC=\frac{a}{3}.$$

Soluție dată de D-nii: Gh. Cica (Iași); *St. N. Corbeanu* (Turnu-Severin); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași); *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII a Liceului Traian din Turnu-Severin); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului Sf. Petru și Paul din Ploești); *C. Popovici* (Student, Iași); *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei) și *J. Wittner* (Elev în Clasa VII a Liceului Unirea din Focșani).

Insemnăm cu a lungimea dreptei AB și cu x raza necunoscută CD. Tangenta AD fiind medie proporțională între secanta AB și partea sa exterioară, avem:



$$AD=\sqrt{a(a-2x)},$$

iar aria triunghiului dreptunghiu ACD va fi deci:

$$S=\frac{1}{2}AD\times DC=\frac{1}{2}x\sqrt{a(a-2x)}$$

așa că maximul lui S depinde de maximul produsului

$$x\sqrt{a-2x},$$

sau de al patratului său:

[1]) Pentru demonstrația geometrică a acestei teoreme, a se videa *Rouché et de Comberousse*, Traité de Géométrie, première partie, sixième édition, pag. 347 și 348.

$$x^2(a-2x)=\frac{1}{4}(2x)^2(a-2x)$$

Suma $2x+a-2x=a$ fiind constantă, maximul produsului are loc cînd:

$$\frac{2x}{2}=\frac{a-2x}{1},$$

de unde: $$x=\frac{a}{3}.$$

Iar valoarea maximă a ariei triunghiului ACD este:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{18}.$$

Notă. D-nii *G. Dragu*, *I. Drăgănescu*, *G. Giuşcă* şi *C. Ţiţirigă* au rezolvit problema cu ajutorul derivatelor, iar D-nii *Al. Em. Melencovici* şi *G. Penescu* cu ajutorul coeficienţilor nedeterminaţi.

***Problema 169.** — *Să se construiască un pătrat ale cărui trei laturi să treacă prin trei puncte date echidistante unul de altul, şi nu în linie dreaptă, iar a patra latură să treacă printr'un punct dat* [1]). **(Gr. N. Makarie.)**

Soluţiune. Fie A, B, C cele trei puncte date echidistante, şi D

[1]) Această chestiune (169) se găseşte propusă şi rezolvită în următoarele uvrage:

Iulius Petersen, *Contructions géométriques*, pag. 46. No. 236.

Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales a lui *Bourget*, 1880, problema 159, pag. 65 şi 478.

C. Laisant, *Recueil de problèmes de géométrie*, pag. 121, problema 505 (numai enunciul).

In fine această problemă este un caz particular al următoarei probleme mai generale: *Să se circumscrie unui patrulater, un patrulater asemenea cu un patrulater dat.* Soluţiunea acestei probleme se poate găsi în:

G. Ritt, *Problèmes de géométrie*, 1887, Problema 86, pag. 74.

Amiot, *Problèmes de géométrie.*

P. Serret, *Des méthodes en géométrie.*

E. Catalan, *Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire*, 1879, problema IV, pag. 185.

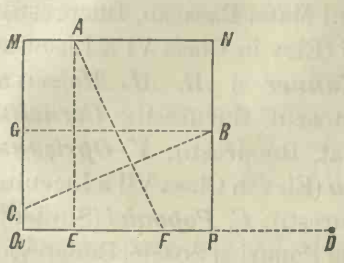
Rouché et de Comberousse, *Traité de géométrie*, première partie, sixième édition, pag. 250 şi 251.

Cu această ocazie facem cunoscut că, pe lîngă cele deja specificate mai înainte, următoarele probleme propuse în *Gazeta Matematică*, nu sînt originale, ci sînt luate de propunătorii lor din diferite uvraje:

Problema 54 propusă de *D. Negulescu.*

Problema 81 propusă de *I. P. Rădulescu*, se află în *Journal de Mathéma-*

al patrulea punct, iar MNPQ pătratul căutat. Din A scoborîm dreptele AE, AF perpendiculare pe PQ și BC. Ducem în fine BC perpendicular pe MQ. Triunghiurile dreptunghice BCG, AEF sînt egale. In adevăr unghiurile ascuțite GBC și EAF sînt egale ca avînd laturile perpendiculare, iar laturile BG, AE sînt egale ca fiind egale cu laturile patratului. Deci: AF=BC. De aci rezultă următoarea construcțiune. Pe dreapta ce unește punctele BC scoborîm o perpendiculară din A, pe care luăm AF=BC. Ducem prin punctele D și F o dreaptă pe care scoborîm prin B și C două perpendiculare, iar prin A ducem o paralelă cu DF. Din această construcțiune se vede că nu e necesar ca puntul A să fie la vîrful triunghiului echilateral construit pe CBA, ci el poate fi ori unde. Construcțiunea se poate face luînd de bază o altă dreaptă în locul lui BC.



Au resolvit această problemă (în cazul cînd punctele A, B, C, D sînt ori care) D-nii *Th. M. Vladimirescu* și *C. Popovici.*

***Problema 173.** — *Dintr'un punct* M *situat pe latura* BC *a unui triunghiu* ABC *ducem perpendicularele* MQ, MR *pe laturile* AB, AC. *Să se demonstreze că triunghiul* ABC *este isoscel, dacă avem* BQ=CR *și dacă punctul* M *coincide cu piciorul medianei, bisectriței sau a înălțimei scoborîte din* A.

(V. Cristescu.)

Cazul 1. *Punctul* M *coincide cu piciorul medianei.*

Soluție dată de D-rele Eufrosina Gorgos, Lucia Manoilescu,

tiques élémentaires a lui *G. de Longchamps*, 1889, problema 291, pag. 238; și este enunțată în *C. A. Laisant*, *Recueil de problèmes d'arithmétique, algèbre et trigonometrie*, problema 88, pag. 31.

Problema 137 propusă de *Tr. Ripianu*, se află în *Georges Maupin*, *Questions d'Algèbre*, Paris 1895, pag. 80.

De asemenea articolul lui *A. Jijie: O propietate a cercurilor ortogonale*, publicat în *Gazeta Matematică*, Anul I, pag. 192, se află în *E. Catalan*, *Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire*, problema LXVI, pag. 247.

(Nota Redacției.)

Olga Popovici și *Natalia Șandru* (Eleve ale Liceului Nou de Domnișoare din Iași) și D-nii: *Solomon L. Ascher* (Elev în Clasa VI, Liceul Mihai Viteazul, București); *M. D. Balasan* (Elev în Clasa VI a Liceului Național, Iași): *G. Giușcă* (Student, București); *L. Hermann* (Elev în Clasa VI, Liceul Matei Basarab, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași); *Al. Ionescu, I. Kanner* și *Al. M. Moisescu* (Elevi în Clasa V a Liceului Mihai Viteazul, București); *Corneliu Ionescu* (Iași); *I. Moscuna* (Bacalaureat, București); *V. Oprișanu* (Bacalaureat, Ploești); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești); *G. Penescu* (Student, București); *C. Popovici* (Student, Iași) *C. S. Stănulescu*; (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, București); *C. Țițirigă* (Elev în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova); *C. Vintilă* (Elev în Clasa VI de la Liceul Matei Basarab, București); *Th. M. Vladimirescu; J. Wittner* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Focșani) și *I. Sichitiu* (Elev în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova).

Dacă M este piciorul medianei scoborîtă din A, triunghiurile dreptunghe MBQ, MCR sînt egale ca avînd ipotenuzele MB, MC egale și catetele BQ, CR egale; deci:

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C.$$

Cazul 2. *Punctul* M *coincide cu piciorul bisectriței.*

Soluție dată de D-nii: M. D. Balasan, L. Hermann, A. Iliovici, G. Iliovici, Al. Ionescu, Corneliu Ionescu, I. Kanner, I. Moscuna, V. Oprișanu, B. Paraschivescu, G. Penescu, C. Popovici, I. Sichitiu, C. S. Stănulescu, C. Țițirigă, C. Vintilă, Th. M. Vladimirescu și *J. Wittner.*

Dacă M este piciorul bisectriței, dreptele MQ MR sînt egale, căci ori-ce punct al bisectriței e egal depărtat de laturile unghiului. Triunghiurile dreptunghe MBQ, MCR sînt prin urmare egale, ca avînd catetele două cîte două egale; deci:

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C.$$

Cazul 3. *Punctul* M *coincide cu piciorul înălțimei.*

Soluție dată de D-nii: I. Moscuna, C. S. Stănulescu, Th. M. Vladimirescu, C. Popovici, B. Paraschivescu, A. Iliovici, G. Iliovici și *Al. Ionescu.*

Dacă M este piciorul înălțimei, triunghiurile dreptunghe AMB, AMC ne dau:

$$\overline{AM}^2 = AB \times AQ = AB(AB - BQ),$$
$$\overline{AM}^2 = AC \times AR = AC(AC - RC).$$

Din aceste două egalități deducem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC - RC}{AB - QB}$$

și aplicînd o teoremă a raporturilor egale, obținem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB + AC - RC}{AB + AC - QB} = 1.$$

Deci: $AB = AC$.

Observațiune *de D-l I. Moscuna.* Proprietatea este asemenea adevărată cînd punctul M coincide cu piciorul *simedianei* scoborîte din A.

In adevăr, fie A′ piciorul înălțimei scoborîte din A. Avem din asemănarea triunghiurilor dreptunghice formate:

$$\frac{A'B}{A'A} = \frac{BQ}{MQ} \quad \text{și} \quad \frac{A'A}{A'C} = \frac{MR}{CR}$$

de unde, prin înmulțire:

$$\frac{A'B}{A'A} = \frac{BQ}{MQ} \times \frac{MR}{CR} = \frac{MR}{MQ} = \frac{AC}{AB}.$$

Dacă $A'B > A'C$, rezultă din egalitatea rapoartelor extreme: $AC > AB$. Aceași ipoteză $A'B > A'C$ dă însă pe figură (oblice negal depărtate de piciorul perpendicularei): $AC < AB$, rezultate contradictorii. Deci $AB = AC$.

PROBLEME PROPUSE

*217. Se consideră un triunghiu ABC. Fie A′, B′, C′ punctele de contact ale cercului înscris cu BC, CA, AB; A″, B″, C″ punctele unde bisectriţele interioare ale triunghiului întîlnesc cercul circumscris. Să se demonstreze că dreptele A″A′, B″B′, C″C′ se întîlnesc în acelaşi punct. (G. Ţiţeica.)

*218. Intr'un triunghiu ABC, se ia pe latura BC de la B spre C lungimea $BA_1 = BA$ şi de la C spre B lungimea $CA_2 = CA$. Să se arăte că cercul care trece prin punctele A, A_1, A_2 e concentric cu cercul înscris în triunghiu. (N. Nicolescu.)

*219. Să se construească un pseudo-patrat ABCD, cunoscînd latura AB, diagonala BD și unghiul laturilor opuse AB, CD.

(I. IONESCU.)

*220. Pe o rază a unei circonferențe ca diametru se descrie o altă circonferință; pe raza acestei a doua circonferențe ca diametru se descrie o altă circonferință, și așa mai departe pînă ce descrim n circonferențe. Se întreabă de cîte ori e mai mare suma suprafețelor cercurilor, de cît suma suprafețelor spațiurilor în formă de semi-lună dintre cercuri? (J. WITTNER.)

221. O dreaptă ce se învîrtește în jurul unui punct fix, taie laturile unui unghiu dat 0 în punctele A și B. Se cere locul intersecției dreptelor duse prin A și B și care fac același unghiu α cu laturile unghiului 0. (BOGDAN IONESCU.)

*222. Pe suprafața unei sfere date se descriu 6 cercuri mici egale, tangente între ele patru cîte patru. Să se afle în funcție de raza sferei, suprafața și volumul corpului ce se obține rîdicînd segmentele sferice determinate de planurile cercurilor.

(C. ȚIȚIRIGĂ.)

*223. Fie $AA'=I$. $BB'=I'$, $CC'=I''$ înălțimile unui triunghiu ABC; a', b', c' distanțele HA, HB, HC; a'', b'', c'' distanțele HA', HB', HC' (H fiind punctul de întîlnire al înălțimilor); a, b, c laturile triunghiului. Să se demonstreze relațiunile:

$$I'I''(2a''-a')+I''I(2b''-b')+II'(2c''-c')=o,$$

$$I'I''(a'b'cI-a''abc)+I''I(b'c'aI'-b''abc)+II'(c'a'bI''-c''abc)=o$$

(CORNELIU IONESCU.)

*224. Să se demonstreze că ecuația:

$$x^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)x+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2=o,$$

are rădăcinile sale totdeauna reale, ori care ar fi numerile a, b, c, d.

(TH. M. VLADIMIRESCU.)

*225. Pe o dreaptă dată se iau două puncte fixe A, B. Prin B se duce o dreaptă mobilă pe care se iau punctele C, D așezate la distanțe invariabile de punctul B. Să cere să se afle locul punctului de întîlnire al medianelor triunghiului ACD, cînd dreapta mobilă CDB se mișcă în jurul punctului B. (VICTOR IONESCU.)

UN NOU METOD PENTRU STUDIUL TRIGONOMETRIEI PLANE.

(Urmare)

Calculul coeficienților cîtor-va unghiuri. Table trigonometrice.

In cele ce urmează vom arăta cum putem găsi coeficienții unor unghiuri și a arăta posibilitatea calculului unei table pentru coeficienții diferitelor unghiuri.

In egalitatea (13) să presupunem $\alpha=0,5$. Vom găsi:

$$K_{0,5}^2+K_{0,5}^2=2K_{0,5}^2=1,$$

de unde:
$$K_{0,5}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0,707.....$$

Apoi:
$$R_{0,5}=\frac{K_{0,5}}{K_{1-0,5}}=1.$$

Aplicînd formulele (15), (15') și (16) vom găsi coeficienții unghiurilor 0,25, 0,125,....

In egalitatea (16') să facem $\alpha=\frac{1}{3}$. Vom găsi:

$$K_{\frac{2}{3}}=2K_{\frac{1}{3}}.K_{1-\frac{1}{3}}=2K_{\frac{1}{3}}K_{\frac{2}{3}}.$$

de unde:
$$K_{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}=0,500.$$

Apoi formula (13) ne dă:

$$K_{\frac{2}{3}}^2=1-K_{\frac{1}{3}}^2=\frac{3}{4}$$

de unde:
$$K_{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866.....$$

Apoi:
$$R_{\frac{1}{3}}=\frac{K_{\frac{1}{3}}}{K_{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad R_{\frac{2}{3}}=\frac{K_{\frac{2}{3}}}{K_{\frac{1}{3}}}=\sqrt{3}.$$

De asemenea relațiunea (16') ne dă făcînd $\alpha=0,8$:

$$K_{0,8}=2K_{0,4}K_{0,6}=4K_{0,2}K_{0,8}K_{0,8},$$

de unde: (β)
$$K_{0,2}K_{0,6}=\frac{1}{4}.$$

Apoi putem observa că:

$$K_{0,6}-K_{0,2}=K_{1,4}-K_{0,2}=K_{0,8+0,6}-K_{0,8-0,6},$$

și după formulele (14) avem:

$$(\gamma)\quad K_{0,6}-K_{0,8}=K_{0,8}K_{0,4}+K_{0,2}K_{0,6}-K_{0,8}K_{0,4}+K_{0,2}K_{0,6}=2K_{0,6}K_{0,2}$$
$$=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Ridicînd la patrat această egalitate și adunînd de 4 ori egalitatea (β) vom găsi:

$$K_{0,6}^2+K_{0,2}^2-2K_{0,6}K_{0,2}+4K_{0,6}K_{0,2}=(K_{0,6}+K_{0,2})^2=\frac{1}{4}+4.\frac{1}{4}=\frac{5}{4},$$

de unde: $(\delta)\qquad K_{0,6}+K_{0,2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$

Adunînd și scăzînd (γ) cu (δ) obținem:

$$K_{0,6}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad K_{0,2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Din acești coeficienți putem găsi coeficientul lui: $0,3=\frac{1}{2}.0,6$; $0,1=\frac{1}{2}.0,2$; $0,7=0,6+0,1$; $0,9=0,8+0,1$. Aceste rezultate sînt date în tabloul următor. In acest tablou în ultimele 2 coloane s'a pus și logaritmii coeficienților și raporturilor, căci după cum vom arăta, mai toate calculele vom căuta a le face prin logaritmi.

α	K_α	R_α	$\log K_\alpha$	$\log R_\alpha$
0,0	0,0000	0,0000	– infinit	– infinit
0,1	0,1564	0,1584	$\bar{1}$,19433	$\bar{1}$,19971
0,2	0,3090	0,3249	$\bar{1}$,48998	$\bar{1}$,51178
0,3	0,4540	0,5095	$\bar{1}$,65705	$\bar{1}$,70717
0,4	0,5878	0,7265	$\bar{1}$,76922	$\bar{1}$,86126
0,5	0,7071	1,0000	$\bar{1}$,84949	0,00000
0,6	0,8090	1,3764	$\bar{1}$,90796	0,13874
0,7	0,8910	1,9626	$\bar{1}$,94988	0,29283
0,8	0,9511	3,078	$\bar{1}$,97821	0,48822
0,9	0,9877	6,314	$\bar{1}$,99462	0,80029
1,0	1,0000	infinit	0,00000	infinit

Cunoscînd aceste valori, putem găsi alte unghiuri și anume acele obținute divizîndu-le succesiv prin 2, pănă ajungem la unghiuri ori cît de mici am voi. Apoi mai găsim alți coeficienți, servindu-ne de

formulele ce dau coeficientul sumei sau diferenței a două unghiuri. Pentru unghiurile pe cari nu le am obține ast-fel, am interpola între altele apropiate.

Se vede dar posibilitatea construirei unei tabele trigonometrice care să ne dea coeficientul K și raportul R pentru toate unghiurile.

Calculul însă pe această cale ar fi prea lung, și de aceia nici nu se procede ast-fel. In studiul matematicelor superioare se dau mijloace de a calcula repede coeficientul K, pe R precum și logaritmii lor.

In exemplele de rezolvire ce vom trata, ne vom servi de tabelele trigonometrice centezimale ale lui *Sanguet*. E de o observat însă că notațiunile întrebuințate de noi, diferă de cele întrebuințate în tablă și anume:

In loc de	K_α	găsim	în	tabele		$\sin\alpha$
» » »	$K_{1-\alpha}$	»	»	»		$\cos\alpha$
» » »	R_α	»	»	»		$\operatorname{tg}\alpha$
» » »	$\frac{1}{K_\alpha}$	»	»	»		$\operatorname{cosec}\alpha$
» » »	$\frac{1}{K_{1-\alpha}}$	»	»	»		$\sec\alpha$
» » »	$\frac{1}{R_\alpha}$	»	»	»		$\operatorname{cotg}\alpha$

Apoi în loc de a se lua ca unitate unghiul drept, este luat ca unitate gradul centezimal.

Instrucțiunile ce preced tablele indicate, sînt suficiente pentru a putea întrebuința cu succes calculul trigonometric centezimal.

Dacă ni s'ar da, sau s'ar cere, rezultatele în sistemul sexagezimal, vom transforma datele sexagezimale în centezimale, și rezultatul centezimal în sexagezimal după metodul indicat.

Să arătăm acum cum se construește raportorul dreptunghiular. Fie OA=1. Atunci după teorema (11) distanța $Ai = 1 \times R_\alpha = R_\alpha$ ne va da raportul unghiului α. Deci nu vom avea de cît a lua pe AB lungimi proporționale cu raportul unghiurilor de la 0 la 0.5. Pe laturea BI am repeta diviziunile de la B la A și apoi pe porțiunea ICDO aceleași diviziuni în mod simetric.

(Va urma) **I. Ionescu.**

FORMULE ALGEBRICE DEMONSTRATE GEOMETRICEȘTE.

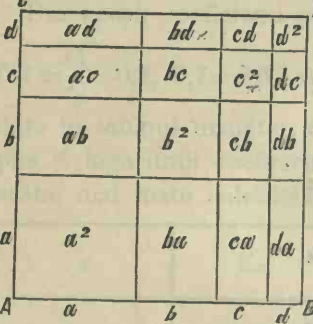
GEOMETRIA PLANĂ.

I. $(a+b+c+ \ldots\ldots +n)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$

In unul din numerile anterioare ale *„Gazetei Matematice“* s'a tratat geometricește cazul patratului unei sume de două cțantități. Iată cum se poate trata cazul patratului unei sume de m cantități, m fiind ori-care. Voiu demonstra geometricește formula pentru patru cantități a, b, c, d; procedeul de urmat pentru generalizarea formulei este identic acelaș. Consider dar formula:

$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$

Consider un patrat ABCD a cărui latură să fie cît $(a+b+c+d)$.



Impart pe AB în segmente cît a, b, c, d începînd de la A la B și succedînd unul altuia, iar prin punctele de diviziune duc drepte paralele cu CD; obțin o serie de dreptunghiuri cu aceiași înălțime verticală CD, și avînd ca baze orizontale respectiv a, b, c, d; le voi numi pentru prescurtarea vorbirei coloanele a, b, c, d. Fac acelaș lucru pentru AC; îl împart în segmente cît a, b, c, d începînd de la A la C și ducînd prin punctele de diviziune paralele la AB obțin o serie de dreptunghiuri pe care le voi numi pentru prescurtare liniele respectiv a, b, c, d.

Din intersecția unei linii cu o coloană de acelaș nume (a de exemplu) se naște un patrat (a^2) de acelaș nume, și fiind-că avem atîtea linii cîte coloane, avem atîtea patrate cîte linii sau coloane, adică:

$$a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Din intersecția coloanei a cu fie-care din cele-lalte linii afară a, se nasc dreptunghiurile:

$$ab+ac+ad;$$

dar din intersecțiele liniei a cu fie-care din coloanele b, c, d se nasc încă o dată aceleași dreptunghiuri, ceea ce face:

$$2(ab+ac+ad).$$

Din intersecția coloanei b cu fie-care din cele-lalte linii afară de

a și b (de oare-ce pe aceste două intersecții ba, b^2 le-am scos) se nasc dreptunghiurile:

$$bc+bd;$$

dar din intersecțiele liniei b cu fie-care din coloanele c, d se mai naște dreptunghiul:

cb și db, deci în total

$$2(bc+bd).$$

In fine din intersecția coloanei c cu linia d și a coloanei d cu linia c se obține:

$$2cd.$$

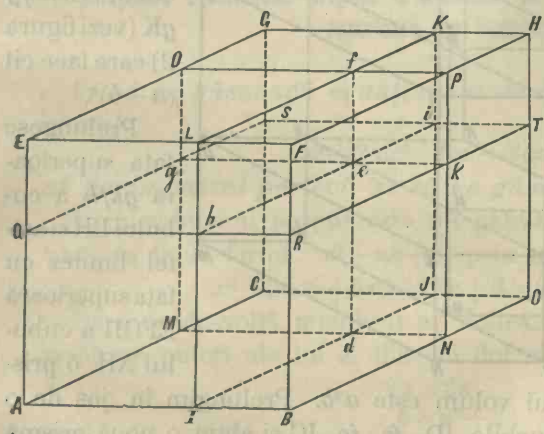
Făcînd suma intersecțiunilor aflate găsim:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

GEOMETRIA ÎN SPAȚIU.

I. $$(a+b)^3=a^3+b^3+3(a^2b+b^2a).$$

Consider un cub a cărui latură să fie cît $a+b$ fie ABCDEFGH.



Împart AB în segmente cît a, b începînd succesiv de la A la B și prin punctul de diviziune duc un plan paralel cu fețele laterale, ale cubului fie IJKL. Asemenea fac și pentru AC și AE, primul segment fiind a și obțin planele respective MNPO și QRTS. Prin intersecțiunile acestor trei planuri atît între ele cît și cu fețele cubului obțin mai multe cuburi și prisme, pe cari le voi insuma. In stînga planului IJKL de esemplu am următoarele volume:

cubul AIdM$gehQ$ (vedi figura I) care face cît a^3,

prisma Q$gehLEOf=a^2b$,

prisma dMgeiJCS$=a^2b$,

prisma gefOGSiK$=b^2a$;

la dreapta planului IJKL am de asemenea:

cubul KHT*iek*P$f=b^3$,
prisma dN*kei*JDT$=b^2a$,
prisma LhRFP*kef*$=b^2a$ și în fine
prisma hRBI*dek*N$=a^2b$.

Făcînd suma acestor volume conținute în cubul $(a+b)^3$ am:

$$a^3+b^3+3b^2a+3a^2b,$$

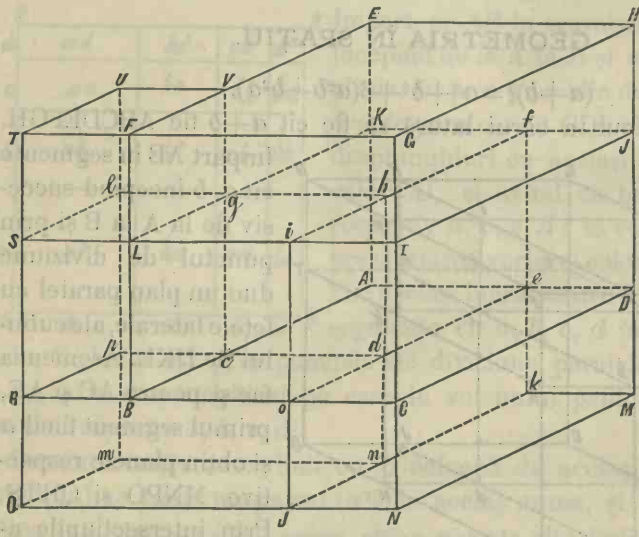
ceia ce demonstră formula.

II. $$(a-b)^3=a^3-b^3+3b^2a-3a^2b.$$

A demonstra formula aceasta revine a demonstra pe următoarea:

(1) $$(a-b)^3+b^3+3a^2b=a^3+3ab^2.$$

Consider un cub ABCDEFGH a cărui latură să fie cît a. In col-



țul A formez un cub a cărui latură să fie cît $(a-b)$, și obțin cubul A$cdefg$ gK (vezi figura 2) care face cît $(a-b)^3$.

Prelungesc fața superioară $gkfh$ a cubului BH și astfel limitez cu fața superioară EFGH a cubului AH, o prismă IJKLFEHG, al cărui volum este a^2b. Prelungim în jos de o lungime egală cu b muchile JD, fe, io, IC și abțin o nouă prismă iIJfKMNj al cărui volum este cît a^2b.

Prelungesc în stînga de o lungime egală cu a muchile Nj și Co și obțin punctele Q și R asemenea și pentru muchea Ii și obțin punctul S; iar muchile dc, hg le prelungesc de lungimi egale cu b și obțin punctele p și l, apoi prin n duc în același sens o paralelă la NQ și o prelungesc de o lungime cît a și așa obțin o nouă prismă $njQml$Sih, al cărui volum este tot a^2b. In fine pre-

lungind muchile RS, *pl*, *cg*, de lungimi egale cu b obțin cubul L*g*VFTU*l*S cu volumul b^3

Considerînd volumele enumerate avem o sumă de volume, cari fac cît membrul întîi al egalității (1) adică:

$$(a-b)^3+b^3+3a^2b.$$

Dar suma acestor volume se compune din următoarele volume:

Cubul ABCDEFG al cărui volum este a^3,

prisma *j*NM*k*eDC*a* cu volumul cît b^2a,

prisma *jnm*QR*pdo* cu volumul b^2a, și în fine

prisma RBcpUVFT cu același volum b^2a.

Prin urmare suma acestor volume care este:

$$a^3+3b^2a,$$

este tocmai membrul al doilea al egalității (1), lucru care demonstră formula propusă.

Bogdan Ionescu.

Soluțiunea chestiunelor propuse la examenul de admitere în Școala Normală superioară din București.

1) *Să se găsească ecuațiunele de condițiie pentru ca polinomul:*

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d$$

să fie un patrat perfect, și să se găsească rădăcina patrată.

Daca polmonul propus este un patrat perfect, rădăcina lui patrată va fi de forma: $x^2+\alpha x+\beta$; prin urmare va trebui să avem:

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d=(x^2+\alpha x+\beta)^2.$$

Daca se desvoltă membrul al doilea, și se egalează coeficienți acelorași puteri ale lui x, din cei doi membri, avem:

$$\begin{aligned} 2a&=2\alpha \\ b&=\alpha^2+2\beta \\ 2c&=2\alpha\beta \\ d&=\beta^2. \end{aligned}$$

Adică 4 ecuațiuni numai cu două necunoscute α și β, prin urmare cei 4 coeficienți ai polinomului dat, vor trebui să satisfacă două relațiuni de condițiie, care se vor obține eliminînd, între relațiunile de mai sus pe α și β; aceste relațiuni de condițiie sînt:

$$b=a^2+\frac{2c}{a}$$

$$d=\frac{c^2}{a^2}.$$

In cazul cînd ele vor fi împlinite, polinomul propus va fi rădăcina patrată a expresiunii:

$$x^2+ax+\frac{c}{a}.$$

2) *Să se studieze natura rădăcinelor ecuațiuni:*

$$3x^2+2ax+a=o$$

cînd a variază între $-\infty$ *și* $+\infty$.

Rezolvind ecuațiunea propusă în raport cu x, avem:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a(a-3)}}{3}$$

Prin urmare cînd a variază de la $-\infty$ pînă la o ecuațiunea propusă va avea două rădăcini reale, inegale și de semne contrarii, iar cea mai mare în valoare absolută este pozitivă.

Pentru $a=o$ ecuația are 2 rădăcini egale cu zero

» $o<a<3$, rădăcinele sînt imaginare

» $a=3$ rădăcini egale cu -1

» $a>3$ rădăcini reale, inegale, de același semn, negative.

3) *Apotema unui decagon regulat, convex, este egală cu* $2^m,40$. *Să se calculeze latura decagonului și raza cercului circumscris.*

Apotema decagonului, în funcțiune de rază, este dată prin formula:

$$a=r\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

de unde:

$$r=a\frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5}.$$

Dacă se calculează rădăcina patrată a lui 5 cu 4 zecimale esacte se găsește:

$$\frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5}=1.05$$

cu o eroare *în plus* mai mică de 0,01 prin urmare vom avea:

$$r=2^m,40\times1,05=2^m.52$$

cu o eroare *în plus* mai mică de cît 0,024

latura decagonului va fi:

$$d=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)=1^{m}.56$$

aproximația fiind aceiași ca mai sus.

4) *Dîndu-se:*

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Să se calculeze: $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Avem: $$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pe de altă parte:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}},\quad \cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}.$$

Înaintea radicalelor nu trebue luat de cît semnul plus, căci:

$\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ și $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ sînt pozitive.

Făcînd calculele se găsește:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}.$$

C. Țițirigă.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 122.**— *Să se transforme expresiunea:*

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}$$

într'o alta calculabilă prin logaritmi. **(Gr. N. Makarie.)**

Soluție dată de D-l A. Buga (Profesor la Gimnaziul Superior din Cernăuți, Bucovina).

Observăm că:

$$1-\sqrt{5}=\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}} \qquad (1)$$

și prin urmare expresiunea dată se poate scrie:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6+3-\sqrt{5}+2\sqrt{6}.\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}}.$$

Numărătorul cantității de sub radical fiind un patrat complect, rezultă:

$$r=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$$

și ținînd samă de relațiunea (1) obținem:

$$r=\frac{2\sqrt{3}+1-\sqrt{5}}{4}$$

sau

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{(5-1)}. \qquad (2)$$

Se știe însă că:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sin 60; \qquad \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=\sin 18^0$$

și prin urmare relațiunea (2) devine:

$$r=\sin 60^0-\sin 18^0$$

sau transformînd diferența de sinuse în produs:

$$r=2\sin 21^0.\cos 39^0$$

expresiune calculabilă prin logaritmi.

Cu ajutorul logaritmilor obținem:

$$r=0.557008.$$

***Problema 151.** — *Să se demonstreze că dacă avem egalitățile:*

(1) $a+b+c=ab+bc+ca,$

(2) $a^2+b^2+c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$

avem asemenea:

(3) $a^n+b^n+c^n=a^nb^n+b^nc^n+c^na^n.$

(I. Moscuna.)

Soluțiune dată de D-l Th. M. Vladimirescu (Rîmnicul-Vîlcei); *C. Popovici* (Student, Iași); *A. Iliovici* (Student, Iași) și *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național din Iași).

Ridicînd la patrat egalitatea (1) și scăzînd egalitatea (2) obținem:

$$2(ab+bc+ca)=2(ab^2c+abc^2+a^2bc)=2abc(a+b+c).$$

Suprimînd factorul 2 și înlocuind pe $ab+bc+ca$ prin egalul său $a+b+c$ după egalitatea (1) avem:

$$a+b+c=abc(a+b+c),$$

sau:

$$(a+b+c)(1-abc)=o,$$

de unde:

(4) $\quad a+b+c=o,$ deci și: $ab+bc+ac=o,$

(5) $\quad abc=1.$

Din egalitățile (4) deducem:

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2=o,$$

ceea ce ne dă:

$$a=o, \quad b=o, \quad c=o.$$

Aceste valori satisfac în mod evident egalitatea 4).

Din egalitatea (5) deducem:

(6) $$bc=\frac{1}{a}.$$

Introducînd această valoare în egalitatea 1) obținem:

$$a+b+c=ab+ac+\frac{1}{a},$$

sau:

$$a^2+a(b+c)=a^2(b+c)+1,$$

$$a^2-1=a(a-1)(b+c),$$

$$(a-1)[(a+1)-a(b+c)]=o.$$

Această egalitate se desface în următoarele două:

(7) $$a=1.$$

(8) $$b+c=\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}.$$

Din (6) și (7) deducem:

$$bc=\frac{1}{1}=1,$$

(9) $$b=\frac{1}{c}.$$

Însă valorile date de egalitățile (7) și (9) satisfac egalitatea (3) căci avem:

$$1^n+\frac{1}{c^n}+c^n=1^n.\frac{1}{c^n}+\frac{1}{c^n}.c^n+c^n=\frac{1}{c^n}+1+c^n.$$

Din egalităţile (6) şi (8) care dau produsul şi suma cantităţilor b, c rezultă că b şi c sînt rădăcinile ecuaţiunei de gradul al doilea:

$$z^2-\left(1+\frac{1}{a}\right)z+\frac{1}{a}=o,$$

de unde:

$$z=\frac{1+\frac{1}{a}\pm\sqrt{1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a}}}{2}=\frac{1+\frac{1}{a}\pm\sqrt{1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}}{2},$$

sau:

$$z=\frac{\left(1+\frac{1}{a}\right)\pm\left(1-\frac{1}{a}\right)}{2}$$

şi prin urmare avem:

$$b=\frac{1+\frac{1}{a}+1-\frac{1}{a}}{2}=1,$$

$$c=\frac{1+\frac{1}{a}-1+\frac{1}{a}}{2}=\frac{1}{a},$$

sau invers:

$$b=\frac{1}{a},\quad c=1.$$

Dar e uşor de văzut, că ambele aceste serii de valori satisfac egalitatea (3), căci:

$$a^n+1^n+\frac{1}{a^n}=a^n.1^n+1^n.\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^n}.a^n,$$

şi:

$$a^n+\frac{1}{a^n}+1^n=a^n.\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^n}.1^n+1^n.a^n.$$

***Problema 156.** — *Să se calculeze valoarea determinantului:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & \ldots & \ldots & \ldots & n \end{vmatrix}$$

(Constanţa Pompilian.)

Soluţiune dată de D-nii T. M. Vladimirescu; G. Dragu (Sub-Locotenent în Regimentul I de Geniu); *A. Iliovici* (Student, Iaşi) şi *G. Iliovici* (Elev Liceul Naţional, Iaşi).

Insemnînd cu D_n valoarea determinantului propus, prin D_{n-1}, D_{n-2},... D_{n-p}.... D_2, valorile determinanților minori, obținuți suprimînd respectiv: prima linie și prima coloană, primele două linii și primele două coloane, și în general primele p linii și primele p coloane; daca scădem elementele coloanei a 2-a din elementele coloanei întîi, toate elementele acestei coloane, afară de primul care este -1, se anulează; și avem:

$$D_n = (-1)\, D_{n-1}$$

Procedînd cu D_{n-1} în mod analog ca cu D_n, se găsește:

$$D_{n-1} = (-1)\, D_{n-2}$$

deci: $$D_n = (-1)^2 D_{n-2}.$$

Continuînd mai departe aceleași reduceri avem:

$$D_n = (-1)^p D_{n-p} \qquad p < n$$

Pentru $p = n-1$

avem: $$D_n = (-1)^{n-1} D_1 = (-1)^{n-1} n.$$

Soluție dată de D-l B. Paraschivescu (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești).

Desvoltînd determinantul după elementele primei linii avem:

$$D_n = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 3 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & . & . & n \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 3 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & . & . & n \end{vmatrix}$$

Ceilalți minori avînd primele 2 coloane identice sînt nuli și prin urmare nu dau nici un termen în desvoltare. Cei doui determinanți de mai sus fiind identici avem:

$$D_n = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 3 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & . & . & n \end{vmatrix}$$

Desvoltînd și acest determinant după prima linie avem:

$$D_n = -2 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & . & . & n \\ 4 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & n \\ . & . & . & . & n \\ n & n & . & . & n \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & . & . & n \\ 4 & 4 & . & . & n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ n & n & . & . & n \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & . & . & n \\ 4 & 4 & 5 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & . & . & n \end{vmatrix}$$

Procedînd în acelaşi mod vom ajunge în cele din urmă la:

$$D_n = \pm \begin{vmatrix} n-1 & n \\ n & n \end{vmatrix} = \pm (n^2 - n - n^2) = \mp n.$$

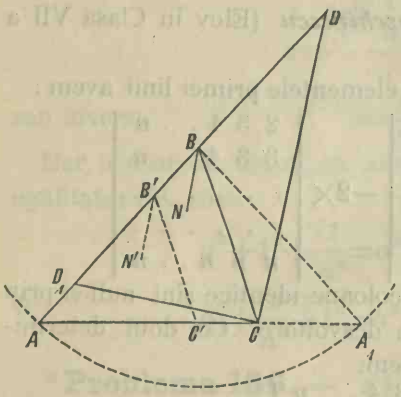
E uşor de văzut că trebue să luăm semnul + dacă n e impar şi semnul — dacă n e par. Putem deci scrie:

$$D_n = (-1)^{n-1} n.$$

***Problema 157.** — *Să se construească un triunghiu în care se cunoaşte un unghiu, raportul între suma şi diferenţa laturilor ce formează unghiul şi suma sau diferenţa între latura a treia şi una din laturile unghiului.* **(C. Popovici).**

Soluţie dată de D-nii: I. Moscuna (Bacalaureat, Bucureşti), *A. Iliovici* (Student, Iaşi) şi *T. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vilcei).

Să presupunem problema rezolvită. Fie A unghiul dat şi ABC triunghiul cerut; D un punct pe AB ast-fel ca:



$$AD = AB + BC = l \qquad (1)$$

şi fie:

$$\frac{AB + AC}{AB - AC} = \frac{m}{n}, \qquad (2)$$

în care $m > n$, m şi n exprimînd două drepte de lungimi date.

Din (2) deducem:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{m+n}{m-n};$$

obţinem deci direcţiunea B'C' a laturei BC, luînd pe laturile unghiului A lungimile AB' AC', proporţionale respectiv cu $m+n$ şi $m-n$.

Dreapta DC este însă paralelă cu bisectriţa interioară BN a unghiului B, sau cu bisectriţa interioară B'N' a unghiului B', căci din construcţie rezultă BD = BC şi prin urmare:

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD \quad \text{şi} \quad \sphericalangle AB'N' = \sphericalangle ABN = \sphericalangle ADC.$$

Punctul D şi direcţiunea dreptei DC fiind deci cunoscute, vîrful C al triunghiului este determinat; celalt vîrf B se obţine ducînd prin C dreapta CB, paralelă cu direcţiunea cunoscută C'B'.

In acest caz, problema este totdeauna posibilă şi are o singură soluţie.

Cînd în loc de suma BC+AB, se dă diferența

$$BC-AB=l,$$

se ia pe prelungirea laturei AB a unghiului A, sau pe însuși această latură, după cum $l \gtrless o$, un punct D_1 ast-fel ca $AD_1=l$ (în valoare absolută). Se duce apoi prin D_1 dreapta D_1C paralelă cu bisectrița exterioară a unghiului B', ceia ce determină vîrful C. Vîrful B se obține apoi ducînd prin C dreapta CB paralelă cu direcțiunea cunoscută C'B'.

Se poate videa ușor în acest caz că problema nu este totdeauna posibilă.

In adevăr fie A_1 punctul unde circonferența descrisă din B ca centru, cu BA ca rază, întîlnește pentru a doua oară latura AC, și să presupunem că unghiul dat A este ascuțit. Dacă $BC < AB$, adică dacă $l < o$, atunci punctul C trebue să cadă între punctele A și A_1, adică trebue să avem:

$$AC < AA_1$$

sau

$$AC < 2ABcosA$$

de unde

$$\frac{AC}{AB}=\frac{m-n}{m+n} < 2cosA.$$

Dacă însă $l \leqq o$, trebue să avem:

$$\frac{m-n}{m+n} \geqq 2cosA.$$

Prin urmare, dacă $\measuredangle A < 90^0$, trebue să avem:

$$\frac{m-n}{m+n} \gtrless 2cosA, \qquad \text{după cum } l \gtrless o.$$

Cînd însă $\measuredangle A \geq 90^0$, prin un raționament analog cu cel de sus, se poate videa, că problema nu e posibilă de cît dacă:

$$l < o,$$

condițiune suficientă.

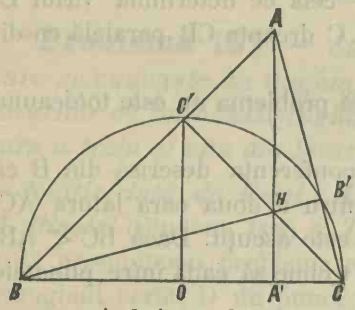
Cînd problema este posibilă, există o singură soluție.

D-nii *Marin Mataescu*, *I. Sichitiu* și *C. Țițirigă* au rezolvit problema prin calcul.

***Problema 160.** — *Fie* A'B'C', *picioarele înălțimilor unui triunghiu* ABC. *Să se demonstreze că dacă avem* A'B=B'C și A'C=C'B, *atunci dreptunghiul este echilateral.* **(I. Ionescu.)**

Soluțiune dată de D-nii: G. Dragu (București); *I. Moscuna* (București) și *C. Popovici* (Student, Iași).

Pe BC ca diametru descrim o circonferență, care va trece prin B′ și C′ din cauză că unghiurile BC′C și CB′B sînt drepte. Fie O centrul cercului, adică mijlocul dreptei BC. Zicem că punctul A′ coincide cu O. In adevăr daca am presupune punctul A′ între O și C, atunci avem evident:



1) $A'B > A'C$,

și înlocuind în această neegalitate pe A′B și A′C respectiv prin B′C și C′B, obținem:

2) $B'C > C'B$.

Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor HA′, HB și HC fiind o perpendiculară și două oblice neegal depărtate de piciorul perpendicularei, avem avînd în vedere neegalitatea 1).

3) $BH > CH$.

Triunghiul BHC avînd două laturi neegale, această neegalitate există și între unghiurile opuse:

4) $C'CB > B'BC$.

De aci rezultă că aceiași neegalitate există și între arcele ce măsoară aceste unghiuri, și chiar între coardele acestor arce:

5) $BC' > B'C$.

Neegalitățile 2) și 5) fiind contradictorii, rezultă că ipoteza de la care am plecat e falșă.

Prin urmare punctul A′ coencide cu O. Inălțimea AA′ a triunghiului, fiind astfel și mediană triunghiul ABC este isoscel. Apoi egalitatea $A'B = A'C$, atrage după sine și egalitatea $A'B = C'B$.

Triunghiurile dreptunghii AA′B, BC′C sînt egale ca avînd unghiul B comun, și catetele BA′, BC′ egali. Deci $AB = BC$, și prin urmare triunghiul ABC este echilateral.

Soluțiune dată de D-l Corneliu Ionescu (Iași).

Inălțimile întîlnindu-se în același punct, după teorema lui *Jean de Ceva* avem:

$$BA' \times CB' \times AC' = CA' \times BC' \times AB'.$$

După enunciu avem:

$$BC' = A'C, \quad \text{și} \quad CB' = A'B.$$

Inlocuind avem:

$$\overline{A'C}^2 \times AB' = \overline{A'B}^2 \times AC'.$$

Punctele B,B'C,C' fiind situate pe circonferența de diametru BC, avem:

$$AB \times AC' = AC \times AB'.$$

Inmulțind aceste două egalități avem:

$$AB \times \overline{A'C}^2 = AC \times \overline{A'B}^2.$$

Dar triunghiurile dreptunghii ABA' și ACA' ne dau,

$$\overline{A'B}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AA'}^2, \qquad \overline{A'C}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AA'}^2.$$

Inlocuind mai sus avem:

$$AC \times (\overline{AC}^2 - AA'^2) = AC(\overline{AB}^2 - \overline{AA'}^2),$$

sau: $$(AB \times \overline{AC}^2 - AC \times \overline{AB}^2) - (AA'^2 \times AB - \overline{AA'}^2 \times AC) = 0$$

$$AB \times AC(AC - AB) + \overline{AA'}^2(AC - AB) = 0$$

$$(AC - AB)(AB \times AC + \overline{AA'})^2 = 0,$$

Factorul al doilea neputînd fi nul urmează că trebue să avem:

$$AC = AB.$$

Triunghiul e deci isoscel. Restul ca la prima soluțiune.

Soluțiune dată de D-l Th. Vladimirescu (Rîmnicul-Vîlcei).

Triunghiurile HC'B, HB'C sînt evident asemenea și ne dau:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{C'B}{B'C'}$$

sau din causa relațiunilor din enunciu:

$$1) \qquad \frac{HB}{HC} = \frac{A'C}{A'B}.$$

Dar e ușor de văzut că această relațiune e imposibilă dacă A' nu e mijlocul lui BC. In adevăr dacă $A'C > A'B$, atunci și $HC < BH$, ca oblice neegal depărtate de piciorul perpendicularei. De aci rezultă că în egalitatea 1) primul raport e subtunitar iar al doilea subunitar. Relațiunea 1) e deci absurdă cît timp A' nu e la mijlocul lui BC. Triunghiul ABC e deci isoscel. Restul ca la soluțiunea întîia.

D-l *A. Iliovici* a dat o soluțiune trigonometrică acestei probleme.

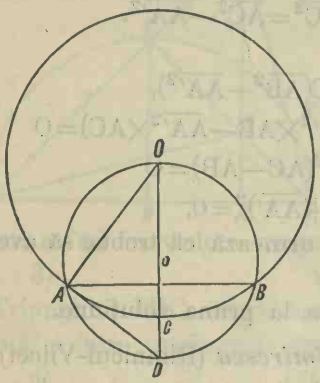
D-l *I. Moscuna* a arătat că această problemă e o consecință a problemei 173, ultimul caz.

***Problema 161.** — *O sferă de rază r se vîră într'o sferă de rază* R *pănă ce sfera r atinge centrul sferei* R. *Să se*

afle volumul porțiunei din sfera r ce rămîne în afară de sfera R, *precum și volumul porțiunei comune ambelor sfere, în funcțiune de* R *și r. Se presupune* $2r > R$. (A. Iliovici.)

Soluție dată de D-nii : I. Drăgănescu (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele) ; *I. Sichitiu* și *C. Țițirigă* (Elevi în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova) și *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei).

Fie O și *o* centrele celor două sfere R și *r*; AB diametrul cercului de intersecție al celor două sfere; M punctul unde linia centrelor *Oo* întîlnește diametrul AB și C, D punctele unde *Oo* întîlnește sferele R, *r*. Să însemnăm apoi cu *v* volumul segmentului sferic (cu o bază) AMBO; cu *v'* volumul segmentului sferic AMBC și cu V volumul comun ambelor sfere. Avem:



$$V = v + v' \qquad (1)$$

$$v = \frac{1}{6}\pi\overline{OM}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{AM}^2 \times OM \qquad (2)$$

$$v' = \frac{1}{6}\pi\overline{MC}^2 + \frac{1}{2}\pi\overline{AM}^2 \times MC \qquad (3)$$

Adunînd egalitățile (2) și (3) obținem:

$$V = \frac{1}{6}\pi(\overline{OM}^3 + \overline{MC}^3) + \frac{1}{2}\pi\overline{AM}^2(OM + MC) \qquad (4)$$

Insă triunghiul dreptunghiu OAD ne dă:

$$\overline{AO}^2 = \overline{OD} \times OM$$

de unde:
$$OM = \frac{R^2}{2r}$$

și deci:
$$MC = R - \frac{R^2}{2r} = \frac{R}{2r}(2r - R).$$

Vom avea dar:

$$OM + MC = R \qquad (5)$$

$$\overline{OM}^3 + \overline{MC}^3 = \frac{R}{8r^3}\left[R^3 + (2r - R)^3\right] = \frac{R^3}{4r^2}\left[4r^2 - 6Rr + 3R^2\right] \qquad (6)$$

iar triunghiul dreplunghiu AMO ne dă:

$$\overline{AM}^2 = R^2 - \frac{R^4}{4r^2} = \frac{R^2}{4r^2}(4r^2 - R^2). \qquad (7)$$

Cu ajutorul relațiunilor (5), (6) și (7), egalitatea (4) devine:

$$V = \frac{1}{6}\pi\frac{R^3}{4r^2}(4r^2 - 6Rr + 3R^2) + \frac{1}{2}\pi\frac{R^3}{4r^2}(4r^2 - R^2)$$

de unde:

$$V = \frac{\pi R^3}{12r}(8r - 3R).$$

Aceasta este expresiunea volumului comun celor două sfere.

Dacă însemnăm cu Vr volumul sferei r, volumul V' al porțiunei din sfera r ce rămîne în afară de sfera R, va fi:

$$V' = Vr - V$$

sau:
$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{\pi R^3}{12r}(8r - 3R)$$

sau încă:

$$V' = \frac{\pi}{12r}(3R^4 - 8R^3r + 16r^4).$$

***Problema 164.**— *Se dă un cerc de rază r în care se înscrie un exagon regulat. Unindu-se mijloacele laturilor exagonului se formează un nou exagon. Se operează cu acest nou exagon în același mod. Se repetă construcțiunea de n ori. Se cere a se proba că pentru $n = \infty$ seria care reprezintă suma perimetrelor exagoanelor astfel obținute este convergentă.* (I. Ghibaldan.)

Soluțiune dată de D-nii: G. Cica (Iași); *G. Dragu* (București); *I. Drăgănescu* (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele); *G. Giușcă* (Student, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași); *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Turnu-Severin); *Al. Em. Melencovici* (Student, București); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești); *G. Penescu* (Student, București); *C. Popovici* (Student, Iași); *I. Sichitiu* și *C. Țițirigă* (Elevi în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova) și *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei).

Fie exagonul ABCDEF înscris în un cerc de rază r. E ușor de văzut că raza cercului înscris în acest exagon este egală jumă-

tatea lui AC, adică cu $r\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aceasta va fi raza cercului circumscris exagonului al doilea. De aci rezultă că pentru a afla raza cercului circumscris unui exagon, trebue înmulțită raza cercului circumscris exagonului precedent cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dar perimetrele fiind proporționale cu razele, rezultă că între 2 perimetre consecutive avem tot raportul $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Acest raport fiind mai mic ca 1 și constant, rezultă că seria formată de perimetre e convergentă, și că este chiar o progresiune geometrică descrescîndă. Primul perimetru fiind $6r$, rezultă că suma tutulor perimetrelor este:

$$\frac{6r}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{12r}{2-\sqrt{3}}=12r(2+\sqrt{3}).$$

***Problema 166.** — *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^3x+\cos^3x+4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=1.$$

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-nii: St. N. Corbeanu (Turnu-Severin); *G. Dragu* (Sub-Locotenent în Regimentul I de Geniu, București); *I. Drăgănescu* (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele); *G. Giușcă* (București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași); *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII a Liceului Real din Turnu-Severin); *C. Mateiescu* (Elev în Clasa VII a Liceului Carol I din Craiova); *Al. Em. Melencovici* (Student, București); *I. Moscuna* (Bacalaureat, București); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului St. Petru și Paul din Ploești); *G. Penescu* (Student, București); *I. Sichitiu* și *C. Țițirigă* (Elevi în Clasa VII a Școalei Fiilor de Militari din Craiova); *C. Vintilă* (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab din București); *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei) și *J. Wittner* (Elev în Clasa VII a Liceului Unirea din Focșani).

Observăm că:

$$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x,$$

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-\sin x.$$

Prin urmare ecuația dată se poate scrie succesiv:

$$\sin^3x+\cos^3x+(1-\cos x)(1-\sin x)=1,$$
$$\sin^3x+\cos^3x-\sin x-\cos x+\sin x\cos x=0,$$
$$\sin x(\sin^2x-1)+\cos x(\cos^2x-1)+\sin x\cos x=0,$$
$$\sin x\cos^2x+\cos x\sin^2x-\sin x\cos x=0,$$
$$\sin x\cos x(\sin x+\cos x-1)=0.$$

Prin urmare rădăcinele ecuației propuse sînt rădăcinele ecuațiilor:

$$\sin x=0, \quad (1)$$
$$\cos x=0, \quad (2)$$
$$\sin x+\cos x=1. \quad (3)$$

Expresiunea generală a arcelor care satisfac ecuația (1), este:

$$x=k\pi,$$

iar expresiunea generală a arcelor care satisfac ecuația (2), este:

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}.$$

Rădăcinele ecuației (3) verificînd ecuația:

$$(\sin x+\cos x)^2=1,$$

echivalentă cu ecuația:

$$\sin x\cos x=0,$$

videm că soluțiunile ecuației (3) sînt tot aceleași ca ale ecuațiilor (1) și (2). Prin urmare toate soluțiunile ecuației propuse sînt date de formulele:

$$x=k\pi,$$
$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

k fiind un întreg oare-care, pozitiv ori negativ.

Problema 167. — *Se dau două drepte* Δ, Δ' *perpendiculare una pe alta și două puncte* A, B *situate pe* Δ. *Dintr'un punct* P *luat pe dreapta* Δ *se duc dreptele* PA, PB. *Se cere să se afle locul punctului de intersecție al dreptei* PB *cu perpendiculara pe* PA *dusă prin punctul* A. **(Bogdan Ionescu.).**

Soluțiune dată de D-nii: Th. M. Vladimirescu (Rîmnicul-Vîlcei); *Al. Em. Melencovici* (Student, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași); *I. Drăgănescu* (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele) și *Corneliu Ionescu* (Iași).

Se ia dreapta Δ ca ax al ycilor și AB al ixilor. Insemnăm cu (a,o) (b,o) (o,λ),

coordonatele punctelor A, B, P; λ fiind un parametru variabil. Ecuația dreptei PA este:

$$a(y-\lambda)+\lambda x=o;$$

de unde cea a dreptei AM (M fiind un punct al locului):

$$\lambda y=a(x-a). \tag{1}$$

De asemenea ecuația dreptei PB este:

$$b(y-\lambda)+\lambda x=o. \tag{2}$$

Eliminînd parametrul λ între ecuațiele (1) și (2) se obține imediat ecuația locului:

$$ax^2+by^2-a(a+b)x+a^2b=o. \tag{3}$$

Această ecuație reprezintă o conică cu centrul în mijlocul segmentului AB și avînd pe AB ca axă mare sau transversă după cum conica este o elipsă sau o iperbolă.

Ecuația (3) poate reprezenta:

I) *Elipsă* cînd avem inegalitățile simultane:

$$a>o,\ b>o \text{ sau } a<o,\ b<o,$$

adică cînd punctele A și B sînt de aceiași parte a dreptei Δ.

II) *Iperbolă* cînd:

$$a>o,\ b<o \text{ sau } a<o,\ b>o,$$

adică cînd A și B sînt unul de o parte și altul de cealaltă parte a dreptei Δ.

Caz particular; iperbolă equilateră cînd:

$$a=-b$$

adică, Δ trece prin mijlocul segmentului AB.

III) *O parabolă* cînd:

$$b=\infty$$

adică, cînd punctul B se depărtează către infinit.

Ecuația ei este:

$$y^2=ax-a^2.$$

IV) Locul (3) se mai poate reduce la *o dreaptă* și anume: axul *ox* sau axul *oy* după cum punctul A sau este cel ce coincide cu origina.

Soluțiune geometrică dată de D-l A. Iliovici (Iași).

Insemnăm cu M′ proecțiunea punctului M al locului pe AB. Din triunghiurile asemeni AMM′, OAP pe de o parte și MM′B, POB pe de alta se obțin relațiunile:

$$(1) \qquad \frac{MM'}{OA} = \frac{AM'}{OP}$$

$$(2) \qquad \frac{MM'}{OP} = \frac{M'B}{OB}.$$

Inmulțind aceste două relațiuni membru cu membru avem:

$$\frac{\overline{MM'}^2}{OA} = \frac{AM' \times M'B}{OB},$$

sau însemnînd $OA = a$, $OB = b$

$$(3) \qquad \overline{MM'}^2 = \frac{a}{b} AM' \times M'B.$$

Această relațiune ne indică că locul este o *elipsă* cu AB ca ax mare. Observînd că MM' este ordonata lui M și însemnînd cu ωM' abscisa lui M în raport cu două axe: una AB, și alta o perpendiculara pe mijlocul ω lui AB, putem afla și mărimea axei mici indentificînd pe (3) cu:

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} - 1 = 0$$

x, y fiind coordonatele aceluiași punct și α β mărimile semiaxelor.

S'a presupus A și B de aceaiași parte a dreptei Δ. Cînd A și B nu ar fi de aceiași parte a dreptei Δ obținem analog aceiași relațiune, dar M' cade în afară de segmentul AB' și în acest caz locul este *o iperbolă* căreia i se poate obține și axa netransversă, identificîndu-se relațiunea cbținută cu:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = o.$$

Tot din această identificare rezultă *iperbolă equilateră* în cazul cînd O e mijlocul segmentului AB.

In fine este evident locul lui M pentru cazul cînd unul din punctele A sau B coincide cu origina O. Cînd A coincide cu origina locul este dreapta AB și asta pentru poziția particulară a lui P cînd vine în O pe dreapta Δ.

Cînd B coincide cu origina locul este dreapta Δ.

Tot în acest mod se poate obține locul punctului M_1, intersecția dreptei PA cu o perpendiculară în B pe PB. Se obțin tot conice.

Observațiune. Cazul de parabolă pentru locul punctului M se deduce ușor din cazul de elipsă, daca presupunem că B se depărtează la infinit.

PROBLEME PROPUSE

*226. Să se găsească expresiunea suprafeţii poligoanelor regulate convexe; precum şi expresiunea volumelor celor cinci poliedre regulate convexe; cînd se ia ca unitate de măsură pentru suprafeţe, suprafaţa triunghiului echilateral construit pe unitatea de lungime; iar pentru volume, volumul tetraedrului regulat, construit pe unitatea de lungime. (A. G. IOACHIMESCU.)

*227. Să se construiască un patrutater, cunoscîndu-se diagonalele, unghiul format de liniile ce unesc mijlocul laturilor opuse, precum şi cele două unghiuri formate de o diagonală cu două laturi opuse. (B. PARASCHIVESCU.)

*228. Să se probeze că curba:

$$(x+b)(y+a)=3(x+a)(x+b)^3$$

este unicursală, şi să se găsească expresiunea coordonatelor în funcţiune raţională de un parametru. (A. G. IOACHIMESCU.)

229. Se dă un cerc şi diametrul OA, se duce o rază OM arbitrară şi tangentă în punctul de intersecţie a lui OM cu cercul; fie P punctul de intersecţie al tangentei cu OA; ridic în P o perpendiculară pe OA. Fie M punctul de întîlnire al perpendicularei cu raza OM. Se cere locul punctului M. (N. NICOLESCU.)

*230. Să se simplifice expresiunea:

$$(\sqrt[3]{\times 2}-\sqrt[3]{y^2})\,(x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x^2y^2}).$$ (J. WITTNER.)

*231. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(\log 4\times^2)^2-10(\log 18x)+4=0$$

baza logaritmilor fiind 9. (I. IONESCU).

*232. Se dă triunghiul ABC şi punctul D pe AB aşa că BD = CD; se ia pe CD punctul E aşa că AE = AD; fie F intersecţia dreptelor AE, BC. Să se demonstre că patrulaterul BDEF nu poate fi inscriptibil. (I. IONESCU.)

*233. Să se afle valoarea produsului:

$$\left(1+\cos a\right)\left(1+\cos\frac{a}{2}\right)\left(1+\cos\frac{a}{2^2}\right)\ \ldots\ \left(1+\cos\frac{a}{2^{n-1}}\right),$$

(BOGDAN IONESCU.)

UN NOU METOD PENTRU STUDIUL TRIGONOMETRIEI PLANE.

(Urmare)

Rezolvirea triunghiurilor.

Vom deosebi următoarele cazuri, care depind de elementele ce ni se dau pentru a rezolvi un triunghiu.

I) *Se dă o latură și două unghiuri.* Fie:

$$a=125{,}40, \qquad \alpha=0{,}3754, \qquad \alpha'=0{,}6548.$$

Procedăm în modul următor pentru a găsi elementele necunoscute α'', a', a'' și S.

$$\alpha''=2-\alpha-\alpha'=2-0{,}3754-0{,}6548=0{,}9698.$$

$$a'=\frac{aK_{\alpha'}}{K_\alpha}, \qquad a''=\frac{aK_{\alpha''}}{K_\alpha}, \qquad S=\frac{a^2K_{\alpha'}K_{\alpha''}}{2K_\alpha}.$$

$\log a=2{,}09830$	$\log a=2{,}09830$	$2\log a=4{,}19660$
$\log K_{\alpha'}=\bar{1}{,}93276$	$\log K_{\alpha''}=\bar{1}{,}99951$	$\log K_{\alpha'}=\bar{1}{,}93776$
$-\log K_\alpha=0{,}25485$	$-\log K_\alpha=0{,}25485$	$\log K_{\alpha''}=\bar{1}{,}99951$
$\log a'=\bar{2}{,}28591$	$\log a''=\bar{2}{,}35266$	$-\log K_\alpha=0{,}25485$
$a'=193{,}16$	$a''=225{,}25$	$-\log 2=\bar{1}{,}69897$
		$\log S=4{,}08269$
		$S=12097{,}22$

II) *Se dă 2 laturi și unghiul cuprins între ele.* Fie:

$$a'=193{,}16 \qquad a''=225{,}25 \qquad \alpha=0{,}3754.$$

Procedăm în modul următor pentru a găsi elementele necunoscute a, α', α'' și S.

$$0{,}5\alpha=0{,}1877, \quad 0{,}5(\alpha'+\alpha'')=0{,}5(2-0{,}3754)=0{,}8123.$$

$$a'+a''=418{,}41, \quad a''-a'=32{,}09.$$

$$R_{0{,}5(\alpha''-\alpha')}=\frac{a''-a'}{a''+a'}:R_{0{,}5\alpha} \qquad S=\frac{1}{2}a'.a''.K_\alpha$$

$\log(a''-a')=1{,}50637$	$\log a'=2.28592$
$-\log(a''+a')=\bar{3}{,}37840$	$\log a''=2{,}35267$
$-\log R_{0{,}5\alpha}=0{,}51757$	$-\log 2=\bar{1}{,}69897$
$\log R_{0{,}5(\alpha''-\alpha')}=\bar{1}{,}40234$	$\log K_\alpha=\bar{1}{,}74515$
$0{,}5(\alpha''-\alpha')=0{,}1575$	$\log S=4{,}08271$
	$S=12097{,}77$

$$0{,}5(\alpha''+\alpha')+0{,}5(\alpha''-\alpha')=\alpha''=0{,}9698$$
$$0{,}5(\alpha''+\alpha')-0{,}5(\alpha''-\alpha')=\alpha'=0{,}6548.$$

Calculul laturei a se va face ca la cazul I, căci cunoaștem acum unghiurile α, α' și α''.

II) *Se dă 2 laturi și unghiul opus uneia din ele.* In acest caz problema poate admite două soluțiuni, una, sau nici una. Modul de rezolvire ne va indica pe fie-care din aceste cazuri particulare:

a) *Două soluțiuni.* Fie:

$$a'=193{,}16, \qquad a''=225{,}25, \qquad \alpha'=0{,}6548.$$

Vom proceda în modul următor pentru a găsi pe α'', α', a și S.

$$\frac{a'}{K_{\alpha'}}=\frac{a''}{K_{\alpha''}} \qquad \text{de unde:} \qquad K_{\alpha''}=\frac{a''K_{\alpha'}}{a'}.$$

$$\log a''=2{,}35267$$
$$\log K_{\alpha'}=\bar{1}{,}93276$$
$$-\log a'=\bar{3}{,}71408$$
$$\log K_{\alpha''}=\bar{1}{,}99951$$
$$\alpha''=0{,}9698.$$

Dar fiind că am găsit pe α'' cu ajutorul lui $K_{\alpha''}$, putem lua și unghiul $2-\alpha''$ care admite același coeficient ca K. Deci putem lua și:

$$\alpha''=2-0{,}9698=1{,}0302.$$

Pentru a vedea dacă ambele unghiuri α'' sînt admisibile, calculăm pe α în ambele cazuri și vom găsi:

$$\alpha=2-\alpha'-\alpha''=2-0{,}6548-0{,}9698=0{,}3754$$
$$\alpha=2-\alpha'-\alpha''=2-0{,}6548-1{,}0302=0{,}3150.$$

Ambele valori ale lui α'' sînt admisibile. Cunoscînd unghiurile găsim laturile după cazul I.

b) *O soluțiune.* Fie:

$$a'=193{,}16 \qquad a''=225{,}25 \qquad \alpha''=0{,}9698.$$

Vom găsi ca la a) pentru α' următoarele valori:

$$\alpha'=0{,}6548 \quad \text{și} \quad \alpha'=1{,}3452.$$

Pentru α am găsi:

$\alpha=2-0{,}9698-0{,}6548=0{,}3754$ și $\alpha=2-0{,}9698-1{,}3452=-0{,}3150$.

Valoarea lui α' care ne dă pentru α un unghiu negativ nu convine, și prin urmare problema are o soluțiune.

c) *Nici o soluțiune.* Fie:

$$a''=225{,}25 \qquad a'=20^{m},00 \qquad \alpha'=0{,}6548.$$

Calculînd ca la cazul *a*) avem:

$$\log a'' = 2{,}35267$$
$$\log K_{\alpha'} = \bar{1}{,}93276$$
$$-\log a' = \bar{2}{,}67987$$
$$\log K_{\alpha''} = 0{,}96530.$$

Caracteristica lui $\log K_{\alpha''}$ fiind 0, rezultă că $K_{\alpha''} > 1$, ceea ce e imposibil. Deci problema e imposibilă.

IV) *Se dau cele 3 laturi.* Fie:

$$a = 125{,}40 \qquad a' = 193{,}16 \qquad a'' = 225{,}65.$$

Procedăm în modul următor pentru a găsi unghiurile și aria.

$$p = \frac{1}{2}(125{,}40 + 193{,}16 + 225{,}65) = 271{,}905$$

$$p-a = 146{,}505, \qquad p-a' = 78{,}745, \qquad p-a'' = 46{,}655.$$

$$R_{0,5\alpha'} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-a'')}{p(p-a')}}$$

$$\log(p-a) = 2{,}16585$$
$$\log(p-a'') = 1{,}66890$$
$$-\log(p-a') = \bar{2}{,}10377$$
$$-\log p = \bar{3}{,}56558$$
$$2\log R_{0,5\alpha'} = \bar{1}{,}50410$$
$$\log R_{0,5\alpha'} = \bar{1}{,}75205$$
$$0{,}5\alpha' = 0{,}3274$$
$$\alpha' = 0{,}6548$$

$$R_{0,5\alpha} = \sqrt{\frac{(p-a')(p-a'')}{p(p-a)}}$$

$$\log(p-a') = 1{,}8\,623$$
$$\log(p-a'') = 1{,}66890$$
$$-\log(p-a) = \bar{3}{,}83415$$
$$-\log p = \bar{3}{,}56558$$
$$2\log R_{0,5\alpha} = \bar{2}{,}96486$$
$$\log R_{0,5\alpha} = \bar{1}{,}48243$$
$$0{,}5\alpha = 0{,}1877$$
$$\alpha = 0{,}3754$$

$$R_{0,5\alpha''} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-a')}{p(p-a'')}}$$

$$\log(p-a') = 1{,}89623$$
$$\log(p-a) = 2{,}16585$$
$$-\log(p-a'') = \bar{2}{,}33110$$
$$-\log p = \bar{3}{,}56558$$
$$2\log R_{0,5\alpha''} = \bar{1}{,}95876$$
$$\log R_{0,5\alpha''} = \bar{1}{,}97938$$
$$0{,}5\alpha'' = 0{,}4849$$
$$\alpha'' = 0{,}9698$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}$$

$$\log(p-a') = 1{,}89623$$
$$\log(p-a) = 2{,}16585$$
$$\log(p-a'') = 1{,}66890$$
$$\log p = 2{,}43442$$
$$2\log S = 8{,}16540$$
$$\log S = 4{,}08270$$
$$S = 12097{,}50.$$

Asemănarea triunghiurilor.

In raportarea planurilor pe hîrtie avem nevoie de cîte-va teoreme de geometrie, care se pot stabili foarte uşor prin trigonometrie.

Două triunghiuri sînt asemenea cînd au unghiurile egale şi laturile proporţionale.

Avem acum următoarele teoreme:

Teorema I. Două triunghiuni sînt asemenea cînd au unghiurile egale.

Pentru a demonstra aceasta e destul a arăta că dacă unghiurile sînt egale, laturile sînt proporţionale. Fie α, α', α'' unghiurile egale ale celor 2 triunghiuri şi a, a', a'', a_1, a'_1, a''_1 laturile celor 2 triunghiuri. Avem relaţiunile:

$$\frac{a}{K_\alpha}=\frac{a'}{K_{\alpha'}}=\frac{a''}{K_{\alpha''}} \quad \text{şi} \quad \frac{a_1}{K_\alpha}=\frac{a'_1}{K_{\alpha'}}=\frac{a''_1}{K_{\alpha''}}.$$

Divizînd aceste egalităţi avem:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{a'}{a'_1}=\frac{a''}{a''_1}, \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Teorema II. Două triunghiuri sînt asemenea cînd au laturile proporţionale.

Pentru aceasta e destul a demonstra că au şi unghiurile egale. Fie:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{a'}{a'_1}=\frac{a''}{a''_1}=t \quad \text{de unde } a=c_1t,\ a'=a'_1t,\ a''=a''_1t.$$

Fie α şi α_1 unghiurile opuse laturilor a şi a_1. Avem:

$$a^2=a'^2+a''^2-2a'a''K_{1-\alpha}$$

$$a_1^2=a'^2_1+a''^2_1-2a'_1a''_1K_{1-\alpha_1}.$$

Imulţind a doua ecuaţiune cu t^2 şi ţinînd seamă de relaţiile stabilite găsim:

$$a^2=a'^2+a''^2-2a'a''K_{1-\alpha_1}.$$

Comparînd această relaţie care dă pe a^2 cu cea stabilită direct găsim:

$$K_{1-\alpha}=K_{1-\alpha_1}$$

de unde: $$\alpha=\alpha_1.$$

In acelaşi mod putem proba şi egalitatea celor-lalte unghiuri.

Teorema III. Două triunghiuri sînt asemenea cînd au un unghiu egal coprins între laturi proporţionale.

Fie $\alpha=\alpha_1$ și $\frac{a'}{a'_1}=\frac{a''}{a''_1}=t.$

Avem: $a^2=a'^2+a''^2-2a'a''K_{1-\alpha}$

$$a_1^2=a_1'^2+a_1''^2-2a_1'a_1''K_{1-\alpha}.$$

Să înmulțim a doua egalitate cu t^2 și vom avea:

$$a^2t^2=a'^2+a''^2-2a'a''K_{1-\alpha}=a_1^2$$

de unde: $$\frac{a}{a_1}=t,$$

și prin urmare toate laturile sînt proporționale.

Fine

I. Ionescu.

Numărul descompunerilor unui număr dat într'o sumă de numere pare sau impare consecutive,

Acest număr de descompuneri este, în mod evident, numărul soluțiunilor întregi și pozitive ale ecuațiunii în x și n $(n>1)$:

(1) $$n(x+n-1)=N,$$

ecuațiune obținută egalînd cu numărul dat N, suma n $(x+n-1)$ a numerelor: x, $x+2$,.... $x+2n-2$.

Din (1) deducem:

(2) $$x=\frac{N}{n}-n+1.$$

Numărul x trebuind să fie întreg și pozitiv, n nu poate fi de cît unul din divizorii lui N, cari îndeplinesc condițiunea:

(3) $$\frac{N}{n}\geq n.$$

Dacă N este un patrat: $N=\nu^2$, divizorul $n=\nu$ îndeplinesce condițiunea (3); dintre cei-l'alți divizori ai lui N, numai jumătatea numărului lor (număr care este par), îndeplinesc această condițiune.

In adevăr, fie-cărui divizor n al lui N, pentru care avem: $\frac{N}{n}\geq n$, îi corespunde un alt divizor $n'=\frac{N}{n}$ care însă ne dă: $\frac{N}{n'}\leq n'$.

Sînt prin urmare între divizorii lui N (dacă scoatem din numărul lor pe ν) tot atîți divizori n cari îndeplinesc condițiunea (3) cîți sînt cari nu o îndeplinesc. Prin urmare cînd N este un patrat, numărul divizorilor săi cari substituiți lui n în (2) dau pentru x

valori pozitive se obţine adăogînd 1 la jumătatea numărului, micşorat cu 1, al divizorilor lui N.

Daca N nu este un patrat, numărul divizorilor săi este par; jumătatea acestui număr exprimă numărul divizorilor n, cari dau lui x în (2) valori pozitive, căci numai o jumătate a numărului divizorilor săi satisfac condiţiunea (3).

In ambele cazuri se coprinde în numerele aflate şi divizorul $n=1$; acest divizor însă trebue depărtat din cauza condiţiunii $n > 1$. Scoţînd deci 1 din numerele aflate mai sus, obţinem numărul soluţiunilor ecuaţiunii (1), adică numărul descompunerilor lui N într'o sumă de numere *pare* sau *impare* consecutive.

Acest număr este, spre exemplu, pentru $N=2^m a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$:

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\left[(m+1)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-1\right]$$

sau

$$\frac{1}{2}\left[(m+1)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-2\right]$$

după cum N este sau nu un patrat. El este nul cînd N este prim

Pentru a găsi acum numerele respective al descompunerilor lui N într'o sumă de numere *pare* consecutive şi al descompunerilor lui N într'o sumă de numere *impare* consecutive, vom deosebi următoarele trei cazuri, singurele ce se pot prezenta:

1. *Numărul* N *este impar:* $N=a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, ($a, b, .. l$ numere prime diferite de 2).

Este evident *a priori* că, în acest caz, N nu poate fi descompus într'o sumă de numere pare consecutive. Deci numărul (4) exprimă, în acest caz, numărul descompunerilor lui N într'o sumă de numere impare consecutive.

Acest număr este, după cum N este sau nu un patrat,

$\frac{1}{2}\left[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-1\right]$ sau $\frac{1}{2}\left[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-2\right]$.

2. *Numărul* N *este o putere a lui 2:* $N=2^m$.

Din ecuaţiunea (2) rezultă că, în acest caz, x este impar. In adevăr, numerile $\frac{N}{n}$, n, fiind pare ca puteri ale lui 2, diferenţa $\frac{N}{n}-n$ este un număr par; x este deci impar. Prin urmare numă-

rul $N=2^m$ nu poate fi descompus într'o sumă de numere pare consecutive.

Numărul descompunerilor lui N într'o sumă de numere impare consecutive este exprimat ca mai sus, de numărul (4), care, pentru $N=2^m$, se reduce la:

$$\frac{1}{2}m \text{ sau } \frac{1}{2}(m-1)$$

după cum N este sau nu un patrat.

3. *Numărul* N *este par, de forma :* $N=2^m a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$.

Pentru ca x să fie par trebue ca $\frac{N}{n}-n$, să fie un număr impar (2); pentru aceasta trebue ca unul din numerile $\frac{N}{n}$, n, să fie par iar cel-alt impar. Această condițiune este îndeplinită numai de divizorii n ai lui N, primi cu 2, și de aceia cari conțin pe 2 la puterea m, căci numai pentru asemenea divizori, numerile $\frac{N}{n}$, n, nu conțin amîndouă factorul 2. Divizori primi cu 2 sînt dați de factorii $a, b, \ldots l$; numărul lor este $(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)$. Divizorii cari conțin pe 2 la puterea m se obțin înmulțind cu 2^m pe divizorii primi cu 2; numărul lor este asemenea $(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)$. Numărul total al divizorilor n cari dau pentru x în (2) valori *pare* este deci $2(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)$. Ca mai sus, se poate vedea că din acest număr de divizori n, numai jumătate dau pentru x în (2) valori *pozitive;* din această jumătate trebue scos divizorul $n=1$, care nu dă o soluțiune a ecuațiunii (1). Numărul de divizori rămas:

$$(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-1$$

exprimă deci numărul valorilor lui x, pare și pozitive, rădăcini ale ecuațiunii (1). Acest număr exprimă numărul descompunerilor lui N într'o sumă de numere *pare* consecutive. Scăzîndu-l din numărul (4) al descompunerilor lui N într'o sumă de numere *pare* sau *impare* consecutive, obținem numărul descompunerilor lui N într'o sumă de numere *impare* consecutive.

Acest număr este:

$$\frac{1}{2}\left[(m-1)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)+1\right]$$

sau

$$\frac{1}{2}(m-1)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)$$

după cum N este sau nu un patrat. Cînd $m=1$, N nu poate fi descompus într'o sumă de numere impare consecutive.

Observațiune. Un număr dat $N=2^m a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, $(m \geq o)$, care nu este o putere a lui 2, poate fi descompus într'o sumă de numere consecutive în $(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-1$ feluri, căci acesta este numărul descompunerilor numărului 2N într'o sumă de numere pare consecutive [1]).

I. Moscuna.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 168.** — *Printr'un punct din interiorul unui cerc se duc coarde perpendiculare. Să se demonstreze că arcele interceptate formează o echidiferență.* (I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: G. Cica (Iași); *St. N. Corbeanu* (Turnu-Severin). *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Iași); *Al. Ionescu* (Elev în Clasa V a Liceului Mihai-Viteazu, București); *Marin Mateescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Turnu-Severin); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești), *I. Penescu* (Elev al Școalei Comerciale din București); *C. Țițirigă* (Elev în Clasa VII a Școalei fiilor de militari din Craiova); *J. Wittner* (Elev în Clasa VII a Liceului din Focșani), și *Th. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vilcei).

---

[1]) Acest studiu generalizează chestiunea 191. a cărei soluțiune o publicăm în numărul de față. D-l. *C. Miclescu*, propunătorul acestei chestiuni, ne-a dat o generalizare pornind de la identitatea:

$$N=ab=(a-b+1)+(a-b+3)+\ldots+(a+b-1).$$

Prin urmare, un număr oare-care, poate fi descompus într'un șir de numere consecutive *de aceiași paritate*, în atîtea moduri în cîte se poate descompune într'un produs de doi factori. Se va lua însă numai jumătatea numărului modurilor de descompunere în doi factori, din cauză că descompunerile:

$$N=ab$$

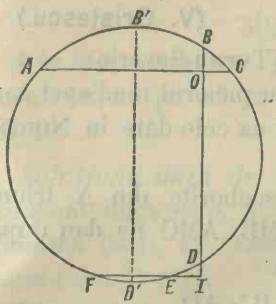
și

$$N=ba$$

nu sînt distincte.

Acest mod de a considera chestiunea revine în fond, la găsirea numărului divizorilor numărului dat; iar consecințele ce se pot deduce sînt aceleași ca și în studiul D-lui Moscuna. (N. R.)

Prin punctul O din interiorul unui cerc ducem coardele AB, CD perpendiculare una pe alta. Fie n, n', n'', n''' numărul de grade al arcelor AC, BC, BD, DA și l, l', l'', l''' lungimile respective ale acestor arce. Unghiurile AOC, BOC fiind drepte ele vor avea aceiași măsură. Prin urmare va trebui să avem:



$$\frac{n+n''}{2}=\frac{n'+n'''}{2},$$

de unde:

$$n-n'=n'''-n''.$$

Dacă r e raza cercului, avem înmulțind această egalitate cu $\frac{\pi r}{180}$:

$$\frac{\pi rn}{180}-\frac{\pi rn'}{180}=\frac{\pi rn'''}{180}-\frac{\pi rn''}{180},$$

sau

$$l-l'=l'''-l'', \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Soluție dată de D-nii: G. Dragu (București); *Corneliu Ionescu* (Iași); *L. Hermann* și *C. Vintilă* (Elevi în Clasa VI a Liceului Matei Basarab, București); *J. Wittner* (Focșani); *Gr. Ruptureanu* (Elev în Clasa VII a Liceului Matei Basarab, București).

Ducem diametrul C'D' perpendicular pe AB. Avem:

$$AC'=BC' \text{ și } AB'=BD',$$

de unde:

$$AC'-BC'=AD'-BD'=O.$$

Sporind descăzuții, și micșorînd scăzătorii cu aceleași cantități egale BB', DD' egalitatea nu se va schimba:

$$(AB'+B'B)-(CB'-BB')=(AD'+DD')-(BD'-DD'),$$

sau:

$$AB-BC=AD-BD. \qquad \text{c.c.e.d.d.}$$

Observare. Daca se admite convenţiunea lui *Lacroix*, atunci teorema este adevărată și dacă punctul O este exterior cercului și cînd perpendicularele duse întîlnesc circonferența în 4 puncte. Se știe că această convenţiune constă în a considera ca pozitive arcele cari întorc concavitatea spre vîrful unui unghiu și ca negative arcele cari întorc convexitatea. Cu ajutorul acestei convenţiuni *ori-care* ar fi poziţiunea unui unghiu în raport cu o circonferenţă măsura acelui unghiu se deduce cu ajutorul următoarei teoreme: *un unghiu are de măsură semi-suma arcelor coprinse între laturile lui, prelungite indefinit de ambele părți ale vîrfului.* Ast-fel pentru unghiul I arcul DE e negativ iar CF pozitiv, și vom avea conform teoremei din problema 168:

$$CF-CD=FE-(-ED). \qquad \text{(I. I.)}$$

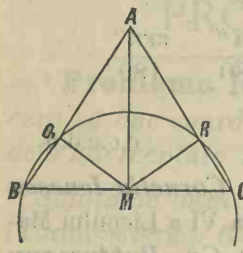
***Problema 173.** — *Dintr'un punct* M *situat pe latura* BC *a unui triunghiu* ABC *ducem perpendicularele* MQ, MR *pe laturile* AB, AC. *Să se demonstreze că triunghiul* ABC *este isoscel, dacă avem* BQ=CR *și dacă punctul* M *coincide cu piciorul medianei, bisectriței sau a înălțimei scoborîte din* A [1]).

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l St. N. Corbeanu (Turnu-Severin).

Pentru cazul cînd punctul M coincide cu piciorul medianei sau al bisectriței duse din A, aceleași soluțiuni ca cele date în Numărul 8, pag. 194.

Cînd punctul M este piciorul înălțimei scoborîte din A, triunghiurile dreptunghe AMB, AMC ne dau după o proprietate cunoscută:



$$\overline{AM}^2 = AB \times AQ$$

și: $$\overline{AM}^2 = AC \times AR$$

de unde:

$$AB \times AQ = AC \times AR,$$

egalitate care ne arată, după o teoremă cunoscută, că punctele B, Q, R, C se află pe o aceiași circonferență. Vom avea dar:

$$\sphericalangle B = \frac{1}{2}(\text{arc } QR + \text{arc } RC); \qquad \sphericalangle C = \frac{1}{2}(\text{arc } QR + \text{arc } BQ).$$

Dar arc RC = arc BQ de oare-ce coardele BQ, RC sînt egale prin ipoteză. Deci:

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C.$$

***Problema 174.** — *Să se demonstreze că expresiunea:*

$$5^{2n+3} + 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1}$$

este divizibilă prin 19. (I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii I. Moscuna (București), *C. Popovici* (Student, Iași), *G. Iliovici* (Elev în clasa VI a Liceului Național din Iași), *L. Hermann* (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab din București) și *C. Vintilă* (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab din București).

[1]) A se videa și soluțiile date acestei probleme la pag. 193, 194 și 195 din numărul trecut (Aprilie 1897). Eleganta soluție a D-lui *St. N. Corbeanu* ne-a fost trimeasă prea tîrziu, pentru a o putea pune în acel număr.

Expresiunea dată se poate scrie succesiv:

$$5.5^{2n+2}+2^2.3.2^{n+1}.3^{n+1}+2.2^{n+1}.3^{n+1},$$

$$5.25^{n+1}+12.6^{n+1}+2.6^{n+1},$$

$$5.25^{n+1}-5.6^{n+1}+5.6^{n+1}+12.6^{n+1}+2.6^{n+1},$$

$$5(25^{n+1}-6^{n+1})+19.6^{n+1}.$$

Dar parenteza este divizibilă prin 25—6=19. Al doilea termen conține pe 19 ca factor. Deci expresiunea dată e divizibilă cu 19. c.c.e.d.d.

Soluțiune dată de D-nii A. Iliovici (Student Iași), *G. Penescu* (Student București), *V. Oprișanu* (Bacalaureat, Ploești), *Corneliu Ionescu* (Iași), *V. Cambureanu* și *Gh. Dobrovici* (Elevi Clasa VI Liceul din Berlad.

Expresiunea dată se poate scrie:

$$125.25^n+72.6^n+12.6^n,$$

sau: $$(6.19+11)(19+6)^n+84.6^n.$$

Dacă se desvoltă $(19+6)^n$ după formula binonului, toți termenii, afară de ultimul, sînt multipli de 19. Apoi $84=\mathcal{M}\,19+8$. Deci expresiunea dată se poate scrie:

$$(\mathcal{M}19+11)(\mathcal{M}19+6^n)+(\mathcal{M}19+8.6^n,$$

sau deslăcînd parentezele și grupînd multiplii de 19, avem:

$$\mathcal{M}19+11.6^n+8.6^n=\mathcal{M}19+19.6^n.$$

Deci expresiunea este divizibilă cu 19.

Soluție dată de D-nii: Th. Vladimirescu (Rîmnicul-Vîlcei) și *L. Hermann*, (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab din București).

Pentru $n=1$ expresiunea dată devine:

$$5^5+2^4.3^3+2^3.3^2=3125+432+72=3629=191\times19=\mathcal{M}19.$$

Zic acum că dacă expresiunea dată este divizibilă prin 19 pentru o valoare a lui n, ea este divizibilă și pentru valoarea $n+1$. In adevăr înlocuind pe n cu $n+1$ în expresiunea dată obținem:

$$5^{2n+5}+5^{n+4}.3^{n+3}+2^{n+3}.3^{n+1},$$

care se poate scrie succesiv:

$$25.5^{2n+3}+6.2^{n+3}.3^{n+2}+6.2^{n+1}.3^n,$$

$$19.5^{2n+3}+6(5^{2n+3}+2^{n+3}.3^{n+2}+2^{n+1}.3^n).$$

Prima parte are pe 19 ca factor. Parentesa prin ipoteză este divizibilă cu 19. Deci întreaga expresiune este divizibilă cu 19. Dar am făcut încercare pentru $n=1$ și am obținut un multiplu de 19. Deci expresiunea este divizibilă și pentru $1+1=2$, apoi pentru $2+1=3$, etc. Expresiunea este deci divizibilă cu 19 pentru toate valorile întregi ale lui n.

Problema 175. — *Să se demonstreze, fără a face vre-o extragere de rădăcină, că diferența:*

$$\sqrt{90}-\sqrt{42},$$

care o valoare coprinsă între 3 și 3,5. **(C. Miclescu.)**

Soluțiune dată de D-nu Th. M. Vladimirescu (Rîmnicu-Vîlcei)

Aplicăm celor două radicale metoda celor două medii (metoda lui Newton), care consistă în aceia că rădăcina patrată a unui produs de doi factori, este coprinsă între media aritmetică și media armonică, adică:

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

de asemenea:

$$\frac{a'+b'}{2}>\sqrt{a'b'}>\frac{2}{\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}}.$$

Din egalitățile de mai sus deducem:

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}}>\sqrt{ab}-\sqrt{a'b'}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}-\frac{a'+b'}{2}.$$

Făcînd:

$$a=10,\quad b=9;\quad a'=7,\quad b'=6,$$

se găsește:

$$3{,}04....>\sqrt{90}-\sqrt{42}>2{,}973....$$

O verificare directă arată ca diferența de mai sus, este mai mare ca 3, deci:

$$3{,}5\ >\sqrt{90}-\sqrt{42}\ >\ 3.$$

Soluțiune dată de D-l C. Țițirigă (Elev Școala fiilor de militari, Craiova).

Să formăm ecuațiunea de gradul al II, care să aibă ca rădăcini pe: $\sqrt{90}-\sqrt{42}$ și $\sqrt{90}+\sqrt{42}$. Această ecuațiune este:

$$x^2-2\sqrt{90}\,x+48=0.$$

Inlocuind pe x cu 3 și cu 3,5, se găsește că primul membru al ecuațiunei, este în primul caz pozitiv, iar în cel de al doilea negativ; de aci rezultă că 3 este în afară de rădăcini, iar 3,5 între rădăcini; prin urmare:

$$3<\sqrt{90}-\sqrt{42}<3.5<\sqrt{90}+\sqrt{42}.$$

Soluție dată de D-nii I. Moscuna (Bacalaureat, București) și *Corneliu Ionescu* (Iași).

Trebue să arătăm că:

$$\sqrt{90}-\sqrt{42}>3.$$

Făcînd operațiuni permise asupra neegalităților, avem:

$$\sqrt{90}>3+\sqrt{42},$$

sau:

$$90>45+6\sqrt{42},$$

$$169>168,$$

inegalitate evidentă.

Tot asemenea se poate arăta ca:

$$\sqrt{90}-\sqrt{42}<3,5.$$

***Problema 178.** — *Fie* H *punctele de întîlnire al înălțimilor unui triunghiu* ABC *în care vîrfurile* B *și* C *sînt fixe iar unghiul* C *constant. Se cere a se afla locul centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor* HCA, HAB, HBC.

(A. Iliovici.)

Problema 179. — *Să se afle învălitoarea primelor două locuri din problema precedentă* (178) *cînd unghiul* C *variază.*

(A. Iliovici.)

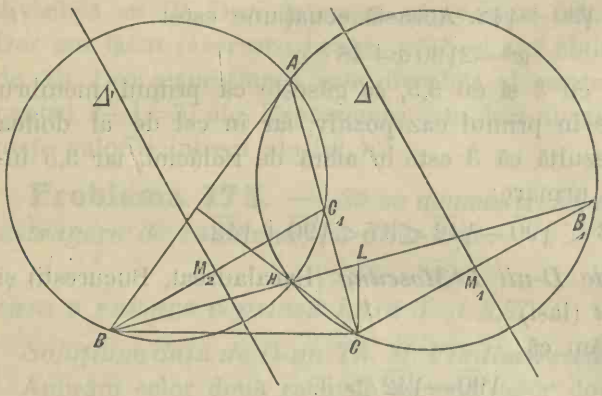
Soluție dată de D-l I. Moscuna (Bacalaureat, București).

Fie B_1 simetricul punctului B în raport cu dreapta fixă CA. Este ușor de văzut că:

$$\sphericalangle AB_1C=\sphericalangle ABC=180^0-\sphericalangle AHC.$$

Punctul fix B_1 aparține deci cercului circumscris triunghiului HAC. Locul centrului acestui cerc, care trece prin punctele fixe B_1, C, este perpendiculara Δ ridicată pe mijlocul dreptei CB_1.

Tot astfel, putem arăta că locul centruiui cercului circumscris triunghiului HAB este perpendiculara Δ′ rîdicată pe mijlocul dreptei BC_1, C_1 fiind simetricul punctului C în raport cu dreapta fixă BB_1.



Este ușor de văzut că numai o parte din dreptele Δ, Δ′ formează locurile căutate, căci punctul A — din cauza unghiului dat C — trebue să se afle numai de-o parte a dreptei CB. De oare-ce la limită vîrful A coincide cu C, punctele limite de pe dreptele Δ, Δ′ se construesc ducînd perpendicular pe BC dreapta CL care întîlnește pe BB_1 în L. Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor CLB_1, BLC_1 sînt punctele limite ale locurilor căutate.

Locul centrului cercului circumscris triunghiului BHC, este, în mod evident, perpendiculara rîdicată pe mijlocul dreptei BC.

Cînd unghiul C variază, dreptele Δ, Δ′ rămîn necontenit tangente fie-care la cîte un cerc fix. In adevăr, dreptele Δ, Δ′ sînt perpendiculare pe mijloacele M_1, M_2 ale dreptelor CB_1, BC_1; ele sînt deci respectiv tangente cercurilor de rază CM_1, BM_2 și de centre C, B. Aceste două cercuri sînt fixe, ca avînd centrele C, B fixe și razele CM_1, BM_2 constante și egale fie-care cu jumătatea dreptei BC. Aceste două cercuri sînt învălitoarele locurilor Δ, Δ′.

***Problema 180.** — *Pe latura* BC *a unui triunghiu oarecare* ABC *se ia un punct* M, *astfel că ducînd perpendicularele* MQ, MR *pe laturile* AB, AC *să avem* BQ = CR *și fie* N, P *punctele analoage situate pe laturile* CA, AB. *Să se demonstreze că dreptele* AM, BN, CP *sînt concurente.* **(V. Cristescu.)**

Soluție dată de D-nii: Gh. Cica (Iași); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev în Clasa VI a Liceului Național din Iași), *Cornelin Ionescu* (Iași) și *Em. Blondel* (Liceul din Berlad).

Fie S, T picioarele perpendicularelor scoborîte din N pe laturile BC, BA și U, V picioarele perpendicularelor scoborîte din P pe laturile CA, CB.

Triunghiurile dreptunghe APU, ANT sînt asemenea, căci au unghiul ascuțit din A comun. Din proporționalitatea laturilor lor, deducem:

$$AP \times AT = AN \times AU. \qquad (1)$$

Tot ast-fel triunghiurile dreptunghe asemenea BMQ, BPV și CNS, CMR ne dau:

$$BM \times BV = BP \times BQ, \qquad (2)$$

$$CN \times CR = CM \times CS. \qquad (3)$$

Inmulțind membru cu membru egalitățile (1), (2) și (3) și observînd că prin ipoteză:

$$AT = CS; \qquad BV = AU; \qquad CR = BQ$$

obținem:

$$AP \times BM \times CN = BP \times CM \times AN$$

și prin urmare conform teoremei lui *Ioan de Ceva* dreptele AM, BN, CP sînt concurente.

Soluție dată de D-nii: I. Moscuna (Bacalaureat, București); *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Ploești) și *Th. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei).

Fie AA′, BB′, CC′ înălțimile triunghiului. In triunghiurile asemenea AA′B, MQB; AA′C, MRC avem proporțiile:

$$\frac{MB}{QB} = \frac{AB}{BA'}; \qquad \frac{RC}{MC} = \frac{CA'}{AC}$$

care înmulțite ne dau, observînd că BQ = RC:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{CA'}{BA'}. \qquad (1)$$

In mod analog obținem:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB'}{CB'}; \qquad \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC'}{AC'}. \qquad (2)$$

Inmulțind membru cu membru egalitățile (1) și (2) avem:

$$\frac{MB \times NC \times PA}{MC \times NA \times PB} = \frac{CA' \times AB' \times BC'}{BA' \times CB' \times AC'} = 1$$

căci înălțimile sînt concurente. c.c.e.d d.

***Problema 183.**— *Intr'un tetraedru se consideră cea mai scurtă distanță* AB, *între două coame opuse, și parale-*

logramul CDEF *cu vîrfurile în mijloacele celor-l'alte patru coame. Să se demonstreze:* 1) *că planul* CDEF *este perpendicular pe dreapta* AB *și o împarte în două părți egale;* 2) *că volumul tetraedrului este egal cu două treimi din produsul lungimei* AB *prin suprafața* CDEF. **(C. Miclescu.)**

Soluție dată de D-nii: I. Moscuna (Bacalaureat, București) și *Al. Em. Melencovici* (Student, București).

Fie MNPQ tetraedrul considerat; C, D, E, F mijloacele coamelor MQ, MN, NP, PM. Dreapta AB perpendiculară pe MN și PQ este ortogonală paralelelor acestor drepte FE și CF; prin urmare perpendiculară pe planul CDEF.

Fie M′ și P′ proecțiunile punctelor M și P pe planul CDEF. Egalitatea evidentă a triunghiurilor PP′F și MM′F arată că coamele MN și PQ, paralele planului CDEF sînt egal depărtate de acest plan; rezultă de aci că planul CDEF împarte cea mai scurtă distanță a lor AB, în două părți egale.

2) Construesc pe baza MNP și pe muchia PQ prisma triunghiulară $MNPQM_1N_1$. Avem în mod evident:

$$vol.\ MNPQM_1N_1 = 3\ vol.\ MNPQ = \frac{AB}{2} \times supr.\ MNN_1M_1$$

de unde:

$$vol.\ MNPQ = \frac{AB}{6} \times supr.\ MNN_1M_1$$

sau:

$$vol.\ MNPQ = \frac{AB}{6} \times 4.\ supr.\ CDEF$$

căci paralelogramul MNN_1M_1 fiind asemenea cu paralelogramul CDEF, și laturile primului fiind de două ori mai mari ca ale ultimului paralelogram, avem:

$$supr.\ MNN_1M_1 = 4\ supr.\ CDEF.$$

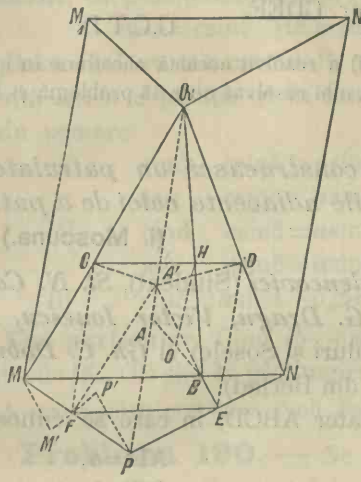
iar:

$$vol.\ MNPQ = \frac{2}{3}.\ AB \times supr.\ CDEF.$$

Soluție dată de D-nii: Al. Toussaint (Elev în Școala de Poduri și Șosele, București); *Al. Iliovici* (Student, Iași) și *J. Wittner* (Focșani).

Dreptele CF și FE sînt respectiv paralele cu muchile PQ și MN,

căci în triunghiurile MPQ și MPN, aceste drepte împart laturile MP și MQ, MP și PN în părți proporționale. Cea mai scurtă distanță între muchile MN și PQ, fiind perpendiculară pe aceste drepte, va fi perpendiculară și pe paralelele lor CF și FE, deci pe planul: CDEF.



Dacă prin AB și PQ se duce un plan, acest plan va tăia fața MNQ dupe dreapta QB, iar planul CDEF dupe dreapta OH. Punctele C și D fiind la mijlocul muchilor MQ și NQ, rezultă că H va fi la mijlocul lui BQ; PQ fiind paralel cu planul CDEF, OH va fi paralel cu PQ, deci:

$$AO = BO.$$

Fie A′ mijlocul muchiei PQ, unesc acest punct cu C, D, E și F. Poliedrul A′CDEFP este o prismă, căci laturile A′C și A′D sînt respectiv egale și paralele cu: FP și EP, prin urmare:

$$vol.\ A'EFP = \frac{1}{3}\ vol.\ A'CDEFP$$

sau:

$$vol.\ A'EFP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\ \overline{AO} \times supr.\ CDEF,$$

Poliedrul CDEFA′Q este de asemenea o prismă al cărui volum este:

$$\frac{1}{2}\ \overline{AO} \times supr.\ BDEF.$$

Prin urmare volumul poliedrului: CDEFPQ va fi:

$$\frac{l}{6}\ \overline{AO} \times supr.\ CDEF + \frac{1}{2}\ AO \times supr.\ CDEF$$

$$= \frac{2}{3}\ \overline{AO} \times supr.\ CDEF.$$

In mod analog se poate arăta că volumul poliedrului: CDEFMN este egal cu:

$$\frac{2}{3}\ BO \times supr.\ CDEF.$$

Prin urmare volumul tetraedrului total va fi:

$$\frac{2}{3}\overline{AB} \times supr.\ CDEF. \qquad \text{C.C.T.D.}$$

D-l *V. Oprișanu* (Bacalaureat, Ploești) a rezolvit această chestiune în ipoteza că tetraedrul este bidreptunghiu. A mai resolvat această problemă și D-l Em. Blondel (Liceul din Berlad).

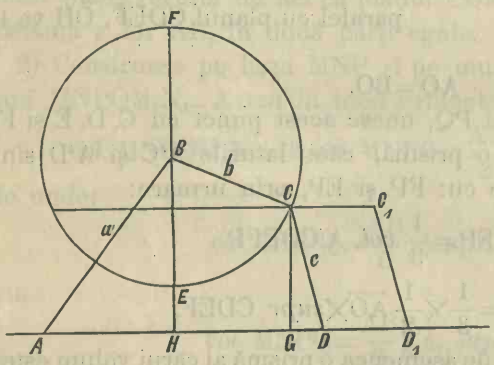
Problema 186. — *Să se construească un patrulater, cunoscînd trei laturi și unghinrile adiacente celei de a patra latură.* (I. Moscuna.)

Soluțiune dată de D-nii E. Melencovici (Student), *St. N. Corbeanu* (T.-Severin), *C. Popovici, G. Dragu, Victor Ionescu, A. Toussaint* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele) și *Gh. C. Dobrovici* (Elev în Clasa VI a Liceului din Berlad).

Presupunem că avem un patrulater ABCD, în care se cunosc:

$$AB = a,$$
$$BC = b,$$
$$CD = a,$$

și unghiurile A, D și se cere să 'l construim.



Pe o dreaptă îndefinită Δ, în un punct A se formează un unghiu cît unghiul A dat și pe direcția așa determinată se ia $AB = a$. Din punctul B ca centru și cu o rază cît $BC = b$ se descrie o circonferință. Al treilea vîrf C al patrulaterului se va afla unde-va pe acest cerc. In un punct oare-care al dreptei Δ, D_1 de exemplu, se formează un unghiu cît D dat și pe direcția aceasta se ia un segment $D_1C_1 = c$; prin C_1 se duce o paralelă la Δ; numărul punctelor de intersecție ale acestei drepte cu cercul B, va fi numărul de soluțiuni, ce respund la cestiune. Dacă C este un punct de intersecție, atunci din C ducînd o paralelă la C_1 D_1 va da cu Δ un punct D de intersecție, care va fi al patrulea vîrf al patrulaterului cerut.

Discuțiune. Să vedem cazurile în care problema admite sau nu admite soluțiuni și numărul lor.

Din C coborăm pe Δ o perpendiculară CG, iar din B o perpendiculară BH, care tae circonferența B în punctele E, F. Avem imediat:

$$CG = c\sin\delta,\ HE = a\sin\alpha - b,\ HF = a\sin\alpha + b.$$

Dacă C_1C nu tae cercul B, nu avem nici o soluție; dacă e tangentă avem o soluție și în fine dacă îl tae avem două soluțiuni. Prin urmare:

I cînd $c\sin\delta > a\sin\alpha + b$ sau $c\sin\delta < a\sin\alpha - b$ } nici o soluție,

II cînd $c\sin\delta = a\sin\alpha + b$ sau $c\sin\delta = a\sin\alpha - b$ } o singură soluție,

III cînd $a\sin\alpha + b > c\sin\delta > a\sin\alpha - b$ } 2 soluțiuni.

Caz particular. Cînd $(b+c)\sin\delta = a\sin\alpha$, laturile BC, CD sînt în prelungire și patrulaterul devine un triunghiu.

A mai rezolvit problema D-nii *Badea Paraschivescu* și *C. Vintilă*.

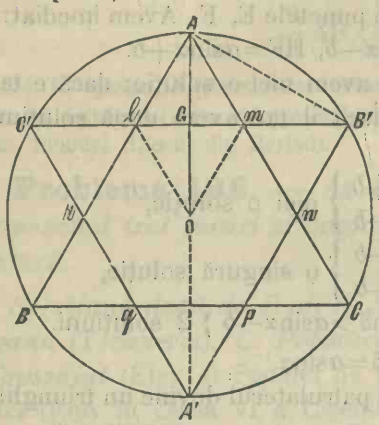
Problema 190. — *Se înscriu într'un cerc două triunghiuri ecuilaterale, ast-fel ca crestetele unuia să se afle la jumătatea arcelor subîntinse de laturile celui-l'alt triunghiu; să se găsească aria comună celor două triunghiuri în funcție de raza cercului.* (Corneliu Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii A. Toussaint (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, *C. Vintilă* (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab), *Corneliu Ionescu* (Iași), *George Penescu* (Student, București), *I. Moscuna* (Bacalaureat, București), *J. Wittner* (Elev în Clasa VII a Liceului Unirea din Focșani), *G. Giușcă* (București), *B. Paraschivescu* (Elev în Clasa VII a Liceului din Ploești), *L. Herman* (Elev în Clasa VI a Liceului Matei Basarab); *St. N. Corbeanu* (T.-Severin); *L. I. Rădulescu* (Elev în Clasa VI a Liceului St. Petru și Pavel, Ploești); *M. D. Balassan* (Elev în Clasa VII a Liceului Național din Iași); *Gr. Ruptureanu* (Elev în Clasa VII a Liceului Matei Basarab); *V. Cambureanu* și *Gh. Dobrovici* (Elevi ai Liceului din Berlad).

Fie ABC primul triunghiu și A'B'C' al doilea triunghiu, și *lmnpqr* exagonul format prin intersecția laturilor celor două triunghiuri.

Mai întâi se observă, că triunghiurile A*lm*, B'*mn*, C*np*, etc., sînt ecuilaterale, ca avînd fie-care triunghiu unghiurile cu aceași măsură; apoi triunghiurile A*m*B', B'*n*C, C*p*A', etc..., sînt isoscele pe

de o parte, ca avînd 2 unghiuri de aceaşi măsură, şi egale între ele pe de altă parte, ca avînd o latură egală (latura exagonului înscris în cercul dat) adiacentă la două unghiuri egale; din cele zise rezultă, că poligonul *lmnpqr* este un exagon regulat, a cărui latură este $\frac{1}{3}$ din latura triunghiului echilateral ABC. Triunghiul *Olm* fiind egal cu *lAm* figura *OlAm* este un romb şi deci apotema exagonului *lmnpqr* este cît $\frac{1}{2}$ R (R e raza cercului); însemnînd cu S aria acestui exagon avem imediat:



$$S = 6R\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{R}{4} = \frac{1}{2} R^2\sqrt{3}.$$

Observaţiune. Expresiunea lui S se poate scrie: $\frac{R}{2}.R\sqrt{3}$, adică ecuivalentă cu un triunghiu ca AA'B', cu baza $\sqrt{3}.R$ şi cu înălţimea R. Asemenea se poate calcula suma porţiunilor remase între cerc şi cele două triunghiuri, care sumă este cît diferenţa între aria cercului şi de două ori aria exagonului *lmnpqr*, adică:

$$R^2(\pi - \sqrt{3}).$$ (J. Wittner.)

Observaţiune. Procedînd în mod analog, cînd ni se dă un poligon convex regulat de n laturi, obţinem un alt poligon regulat de $2n$ laturi, a cărui suprafaţă în funcţie de raza R a cercului circumscris primului poligon, este:

$$S = 2nR^2\cos^2\frac{\pi}{n} tg\frac{\pi}{2n}.$$ (I. Moscuna.)

***Problema 191.** — *Să se demonstreze că numărul 1653 poate fi descompus, într'o sumă de trei numere impare consecutive în trei moduri şi să se găsească acele descompuneri.* (C. Miclescu.)

Soluţie dată de D-nii: I. Moscuna (Bacalaureat, Bucureşti) şi *A Iliovici* (Student, Iaşi).

Fie x primul număr al unuia din șirurile de numere impare consecutive a căror sumă este egală cu 1653. Exprimînd prin n numărul de numere impare, șirul se poate scrie:

$$x, x+2, \ldots . x+2n-2$$

iar suma lor: $n(x+n-1)=1653.$

Numerile x și n fiind întregi, n trebue să fie un divizor al lui 1653, adică unul din numerile:

1, 3, 19, 29, 57, 87, 551, 1653.

Pentru $n=1$, șirul se reduce la un singur număr: 1653.

Făcînd însă pe n succesiv egal cu 3, 19, 29, obținem pentru x trei valori întregi impare și pozitive: 549, 69, 29. Cele-l'alte valori ale lui n, dînd pentru x valori negative, rezultă că numărul 1653 nu poate fi descompus de cît în trei moduri într'o sumă de numere impare consecutive. Aceste descompuneri sînt:

549, 551, 553
69,71, . . . 105
29,31, . . . 85.

Soluție dată de D-l G. Iliovici (Elev în Clasa VI, Liceul Iași).

Dacă se înseamnă cu a primul termen al șirului, cu l ultimul termen, cu n numărul termenilor; trebue să avem:

$$1653=\frac{a+l}{2}.n,$$

a și l fiind impari, $\frac{a+l}{2}$ este un număr întreg și reprezintă tocmai termenul de la mijlocul șirului, însemnînd cu m acest număr, trebue să avem:

$$1653=m.n$$

sau:

$$m=\frac{1653}{n}=\frac{3.19.29}{n}$$

n și m trebuind să fie pozitive și $n<m$, pentru ca șirul în care se descompune numărul 1653 să aibă toți termenii pozitivi, rezultă că n, nu poate avea de cît una din valorile:

3, 19, 29

de unde: $m=19.29,\quad 3.29,\quad 3.19.$

D-l *V. Oprișanu* (Bacalaureat, Ploești), a găsit numai unul din modurile de descompunere. S'a primit asemenea de la D. V. Cambureanu, (Berlad) o foarte bună soluție a acestei probleme; lipsa de loc ne împedică de a o publica.

A se vedea pentru soluțiunea generală a acestei chestiuni, articolul D-lui *I. Moscuna* publicat în numărul de față al *Gazetei Matematice.*

Problema 193. — *In vîrfurile unui triunghiu aplicăm forțe invers proporționale cu înălțimele respective și dirigiate dupe acele înălțimi, de la vîrf spre bază. Să se demonstreze că triunghiul rămîne în echilibru și să se conchidă că înălțimele trec prin acelaș punct.* (I. Ionescu.).

Soluție dată de D-nii: A. Toussaint (Elev al Școalei de Poduri și Șosele) și *Al. Em. Melencovici* (Student, București).

Fie a, b, c laturile triunghiului h, h', h'' înălțimile corespunzătoare. Forțele aplicate în vîrfurile triunghiului fiind invers proporționale cu înălțimile, cari sînt ele însăși invers proporționale cu laturile triunghiului, rezultă că forța aplicată în fie-care vîrf, va fi proporțională cu latura opusă acestui vîrf.

Dacă printr'un punct oare-care din plan, se duc drepte proporționale cu laturile triunghiului dat, și paralele cu înălțimile acestuia, se va obține evident un alt triunghiu asemenea cu cel dat, și a cărei direcțiune de laturi, vor face unghiuri de 90°, cu laturile corespunzătoare din triunghiul dat. Deci rezultanta celor trei forțe este nulă. Pentru echilibru trebue încă, ca suma momentelor lor, în raport cu un punct oare-care să fie nulă.

Fie: $\mathfrak{M}h$ momentul forței îndreptată dupe înălțimea h, în raport cu unul din vîrfuri, s. ex. în raport cu C, trebue să avem:

$$\mathfrak{M}h+\mathfrak{M}h'+\mathfrak{M}h''=o \qquad (1)$$

însă:

$$\mathfrak{M}h=a.\overline{CD}$$
$$\mathfrak{M}h'=-b.\overline{CE}$$
$$\mathfrak{M}h''=o.$$

D și E fiind picioarele înălțimelor h și h'. Or din asemănarea triunghiurilor: ACD și ABE, avem:

$$\frac{a}{\overline{CE}}=\frac{b}{\overline{CD}}.$$

Deci egalitatea (1) este satisfăcută și triunghiul este în echilibru.

Cele trei forțe făcîndu-și echilibru, rezultă că ele sînt concurente, deci înălțimele unui triunghiu sînt trei drepte concurente.

D-nii *I. Sichitiu* și *C. Țițirigă* (Elevi în Școala fiilor de Militari. Craiova) au rezolvit această chestiune în ipoteza, că se știe dinainte că cele trei înălțimi ale triunghiului sînt concurente. Soluțiunea dată de D-lor, în această ipoteză, fiind foarte simplă, o reproducem aci:

Fie P, Q, R forțele aplicate în A, B, C (vîrfurile triunghiului). Cele-l'alte notațiuni fiind aceleași ca mai sus, avem:

$$\frac{P}{\frac{1}{h}} = \frac{Q}{\frac{1}{h'}} = \frac{R}{\frac{1}{h''}}.$$

Pe de altă parte: $ah = a'h' = a''h''$

sau:
$$\frac{a}{\frac{1}{h}} = \frac{a'}{\frac{1}{h'}} = \frac{a''}{\frac{1}{h''}}$$

deci:
$$\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}.$$

Dacă în relațiunea:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

se înlocuește a, b, c prin cantitățile proporționale, avem:

$$P^2 = Q^2 + R^2 - 2QR\cos A.$$

Această relație arată că forța P este egală în valoare absolută cu rezultanta forțelor Q și R; pe de altă parte ele fiind concurente, și una din ele de sens opus cu rezultanta celor-alte două, rezultă că cele trei forțe își fac echilibru.

PROBLEME PROPUSE

*234. Fie A'B'C' triunghiul format de picioarele înălțimilor triunghiului ABC; a, b, c, a', b', c' punctele unde dreapta dusă prin punctul de întîlnire H al înălțimilor perpendicular pe diametrul OH al cercului circumscris, întîlnește respectiv laturile triunghiului ABC și A'B'C'. Să se demonstreze că:

$$Ha = 2Ha', \quad Hb = 2Hb', \quad Hc = 2Hc'.$$ (G. Țițeica.)

235. Prin extremitățile diametrului perpendicular pe una din asimptotele unei hiperbole se duce un cerc oare-care, care taie curba în alte două puncte H și H' și diametrul perpendicular pe cea-l'altă asimptotă în punctele: D, D'.

Să se demonstreze că figura H H' D D' e un dreptunghiu al cărui centru coincide cu al cercului. (C. Lupu.)

236 Se dă un cerc O și un punct P; să se determine ecuația și să se construească curba, pe care se află punctele M, M', intersecțiunile unei drepte ce trece prin P cu perpendicularele duse în O la razele punctelor de intersecție ale dreptei PMM' cu cercul O. (Bogdan Ionescu.)

*237. Se dă un pătrat ABCD cu latura a. In A se formează un unghiu DAG în interiorul patratului, dublu cît DAE, E fiind mijlocul laturei CD; din punctul G, $AG = a$, se duce o paralelă la AD, care taie în F pe AE; să se arate că:

1) CF e egală și paralelă la BG;

2) Aria paralelogramului BCFG e egală cu $\frac{1}{5}$ din aria patratului. (BOGDAN IONESCU.)

*238. Să se găsească cel mai mic număr, care multiplicat cu 48 ne dă un produs terminat cu trei zero. Generalizare:

Să se găsească cel mai mic număr, care multiplicat cu un număr dat a, ne dă un produs terminat cu n zero.

(A. G. IOACHIMESCU.)

*239. Înălțimile unui triunghiu ABC întâlnesc cercul circumscris triunghiului respectiv în punctele A'B'C'. Să se afle suprafața triunghiului A'B'C' în funcție de raza cercului și unghiurile triunghiului dat.

Formula obținută să fie calculabilă prin logaritmi. (C. ȚIȚIRIGĂ.)

*240. Pe o dreaptă dată AB se ia un punct oare-care C. Din C ca centru, cu CB ca rază, se descrie o circonferință care taie dreapta AB într'un al doilea punct F, iar din A se duce o tangentă AD la această circonferință, punctul de contact fiind D. Se cere să se afle: 1) Maximul suprafeței descrise de dreapta AD prin rotația sa în jurul lui AB; 2) Maximul volumului născut de triunghiul ADF prin rotația sa în jurul dreptei AB. (A. ILIOVICI.)

*241. $64^n+40^n-5^n-8^n$,

e divizibil cu 91 când $n=2k+1$ și cu 63 când $n=2k$. (J. WITTNER.)

*242. Să se rezolve ecuațiunea:

$$3tg^2x=2\cos^2x-\sin x.$$ (I. IONESCU.)

ERATA:

Pag. 213 rîndul 11 de jos, în loc de A'C>A'B să se citească AC'<A'B
„ 213 „ 9 „ „ „ „ „ subunitar „ „ „ supraunitar

Reproducem din nou chestiunile 228, 230 și 231 în care s'aŭ strecurat mai multe erori de tipar:

228. Să se probeze că curba:

$$(x+b)(y+a)^3=(y+b)(x+a)^3$$

este unicursală și să se găsească expresiunea coordonatelor în funcțiune rațională de un parametru. (A. G. IOACHIMESCU.)

*230 Să se simplifice:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)\left(x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x^2y^2}\right)$$ (J. WITTNER.)

*231. Să se rezolve:

$$(\log 4x^2)^2-10(\log 18x)+4=0.$$ (I. IONESCU.)

ASUPRA UNEI CLASE DE CURBE UNICURSALE.

Se știe că o curbă se zice că este unicursală, cînd cele două coordonate ale sale se pot exprima prin funcțiuni raționale de un acelaș parametru. Teoretic este tot-d'auna posibil a recunoaște dacă o curbă algebrică dată, este sau nu unicursală; însă aplicarea criteriului, dupe care se face această recunoaștere, este în genere dificilă și calculele lungi: de aceia în aplicațiuni se preferă, de cele mai multe ori, a se procede prin încercări directe.

Chestiunea ce urmează nu este nouă. Ea nu este alt ceva de cît prezentarea sub formă elementară, și aplicarea la cîte-va cazuri particulare, a unora din rezultatele unei teorii generale, relativă la transformările biraționale (transformări *Cremona* și conservarea *genului.*)

— 1. *Fie:*

$$F(X,Y)=o \tag{1}$$

ecuațiunea unei curbe algebrice, dacă se pune:

$$X=\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma};\quad Y=\frac{a'x+b'y+c'}{\alpha' x+\beta' y+\gamma''} \tag{2}$$

curba (1) *se transformă într'o curbă:*

$$f(x,y)=o; \tag{3}$$

dacă curba $f=o$ *este unicursală, curba* $F=o$ *va fi de asemenea unicursală.*

Intr'adevăr curba $f=o$ fiind unicursală, coordonatele sale (x, y) sînt funcțiuni raționale de un parametru t; or în virtutea relațiunilor (2), rezultă că și (X,Y) vor fi funcțiuni raționale de acelaș parametru: deci și curba $F=o$ va fi unicursală.

Reciproca acestei teoreme este de asemenea adevărată, căci dacă (X,Y) sînt funcțiuni raționale de un parametru, rezultă evident, după relațiunile (2), că și (x,y) vor fi funcțiuni raționale de acelaș parametru: deci cele două curbe vor fi în acelaș timp unicursale, daca una din ele este unicursală.

Din cele ce preced rezultă un mijloc simplu, de a recunoaște dacă o curbă dată este unicursală. Se face o substituție analoagă cu cea indicată prin formulele (2), și se caută a se determina coeficienți a, a'..... ast-fel ca ecuațiunea propusă să se reducă la un

tip cunoscut de curbe unicursale. Bine înțeles însă, că întrebuințarea acestei metode poate să nu reușească; iar din nereușita ei, nu putem conchide că curba dată nu este unicursală.

— 2. Să aplic aceste generalități la curba de gradul IV:

$$(4)\quad FX^2Y^2+2EX^2Y+2DXY^2+CX^2+2BXY+AY^2=o.$$

Această curbă este unicursală, căci dacă se înlocuește (X,Y) respectiv prin: $\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{y}$, se obține conica:

$$(5)\quad f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=o,$$

care este o curbă unicursală.

Iată un procedeu pentru a obține coordonatele acestei conice în funcțiune rațională de un parametru. Pun:

$$(6)\qquad x=\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)},\quad y=\frac{\psi(t)}{\psi_1(t)},$$

φ, φ_1, ψ și ψ_1 fiind niște polinoame, care le voiu determina prin condițiunea ca introducîndu-le în (5), $f(x,y)$ să se reducă identic la zero. Toate aceste polinoame trebue să fie de gradul II în raport cu t, iar: $\varphi_1(t)=\psi_1(t)$.

Intr'adevăr curba (5) fiind de gradul II, o dreaptă oare-care din plan, la distanța finită sau infinită, nu poate să tae curba de cît în două puncte reale sau imaginare: or rădăcinele polimoanelor φ, φ_1..... ne dă valorile lui t, corespunzătoare punctelor de intersecție ale curbei, cu axa Ox, sau cu Oy, sau cu dreapta de la infinit; cum nu putem avea de cît două puncte de intersecție cu fie-care din aceste drepte, polinoamele φ, φ_1.... trebue să fie de gradul al doilea. Pe de altă parte într'o conică, x și y devin în acelaș timp infiniți, deci $\varphi_1(t)$ și $\psi_1(t)$ trebue să aibă aceleași rădăcini; prin urmare făcînd abstracție de un factor constant, care 'l putem presupune trecut la numărător, va trebui să avem:

$$\varphi_1(t)=\psi_1(t)\ ^1).$$

Fie deci:

$$\varphi(t)=at^2+bt+c$$
$$\varphi_1(t)=\psi_1(t)=a''t^2+b''t+c''$$
$$\psi(t)=a't^2+b't+c'.$$

---

[1]) Se poate ajunge la acelaș rezultat, și determina funcțiunile φ, φ_1 dacă se considera conica ca fiind generată, prin intersecția razelor corespunzătoare, a două fascicole de drepte proective.

Dacă în relaţiunea (5) se înlocueşte x şi y prin $\frac{x}{z}$ şi $\frac{y}{z}$, $f(x,y)$ se transformă într'o funcţiune omogenă de gradul al II-lea $f(x,y,z)$, şi dacă se fac substituţiile indicate mai sus se găseşte:

$$f(x,y,z)=f(a,a',a'')t^4+[bf'_a+b'f'_{a'}+b''f'_{a''}]t^3$$
$$+[cf'_a+c'f'_{a'}+c''f'_{a''}+f(b,b',b'')]t^2$$
$$+[bf'_c+b'f'_{c'}+b''f'_{c''}]t+f(c,c',c'')=o.$$

Egalînd cu zero fie-care din coeficienţi lui t, obţinem 5 relaţiuni de condiţie, la care trebue să satisfacă cei 9 coeficenţi: $a,a',a'',\ldots\ldots$; prin urmare, în genere, 5 oare-care din aceşti cceficienţi, se vor determina în funcţiune de cei-lalţi 4, care rămîn arbitrari. Anularea coeficienţilor lui: t^4,t^3,t şi termenului liber, au o interpretare geometrică foarte simplă:

$$f(a,a',a'')=o$$
$$f(c,c',c'')=o$$

înseamnă că rapoartele $\frac{a}{a''}$, $\frac{a'}{a''}$ trebue să fie luate egale cu coordonatele unui punct dupe curbă; de asemenea rapoartele $\frac{c}{c''}$, $\frac{c'}{c''}$ trebuesc să fie luate egale cu coordonatele unui alt punct dupe curbă.

$$bf'_a+b'f'_{a'}+b''f'_{a''}=o$$
$$bf'_c+b'f'_{c'}+b''f'_{c''}=o$$

înseamnă că rapoartele $\frac{b}{b''}$, $\frac{b'}{b''}$ trebuesc luate egale cu coordonatele polului dreptei, care uneşte punctele:

$$\left(\frac{a}{a''},\frac{a'}{a''}\right);\quad \left(\frac{c}{c''},\frac{c'}{c''}\right).$$

Rapoartele precedente fiind ast-fel determinate, substituind în coeficientul lui t^2, vom avea o relaţie de condiţie între a'',b'',c'', care va determina una din aceste cantităţi în funcţiune de cele-l'alte două. Bine înţeles că rămîn arbitrare şi cele două puncte luate pe curbă.

Să aplic acestea la curba:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1.$$

Eau ca puncte fixe, extremităţile axei dirigiate dupe Ox, (presupun, ceia ce este permis, că $p>o$), polul acestei drepte este la infinit în direcţia axei Oy, deci:

$$\frac{a}{a''}=+\sqrt{p},\quad \frac{a'}{a''}=o,$$
$$\frac{c}{c''}=-\sqrt{p};\quad \frac{c'}{c''}=o,$$
$$\frac{b}{b''}=o;\quad \frac{b'}{b''}=\infty.$$

De aci deducem:

$$a=a''\sqrt{p},\quad c=-c''\sqrt{p}$$
$$a'=o,\quad c'=o,\quad b=o,\quad b''=o.$$

Coeficientul lui t^2, este în cazul acesta:

$$\frac{2ac}{p}+\frac{2a'c'}{q}-2c''a''+\frac{b^2}{p}+\frac{b'^2}{q}-b''^2=o$$

sau:

$$\frac{b^2}{q}-4a''c''=o$$

de unde:

$$b=2\sqrt{a''c''q''}.$$

Deci:

$$x=\sqrt{p}\frac{a''t^2-c''}{a''t^2+c''}$$

$$y=\sqrt{q}\frac{2\sqrt{a''c''}t}{a''t^2+c''}$$

făcînd: $$a''=c''$$

se găsesc formulele relative la elipsă:

$$x=\sqrt{p}\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$y=\sqrt{q}\frac{2t}{t^2+1}$$

Dacă $q<o$, nu avem de cît să luăm:

$$a''=-c''$$

şi găsim formulele relative la iperbolă:

$$x=\sqrt{p}\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$y=\sqrt{-q}\frac{2t}{t^2-1}.$$

Din cele ce am văzut la început, rezultă că și curba:

$$pX^2+qY^2=pqX^2Y^2$$

va fi unicursală, iar coordonatele sale pot fi reprezentate prin:

$$X=\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{t^2+1}{t^2-1}, \qquad Y=\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{t^2+1}{2t}$$

sau

$$X=\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad Y=\frac{1}{\sqrt{-q}}\frac{2t}{t^2-1}$$

după cum: $q \gtrless o.$

-- 3. Curbele reprezentate printr'o ecuațiune de forma:

$$P^{m-1}H+Q^{m-1}K=o$$

în care P,Q,H,K sînt funcțiuni liniare de x,y; sînt curbe unicursale.

In adevăr putem tot-d'a-una determina, două cantități α, α' astfel ca raportul:

$$\frac{H-\alpha P}{K-\alpha' Q}$$

să fie independent de x și y. Putem atunci scrie:

$$H-\alpha P=\beta R$$
$$K-\alpha' Q=\beta' R.$$

R fiind o funcțiune liniară. Dacă se elimina H și K, ecuațiunea curbei date devine:

$$P^{m-1}(\alpha P+\beta R)+Q^{m-1}(\alpha' Q+\beta' R)=o.$$

Punînd:

$$X=\frac{P}{R}, \qquad Y=\frac{Q}{R}.$$

Curba dată se transformă în curba:

$$\alpha X^m+\alpha' Y^m+\beta X^{m-1}+\beta' Y^{m-1}=o$$

care este unicursală, deci cea propusă va fi de asemenea unicursală.

A. G. Ioachimescu.

CÎTE-VA SERII

In tomul al III-lea din *Cursul de Matematici* al D-lui *Ch. de Comberouse*, este propusă următoarea chestiune:

O serie cu termeni pozitivi:

$$u_1+u_2+.....+u_n+...$$

în care produsul $n\,u_n$ *nu tinde către zero, este necesar divergentă.*

Îmi propun a da aci demonstrarea acestei teoreme, și a aplica rezultatele obținute, la cîte-va serii.

Se știe că fiind date două serii:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+...$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+...$$

daca raportul între termeni corspunzători ai celor două serii, tinde către o limită, finită și diferită de zero, cele două serii sînt în acelaș timp convergente sau divergente. Or dacă într'o serie produsul $n\,u_n$ nu tinde către zero, putem scrie:

$$lim\ n\,u_n = lim\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = K \ldots\ldots K > o$$

$\frac{1}{n}$ fiind termenul general al seriei armonice, care este divergentă, seria propusă va fi ea însăși divergentă.

Mai general dacă avem:

$$lim\ n^{\alpha}u_n = K \qquad K > o.$$

Seria u_n va fi convergentă, dacă $\alpha > 1$, și divergentă pentru: $\alpha \leq 1$. Aceasta rezultă din compararea seriei date, cu seria al cărui termen general este: $\frac{1}{n^{\alpha}}$.

1) Să studiem seria:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{3^2}{4^3}+.....+\frac{(2n-1)^n}{(2n)^{n+1}}+....$$

formăm produsul $n\,u_n$, și avem:

$$lim.\ n\,u_n = \frac{1}{2}lim.\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n = \frac{1}{2\sqrt{e}},$$

seria este deci divergentă. Observ însă că această serie divergează mai încet ca seria armonică, căci:

$$\frac{1}{2\sqrt{e}} < 1.$$

2) Fie seria:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{3^{2+\alpha}}{4^3} + \ldots + \frac{(2n-1)^{n+\alpha}}{(2n)^{n+1}} + \ldots$$

în care $\alpha > o$. Această serie este evident divergentă, căci termeni ei sînt mai mari, ca ai seriei precedente. Pentru acelaș motiv seria:

$$\frac{1}{2^{2-\alpha}} + \frac{3^2}{4^{3-\alpha}} + \ldots + \frac{(2n-1)^n}{(2n)^{n+1-\alpha}} + \ldots$$

este divergentă.

3) Fie seria:

$$\frac{2+a}{2^2} + \frac{(3+a)^2}{3^3} + \ldots + \frac{(n+a)^{n-1}}{n^n} + \ldots$$

Avem aici:

$$lim.\ n\,u_n = lim.\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n+a} = e^a$$

prin urmare seria propusă este divergentă ori-care ar fi a.

4) Seria:

$$\frac{2^2}{2^2} + \frac{3^3}{4^3} + \ldots + \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^{n+1}} + \ldots$$

este convergentă, căci avem:

$$lim.\ n^p u_n = o$$

ori-care ar fi valoarea pozitivă a lui p, prin urmare termeni săi fiind mai mici ca aceia ai unei serii convergente, este ea însăși convergentă.

Al. Em. Melencovici.

Nota. Se poate aplica criteriul de mai sus, pentru a găsi condițiunea de convergență a seriei, al cărui termen general este:

$$u_n = \frac{f(n)}{F(n)}$$

f și F fiind două polinoame.

Fie p și q gradele polinoamelor f și F. Pentru ca seria să fie convergentă

trebue ca p și q să fie ast-fel în cît să putem determina un număr $\alpha > 1$, pentru care:

$$lim.\ n^{\alpha}.u_n = K \qquad K > o.$$

(Putem în tot-d'a-una presupune că am luat pe n destul de mare ast-fel ca u_n să aibă necontenit același semn, plus s. ex.). Va trebui deci să avem:

$$p+\alpha=q$$

Cum

$$\alpha > 1$$

$$p \leq q-2.$$

Adică gradul numărătorului să difere cu două unități cel puțin de gradul numitorului.

Cu această ocazie atragem atenția cititorilor asupra chestiunei 22, din No. 2, Anul I al Gazetei, care nu a fost rezolvită pînă acum și care intră aproape în același ordin de idei. A. G. I.

Chestiuni de matematici propuse la examenul inscris de bacalaureat.

(Sesiunea Iunie 1897, București).

a) Bacalaureat clasic.

1) Să se rezolve sistemul de ecuație:

$$\frac{x-y}{6}+\frac{x+y}{2}=4$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=4.$$

2) Înălțimea unei prisme drepte este de 10 cm.; fie-care bază e un dreptunghiu, în care o latură e îndoită de cealaltă, suprafața totală e de 216 cmp.; se cere:

a) Dimensiunele și suprafața celor două baze,

b) Aria fie-cărei fețe laterale.

3) Să se calculeze expresia:

$$a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$$

știind că:

$$tg\theta=\frac{b}{a}.$$

(Timpul acordat 3 ore).

b) Bacalaureat real.

1) Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x+y=65$$

$$\log.x+\log.y=3.$$

2) Intr'un triunghiu dreptunghiu ipotenuza e de $15^{m}.00$ și suprafața de $54^{mp},60$. Să se calculeze laturile unghiului drept.

3) Să se demonstreze relația:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=2\operatorname{tg}2a.$$

(Timpul acordat 3 ore).

Notă. In numărul viitor vom publica soluțiunele date chiar la examen, de D-l *Constantin Coculescu* (de la liceul din Pitești), și de D-l *Alexandrescu Temistocle Ioan* (de la liceul Mihaĭ-Viteazu, București) pentru bacalaureatul clasic; și de corespondentul nostru *Marin Mateescu* (de la liceul Turnu-Severin) pentru bacalaureatul real: Singuri care au rezolvit complect toate chestiunile.

Probleme propuse în examenele de la Facultatea de matematice.

(Bucurescĭ)

Algebra superioară.

1) Dîndu-se ecuația:

$$x^3+px+q=o,$$

cu rădăcinele α, β, γ, să se afle ecuația, a cărei rădăcini să fie:

$$\alpha^2-\beta\gamma, \quad \beta^2-\gamma\alpha, \quad \gamma^2-\alpha\beta.$$

2) Să se studieze variația rădăcinelor ecuației:

$$x^4-4x^3+16x+a=o,$$

cînd a variază între $-\infty$ și $+\infty$.

Geometrie analitică.

Plană.

Să se afle locul vîrfurilor parabolelor, cari trec prin punctul cu coordonatele 0,1, și sînt tangente la axul ixurilor și bisectrița unghiului axelor coordonate.

Spațiu.

Ecuația generală a cuadricelor, cari trec prin două drepte. Să se determine, cari sînt dintre acestea suprafețele de revoluție și locul axului acestora, cînd una din cele două drepte se mișcă în un plan.

Calcul infinitesimal.

Calcul diferențial.

Spirala logaritmică fiind secțiunea dreptă a unui cilindru, să se scrie ecuația helicei, ce se află pe acest cilindru; să se arate că ea este și pe un con de revoluție și că formează un unghiu constant cu generatricele conului.

Calcul integral.

Dacă ω este unghiul ce face raza vectorie OM, în un punct M a unei curbe

cu OX, (axa absciselor) și α unghiul ce formează tangenta la curbă în acel punct cu axa OX, să se determine ecuația curbei, când:

$$\omega = 3\alpha.$$

Chestiunile propuse la școala normală de institutori, pentru obținerea diplomei de capacitate

(Iunie 1896—97).

1) Cine-va are două polițe, una de 1200 lei, care espiră peste un an și 5 luni, cu procent de 8% pe an; alta, de 3300 lei, care espiră peste 2 ani și 7 luni, cu procent 5% pe an; el vrea să le schimbe într'o singură poliță de 4500 lei, care să espire peste 2 ani. Cu ce procent trebue s'o pună, ca nici să piardă, nici să cîștige?

2) Rădicarea planului cu busola.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 170.** — *Un arendaș plătește pentru secératul grîului 1,10 lei de claie, claia trebuind să aibă 26 snopi, iar snopul să fie de 4 palme (lungimea legăturei). Un lucrător face 73 clăi și 8 snopi, însă claia de 28 snopi și snopul numai de 3 palme. Ce sumă va primi acel lucrător.*

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: Th. M. Vladimirescu (Rîmnicul-Vîlcei) *G. Penescu* (Student, București) și *V. Cambureanu* (Berlad).

Putem considera legătura snopului ca fiind circulară, și în acest caz este evident că conținutul unui snop este proporțional cu aria cercului corespunzător. Razele circonferințelor de 4 și de 3 palme fiind $\frac{4}{2\pi}$ și $\frac{3}{2\pi}$, ariile cercurilor corespondente vor fi $\pi\left(\frac{4}{2\pi}\right)^2$ și $\pi\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2$, cari fac respectiv $\frac{4}{\pi}$ și $\frac{9}{4\pi}$. De aci rezultă că raportul între conținutul unui snop de 3 palme și altul de 4 palme este: $\frac{9}{4\pi} : \frac{4}{\pi} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$. Așa dar în acest raport trebuește redusă și plata unei clăi de 26 snopi, însă de 3 palme snopul. Prin urmare lucrătorul va primi de fie-care claie de 26 snopi suma

[1]) Problema 190 a fost rezolvită și de D-nu *I. Penescu* (București).

$1{,}10 \times 0{,}5625 = 0{,}61875$. El însă făcînd clăile de 28 snopi, la fiecare claie îi prisosește 2 snopi. Deci lui îi prisosește în total $2 \times 73 + 8 = 154$ snopi cari fac 5 clăi de 26 snopi și încă 24 snopi. Deci lucrătorul a făcut în definitiv $73 + 5 = 78$ clăi și 24 snopi. El va primi deci:

$$78\frac{24}{26} \times 0{,}61875 = 48{,}80 \text{ lei},$$

eroarea fiind mai mică ca 1 ban.

Soluțiune dată de D-l I. Penescu (București).

Este evident că pentru plata secerătorilor arendașul va trebui să aibă în vedere cantitatea de grîu secerat, și dacă presupunem că, peste tot, firele de grîu sînt uniform respîndite pe teren atunci plata unui secerător va fi proporțională cu aria suprafeței secerată de dînsul. Valoarea absolută a rarității sau desimei firelor nu are nici o importanță pentru calculul nostru, de oare-ce am presupus'o aceiași peste tot. Prin urmare putem presupune că *1 snop de 4 palme provine din securarea unui stînjen patrat.* Așa dar putem zice că arendașul plătește 1,10 lei pentru secerarea a 26 stînjeni pătrați. Să calculăm acum cîți stînjeni pătrați a secerat lucrătorul în chestiune. Numărul snopilor seceraţi de el este $73 \times 28 + 8 = 2052$. Snopul lui fiind însă numai de 3 palme, nu provine din secerarea unui întreg stînjen patrat, ci a unei suprafețe mai mici. Să căutăm această suprafață. Figurile formate de legăturile a doui snopi diferiți sînt asemenea și prin urmare ariile acelor două figuri sînt proporționale cu patratele perimetrelor lor, adică în cazul nostru cu patratele legăturilor. Dar conținutul unui snop depinde de aria închisă de legătura lui. Deci conținutul snopilor de 4 și de 3 palme, și prin urmare ariile suprafețelor din cari s'au secerat acei snopi sînt proporționale cu 4^2 și 3^2, adică cu 16 și 9. Așa dar dacă un snop de 4 palme provine din secerarea a $\frac{9}{16} = 0{,}5625$ stînjeni pătrați. Deci cei 2052 snopi provin din secerarea a $2052 \times 0{,}5625 = 1154{,}25$ stînjeni patrați. Dar 26 stiejeni patrați fiind plătiți cu 1,10 cei 1154,25 stînjeni patrați vor fi plătiți cu:

$$\frac{1.10 \times 1154{,}25}{26} = 48{,}80 \text{ lei.}$$

* **Problema 187.** — *Să se găsească o progresiune aritmetică de 4 termeni, știindu-se că produsul termenilor de rang par este 128, iar al celor de rang impar 48.*

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: St. N. Corbeann (Turnu-Severin), *L. Drăgănescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *L. Hermann* (Elev al Liceului Matei Basarab); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național din Iași); *Corneliu Ionescu* Iași); *B. Paraschivescu* (Ploești); *C. Popovici* (Student, Iași); *L. I. Rădulescu* (Elev al Liceului din Ploești); *I. Sichitiu, C. Țițirigă, Mihai D. Balassan* (Elev al Liceului Național din Iași); *A. Toussaint* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele); *J. Wittner* (Focșani) și *G. C. Dobrovici* (Bârlad).

Fie n primul termen și y rația. Progresiunea va fi:

$$x \,.\, x+y \,.\, x+2y \,.\, x+3y.$$

După enunciu avem:

$$x(x+2y)=48,$$
$$(x+y)(x+3y)=128.$$

Scoțînd valoarea lui y din prima ecuațiune și punînd'o în a doua avem:

$$(1) \qquad y=\frac{48-x^2}{2x},$$

$$\left(x+\frac{48-x^2}{2x}\right)\left(x+3\frac{47-x^2}{2x}\right)=128,$$

sau:

$$(2x^2+48-x^2)(2x^2+144-3x^2)=512x^2,$$

sau:

$$(x^2+48)(144-x^2)=512x^2,$$

de unde ecuația bipatrată:

$$x^4+416x^2-6912=0,$$

de unde:

$$x=\pm\sqrt{208\pm\sqrt{43264+0912}},$$

sau:

$$x=\pm\sqrt{208\pm224}.$$

Lăsînd la o parte rădăcinile imaginare găsim:

$$x=\pm\sqrt{16},$$

de unde: $\qquad x'=+4, \qquad x''=-4.$

Ecuațiunea (1) ne dă apoi:

$$y'=4, \qquad y''=-4.$$

Progresiunile căutate sînt deci:

$$\div 4.8.12.16,$$

și

$$\div -4.-8.-12-16.$$

Soluțiune dată de D-nii: V. Oprișanu (Bacalaureat, Ploești) și *C. Vintilă* (Elev al Liceului Matei Basarab, București).

Să însemnăm cu $x-3y$ primul termen și cu $2y$ rația.

Vom avea progresia:

$$\div x-3y \,.\, x-y \,.\, x+y \,.\, x+3y.$$

După enunciu vom avea:

$$(x-37)(x+y)=x^2-2xy-3y^2=48,$$
$$(x+3y)(x-y)=x^2+2xy-3y^2=128.$$

Să punem acuma $x=ty$. Vom avea înlocuind:

(1) $$y^2(t^2-2t-3)=48,$$
$$y^2(t^2+2t-3)=128,$$

de unde prin împărțire:

$$\frac{t^2-2t-3}{t^2+2t-3}=\frac{48}{128}=\frac{3}{8},$$

care ne dă ecuația:

$$5t^2-22t-15=0.$$

Deslegînd avem:

$$t=\frac{11\pm\sqrt{12+75}}{5}=\frac{11\pm 14}{5},$$

de unde:

$$t'=\frac{25}{5}=5, \quad t''=-\frac{3}{5}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (1) avem:

$$y'^2=\frac{48}{26-10-3}=4.$$

Deci: $$y'_1=+2, \qquad y'_2=-2.$$

Apoi:

$$y''^2=\frac{48}{\frac{9}{25}+\frac{6}{5}-3}=-\frac{100}{3},$$

care dă valori imaginare pentru y. Pentru a avea pe x, avem relațiunea $x=ty$. Deci:

$$y'_1 = 2, \qquad x'_1 = 10,$$
$$y'_2 = -2, \qquad x'_2 = -10,$$

și prin urmare progresiunile căutate sînt:

$$\div 4.8.12.16.$$
$$\div -4.-8.12.-16.$$

Nota. D-l C. Popovici a rezolvit problema în cazul general cînd produsul termenilor de rang impar ar fi oare-care.

Problema 192. — *Cari sînt numerele de forma* $71\beta\alpha\alpha$ *scrise în sistemul duodecimal divizibile cu* α, *știind că* $\alpha = 9+1$, *și* $\beta = \alpha+1$? *Să se verifice divizibilitatea efectuîndu-se direct diviziunile în sistemul duodecimal.* (Gr. N. Makarie.)

Soluțiune dată de D-l Corneliu Ionescu (Iași).

Regula generală care caracterisează divizibilitatea prin ori-ce număr și în ori-ce sistem de numerațiune o putem enunța ast-fel: Căutăm resturile obținute divizînd unitatea urmată de una, două, etc. nule, prin *modul* (numărul pentru care căutăm condiția de divizibilitate). Aceasta se obține ușor înmulțind fie-care rest cu baza sistemului de numerațiune și divizînd produsul prin modul, pentru a obține ast-fel restul următor. Se scrie apoi sub cifrele numărului dat resturile obținute începînd de la stînga spre dreapta. Facem produsul cifrelor scrise una sub alta, iar suma acestor produse o dividem prin modul. Restul acestei diviziuni este același ca și restul diviziunei numărului dat prin modul. Dacă acest rest este zero, numărul dat este divizibil prin modul. După această regulă vom avea scriind totul în sistemul duodecimal:

$$1 = \mathcal{M}\alpha+1,$$
$$10 = \mathcal{M}\alpha+2\ ^{1})$$
$$100 = \mathcal{M}\alpha+4,$$
$$1000 = \mathcal{M}\alpha+8,$$
$$10000 = \mathcal{M}\alpha+6,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Putem însă și aci, ca de exemplu la divizibilitatea prin 7 în sistemul zecimal, să înlocuim resturile mai mari ca jumătatea mo-

[1]) Căci 10 reprezintă pe doisprezece iar α pe zece.

dulului prin diferența dintre modul și acele resturi, cu condițiune ca produsele conrespondente să fie scăzute din suma celor-l'alte în loc de adunate. Ast-fel vom înlocui resturile 8 și 6 prin $\alpha-8=2$, și $\alpha-6=4$. Aplicînd această regulă la numărul dat vom avea:

$$\begin{array}{l|l} 7\,1 & \beta\, x\, \alpha. \\ 4\,2 & 4\,2\,1. \end{array}$$

$$1\times\alpha+2\times x+4\times\beta-2\times 1-4\times 7=\alpha+2x+38-2-24=20+2x.$$

Dacă din 20 scoatem multiplii de α, ne rămîne ca rest al diviziunei numărul dat prin α expresiunea $4+2x=2(2+x)$. Dar $\alpha=2\times 5$. Deci pentru ca această expresiune să se dividă prin α, e de ajuns ca $2+x$ să se dividă cu 5. Dar pentru aceasta, x fiind de o singură cifră, adică cel mult β, nu poate fi de cît 3 sau 8. Deci cele două numere ce îndeplinesc condiția dată sînt:

$$71\beta 3\alpha \quad \text{și} \quad 71\beta 8\alpha.$$

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (Bacalaureat, București).

Să începem prin a efectua împărțirea în sistemul duodecimal, pînă vom da peste cifra necunoscută x.

$$\begin{array}{l|l} 71\beta x\alpha & \alpha \\ \underline{68} & \overline{87....} \\ 5\beta & \\ \underline{5\alpha} & \\ 1x & \end{array}$$

Se vede ast-fel că restul diviziunei numărului dat prin α este același cu restul diviziunei numărului $1x\alpha$ prin α, sau trecînd în sistemul zecimal, restul diviziunei numărului $(12^2+12x+10)$ prin 10. Făcînd calculele prin numărul $154+12x$, din care suprimînd multiplii de 10 ne rămîne $4+2x=2(2+x)$. De aci se vede că x nu poate fi de cît 3 sau 8, el fiind mai mic ca 12. Numerile căutate sînt deci: $71\beta 3\alpha$ și $71\beta 8\alpha$.

Soluțiune dată de D-l B. Paraschivescu (Ploești).

Transformăm numărul dat în sistemul zecimal. Avem:

$$7\times 12^4+1\times 12^3+11\times 12^2+x\times 12+10=148474+12x.$$

Pentru ca această sumă să se dividă cu 10 trebue ca produsul $12x$ să se termine cu 6, ceea ce nu se întîmplă de cît cînd $x=3$, sau $x=8$. De numerile căutate sînt $71\beta 3\alpha$ și $71\beta 8\alpha$.

Verificarea.

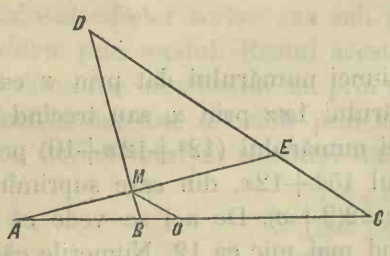
$71\beta 3\alpha$ | α		$71\beta 8\alpha$
68 | 8717		68
5β		5β
5α		5α
13		18
α		18
5α		α
5α		α
0		0

***Problema 194.**— *Pe o dreaptă dată se iau 3 puncte fixe* A,B,C. *Prin punctul* C *se duce o dreaptă mobilă, pe care se iau punctele* D, E *la distanțe invariabile de* C. *Să se determine locul punctului de intersecție a dreptelor* AE, BD *cînd dreapta* DEC *se mișcă în jurul punctului* C.

(Bogdan Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: A. Iliovici (Student, Iași); *C. Țițirigă* (Elev în Școala fiilor de Militari, Craiova); *Victor Ionescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Insemnăm cu M un punct al locului; din M ducem o paralelă MO la CD. In triunghiurile asemenea MBO, CDO avem:



$$(1) \qquad \frac{MO}{CD} = \frac{BO}{BC},$$

la fel în triunghiurile asemenea AMO, ACE:

$$(2) \qquad \frac{AO}{AC} = \frac{MO}{CE} = \frac{AB+BO}{AC}.$$

Scoatem pe MO din (1), îl ducem în (2) și obținem, observînd că AB, AC, BC, CD, CE sînt constante:

$$BO = \frac{AB.BC.CE}{AC.CD - BC.CE} = C^{te},$$

cea ce învederează că punctul O este fix.

Ducînd valoarea lui $\frac{BO}{BC}$, trasă din ultima egalitate în (1); avem:

$$MO = \frac{AB.CD.CE}{AC.CD - BC.CE} = C^{te},$$

ceia-ce ne indică, că punctul M descrie un cerc cu centrul în O și cu raza MO.

Soluțiune dată de D-l Emanuel Blondel (Bărlad).

Putem considera triunghiul AEC tăiat de transversala BMD; aplicînd teorema lui Menelaus asupra transversalei avem:

$$AB \times ME \times CD = BC \times ED \times AM,$$

sau:

$$\frac{AM}{ME} = \frac{AB \times CD}{BC \times ED},$$

de unde:

$$(3) \qquad \frac{AM}{AE} = \frac{AB \times CD}{AB \times CD + BC \times ED} = C^{te}.$$

Dar locul punctului E este un cerc cu centrul în C și cu CE ca rază, deci și al punctului M e tot un cerc homotetic cu el, raportul de homotetie fiind cel menționat în (3).

D-nii *I. Drăgănescu* și *Corneliu Ionescu*, Elevi ai Școalei de Poduri au rezolvit problema cu ajutorul geometriei analitice.

***Problema 195.**— *Prin vîrful* B *al unui triunghiu* ABC *se duce o paralelă la* AC *și se ia pe aceasta spre* A *lungigimea* BD = AB. *De asemenea prin* C *se duce o paralelă la latura* AB *și se ia pe aceasta spre* A *lungimea* CE = AC. *Să se demonstreze că circonferențele cari trec prin* A *și au ca centre punctele* D *și* E *sînt tangente.* (B. Paraschivescu.)

Soluțiune dată de D-ra Maria Albinetz (Elevă a Liceului Varlam, Iași); și *D-nii I. Drăgănescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, București); *G. Giușcă* (Student, București); *L. Hermann* (Elev al Liceului Matei Basarab, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național, Iași); *Al. Ionescu* (Elev al Liceului Matei Besarab); *Victor Ionescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele, București); *G. Penescu* (Student, București); *A. Toussaint* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele din București); *J. Wittner* (Focșani); *V. Cambureanu* (Berlad) și *L. I. Rădulescu* (Elev al Liceului din Ploești).

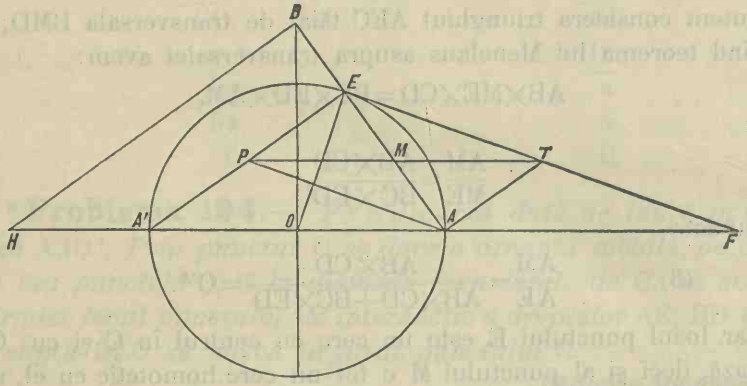
Avem: $\sphericalangle DBA = \sphericalangle BAC$,

$\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAC$,

ca alterne interne. Triunghiurile ABD, ACE fiind isoscele avem încă:

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAD$,

$\sphericalangle AEC = \sphericalangle CAE$.



Pentru ca cercurile cu centrele D și E și trecînd prin A să fie tangente trebue ca linia centrelor DE să treacă prin A, adică DA și AE să formeze o singură dreaptă. Pentru aceasta trebue să demonstrăm că suma unghiurilor din jurul lui A este 180°. Dar avem:

$$ADB + ABC + DAB = 2d^r,$$

$$AEC + ACE + EAC = 2d^r.$$

Adunînd aceste egalități și ținînd seamă de egalitățile precedente avem: $2.DAB + 2.EAC + 2.BAC = 4d^r$

de unde: $DAB = EAC + BAC = 2d^r$, c.c.e.d.

Soluțiune dată de D-nii: St. N. Corbeanu (Turnu-Severin) și *Corneliu Ionescu* (Iași).

Triunghiurile isoscele ABD, ACE avînd unghiul de la vîrf egale cu BAC, unghiurile de bază ale lor sînt egale. Deci:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EAC.$$

Aceste unghiuri fiind conrespondente în rapport cu paralelele AC, DB, linia DAE este o dreaptă, etc.

Soluțiune dată de D-nii: C. Vintilă (Elev al Liceului Matei Basarab, București); *I. Drăgănescu* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele; *V. Cambureanu, G. Dobrovici* (Berlad).

Prelungim dreptele CA, BA dincolo de A. Unghiul C'AD egal

cu EAC ca opuse la vîrf egal cu DAB. Deci AD este bisectriţa unghiului BAC'. De asemenea AE este bisectriţa unghiului CAB'. Aceste două unghiuri opuse la vîrf au bisectriţele lor în linie dreaptă, deci etc.

***Problema 196.** — *Se consideră două diametre rectunghiulare* AA', BB' *ale unui cerc* O. *Pe* OB *se iea* OD = AB, *se uneşte* A *cu* D *şi fie* E *punctul de intersecţie al dreptei* AD *cu cercul* O. *Se duce apoi tangenta în* E *la cerc şi fie* F *punctul unde această tangentă întîlneşte diametrul* AA'. *Să se demonstreze că* AF' = AA'. **(G. Ţiţeica.)**

Soluţiune dată de D-nii: Emanuel Blondel şi *V. Cambureanu,* (Bărlad); *G. Dobrovici, I. Drăgănescu* (Şcoala de Poduri şi Şosele); *A. Iliovici,* (Iaşi); *Victor Ionescu, I. Moscuna,* (Bucureşti); *Badea Paraschivescu, C. Popovici, I. N. Rădulescu, I. Sichitiu, C. Vintilă, J. Wittner* (Focşani) şi *C. Ţiţirigă.*

Observăm că triunghiurile DEO, EAF sînt asemenea ca avînd: unghiul DOF = ungh. EFA pentru că au laturele lor perpendiculare una pe alta,

$$\text{ungh. DEO} = \text{ungh. EAF},$$

ca suplimente de unghiuri egale; rezultă deci:

$$\frac{EF}{OD} = \frac{AF}{OE},$$

sau:

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{OD}^2} = \frac{\overline{AF}^2}{R^2}; \qquad (1)$$

însă avem egalităţile:

$$\overline{EF}^2 = FA.FA', \quad \overline{OD}^2 = 2R^2,$$

şi prin urmare egalitatea (1) devine, toate reducţiunele făcute:

$$FA' = 2FA,$$

cea-ce era de arătat.

Soluţiune dată de D-l G. Dobrovici, (Bărlad).

Ducem din A o paralelă AT la EA' şi o paralelă AP la EF, T şi P fiind punctele respectiv pe EF şi EA'; dreapta PT e tăiată de EA în M, în două părţi egale; dar AT fiind dusă paralel la EA' avem:

$$\frac{ET}{EF} = \frac{AT}{A'E} = \frac{PE}{A'E}, \qquad (2)$$

căci AT=PE ca paralele cuprinse între paralele; relațiunele (2) arată că PT e paralelă cu FA′ și deci și FA′ e impărțită de EM în două părți egale.

Soluțiune dată de D-l L Herman, (București, Liceul Matei Basarab).

Prin D ducem o paralelă la EA′ care tae AA′ în H; în triunghiul dreptunghiu ADH avem:

$$\overline{OD}^2 = R \times OH$$

sau:

$$2R = OH = R + A'H;$$

rezultă deci că:

$$HA' = \frac{AA'}{2},$$

deci și:

$$DE = \frac{EA}{2};$$

din triunghiurile asemenea OED și EAF urmează că:

$$FA = 2OE = AA' \qquad \text{c.c.e.d.a.}$$

D-l C. Popovici a dat o soluție trigonometrică.

***Problema 197.**— *Să se rezolve ecuația:*

$$\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{2x}. \qquad \text{(I. Ionescu.)}$$

Soluțiune dată de D-nii: Em. Blondel (Berlad); *St. N. Corbeanu* (Turnu-Severin); *I. Drăgănescu* (București); *Grigorescu* Bucuresci); *L. Hermann* (Elev al Liceului Matei Basarab, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național, Iași); *Al. Ionescu* (Elev al Liceului Mihai Viteazu, București); *Corneliu Ionescu* (Iași); *Al. Em. Meleucovici* (Student, București); *Al. M. Moisescu* (Elev al Liceului Mihai Viteazu, București); *I. Moscuna* (Bacalaureat, București); *Federigo Pane* (București); *B. Paraschivescu* (Ploești); *I. V. Rădulescu* (Craiova); *L. I. Rădulescu* (Elev al Liceului din Ploești); *Gr. Ruptureanu* (București); *I. Sichitiu* (Craiova); *C. Țițirigă* (Craiova); *C. Vintilă* (Elev al Liceului Matei Basarab, București); *J. Wittner* (Focșani); *V. V. Cambureanu* și *G. Dobrovici* (Berlad).

Se știe că calculul sumei unui binom, se poate pune sub forma:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Ridicînd ecuațiunea dată la cub și punînd rezultatul sub forma aceasta, avem:

$$x+4+x-4+3\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}\left[\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x-4}\right]=2x,$$

care se reduce la:

$$3\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}\left[\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x-4}\right]=0,$$

sau înlocuind parenteza prin valoarea sa $\sqrt[3]{2x}$, conform ecuației date, avem:

$$\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}\cdot\sqrt[3]{2x}=0,$$

sau ridicînd la cub:

$$2x(x+4)(x-4)=0.$$

Sub această formă să vede că rădăcinile căutate sînt:

$$x=0, \qquad x=4, \qquad x=-4.$$

Toate aceste rădăcini satisfac ecuația dată.

Observare *făcută de D-l I. Moscuna.*

In același mod se poate arăta că rădăcinile ecuației

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{\varphi(x)}=\sqrt[3]{f(x)+\varphi(x)},$$

sînt date de ecuațiunile:

$$f(x)=0, \qquad \varphi(x)=0 \quad \text{și} \quad f(x)+\varphi(x)=0.$$

***Problema 210.**— *Fiind date relațiunele:*

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta'-\beta}=\ldots\ldots\ldots=\frac{t-\theta}{\theta'-\theta},$$

$$\frac{x-\alpha'}{\alpha-\alpha'}=\frac{y-\beta}{\beta-\beta'}=\ldots\ldots\ldots=\frac{t-\theta'}{\theta-\theta'},$$

Să se deducă egalitatea:

$$\sqrt[2n]{(x-\alpha)^{2n}+(y-\beta)^{2n}+\ldots\ldots+(t-\theta)^{2n}}$$
$$+\sqrt[2n]{(x-\alpha')^{2n}+(y-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(t-\theta')^{2n}}$$
$$=\sqrt[2n]{(\alpha-\alpha')^{2n}+(\beta-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(\theta-\theta')^{2n}}.$$

(I. Ghibadan)

Soluțiune dată de D-nii: Al. Melencovici, (Student București), *Emanuel Blondel,* (Liceul din Bârlad); *L. Hermann,* (Liceul Ma-

tei Basarab); *C. Popovici, C. Vintilă, A. Iliovici,* (Student Iași); *G, Dragu, I. Gheorghe, B. Paraschivescu, A. Păltineanu, I. N. Rădulescu, L. I. Rădulescu, I. Sichitiu, G. G. Urechiă, J. Wittner, V. V. Cambureanu, G. Dobrivici,* (Bărlad) și *C. Țițirigă.*

Din relațiunele date se deduce succesiv:

$$(1)\qquad \frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}=\frac{\sqrt[2n]{(x-\alpha)^{2n}+(y-\beta)^{2n}+\ldots\ldots+(t-0)^{2n}}}{\sqrt[2n]{(\alpha'-\alpha)^{2n}+(\beta'-\beta)^{2n}+\ldots\ldots+(0'-0)^{2n}}},$$

$$(2)\qquad \frac{x-\alpha'}{\alpha-\alpha'}=\frac{\sqrt[2n]{(x-\alpha')^{2n}+(y-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(t-0')^{2n}}}{\sqrt[2n]{(\alpha-\alpha')^{2n}+(\beta-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(0-0')^{2n}}};$$

din prima egalitate obținem:

$$(3)\qquad \sqrt[2n]{(x-\alpha)^{2n}+(y-\beta)^{2n}+\ldots\ldots+(t-0)^{2n}}=\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}\cdot \times\sqrt[2n]{(\alpha-\alpha')^{2n}+(\beta-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(0-0')^{2n}},$$

de oare-ce: $(\alpha-\alpha')^{2n}=(\alpha'-\alpha)^{2n}$;

din egalitatea (2) se obține asemenea:

$$(4)\qquad \sqrt[2n]{(x-\alpha')^{2n}+(y-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(t-0')^{2n}}=\frac{x-\alpha'}{\alpha-\alpha'}\cdot \times\sqrt[2n]{(\alpha-\alpha')^{2n}+(\beta-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(0-0')^{2n}}.$$

Adunînd egalitățile (3) și (4) membru cu membru avem:

$$\sqrt[2n]{(x-\alpha)^{2n}+(y-\beta)^{2n}+\ldots\ldots+(t-0)^{2n}}+\sqrt[2n]{(x-\alpha')^{2n}+(y-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(t-0')^{2n}}=\sqrt[2n]{(\alpha-\alpha')^{2n}+(\beta-\beta')^{2n}+\ldots\ldots+(0-0')^{2n}},$$

căci:

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}+\frac{x-\alpha'}{\alpha-\alpha}=\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha}-\frac{x-\alpha'}{\alpha'-\alpha}=\text{I.}$$

c.c.e.d.a.

***Problema 214.** — *Să se afle adevărata valoare a expresiunei:*

$$\frac{\cos A \sin A - \cos B \sin B}{\sin(A-B)}$$

pentru $A=B$. **(Al. Melencovici.)**

Soluțiune dată de D-nii: Emanuel Blondel, V. Cambureanu, G. Dobrovici (Liceul din Bârlad), *G. Dragu, I. Drăgănescu,* (Școala de Poduri și Șosele, *L. Herman,* Liceul Matei Basarab, *A. Iliovici* (Liceul Național Iași), *A. Păltineanu, I. N. Rădulescu, Gr. Ruptureanu,* (Liceul Matei Basarab), *C. Vintilă, J. Wittner,* (Focșani), *N. Flicher, Ioan Gheorghe, Grigorescu, I. Sichitiu* și *C. Țițirigă.*

Știm că:

$$\sin A \cos A = \frac{\sin 2A}{2}.$$

Inlocuim în expresiunea propusă, ea devine:

$$\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2\sin(A-B)};$$

transformînd diferența de la numărător în produs se obține:

$$\frac{\sin(A-B)\cos(A+B)}{\sin(A-B)} = \cos(A+B);$$

deci cînd $A=B$, expresiunea dată devine $\cos 2A$.

PROBLEME PROPUSE

*243. Destășurîndu-se pe un plan suprafața laterală a unui con circular drept, se găsește un sector cu o arie de 0,2564 m. p. și cu un unghiu la centru de $13^{0}15'42'',14$. Se cere să se calculeze volumul conului. (I. Ionescu.)

*244. Se dă un cerc O și un diametru AA'. Se duce o rază arbitrară OM și tangenta în M, extremitatea razei. Tangenta întîlnește pe AA' în P. Se cere locul centrului cercului înscris în triunghiul OMP. (N. Nicolescu.)

*245. Produsul celor d'întîi zece numere se ridică la puterea 200^{a}. Să se arate că numărul ast-fel obținut este terminat cu 400 zeruri, și să se găsească prima țifră semnificativă de la dreapta acestui număr. (V. Cristescu.)

246. Se dă o circonferință cu centrul în O și o dreaptă fixă AOA'. Să se afle locul centrelor circonferințelor tangente la circonferința dată, la dreapta AOA' și la o altă dreaptă BOB', care se învîrtește în jurul punctului O. (D. CAPRIEL.)

*247. Să se găsească numărul perechilor de numere, ast-fel ca patratul unuia să fie egal cu patratul celui-l'alt, plus un acelaș număr impar. (B. IONESCU.)

*248. Să se construească expresia:

$$x = a \sin \frac{m}{2^n} \alpha$$

a fiind o lungime dată, iar α un unghiu dat. (C. POPOVICI.)

249. Să se discute ecuația:

$$x^4 + 4ax^3 + 2bx^2 + b^2 = o.$$

Presupunînd că a și b reprezintă coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni dupe natura rădăcinilor ecuațiunei. (A. G. IOACHIMESCU.)

*250. Să se rezolve ecuația:

$$\text{arc sin} x + \text{arc sin} \frac{(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$ (G. C. DOBROVICI.)

*251. Să se rezolve ecuația:

$$(x+3-\alpha)(x+2-\alpha)(x+1-\alpha)(x-\alpha) = \beta,$$

în care α și β sînt două cantități cunoscute. (V. V. CAMBUREANU.)

*252. Un comerciant posedă 1976 lei în 400 monezi de 1, 2 și 5 lei. Din această sumă plătește 726 lei în 150 monezi de 1, 2 și 5 lei. Se întreabă cîte monezi de 1 leu, cîte de 2 lei și cîte de 5 lei a dat în această plată și cîte i-a mai rămas din fie-care speță. (AL. EM. MELENCOVICI.)

253. Să se găsească locul vîrfurilor parabolelor ce trec prin vîrful unei parabole date și prin punctele de intersecție ale acestea cu o dreaptă, ce e mobilă în jurul unui punct fix. (B. IONESCU.)

Rectificare.— Problema 212 publicată în No. 7, fiind greșită, îi reproducem enunciul corectat:

$a^2 = b^2 + c^2$, a, b, c fiind numere întregi prime între ele să se arate că nici unul din numerile a, b, c nu poate fi *egal* cu 30. (C. MICLESCU.)

La chestiunea 231, baza logaritmilor este 9.

ASUPRA PARABOLEI.

Problemă. Dîndu-se o parabolă și o dreaptă, a căror ecuațiuni să fie:

$$y^2-2px=o, \quad y=mx+n,$$

să se determine punctul A_4, *conjugat armonic al punctului* A_3 unde dreaptă dată Δ întîlnește axul parabolei, în raport cu punctele A_1, A_2, intersecțiuni ale dreptei Δ cu parabola.

Dacă însemnăm coordonatele punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 respectiv cu:

$$(x_1\ y_1), \quad (x_2\ y_2), \quad (x_3\ y_3), \quad (x_4\ y_4),$$

avem următoarele relațiuni:

$$(x_1+x_4)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4)$$
$$(y_1+y_2)(y_3+y_4)=2(y_1y_2+y_3y_4),$$

din care scoatem:

$$x_4=\frac{2x_1x_2-x_3(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2x_3}, \qquad y_4=\frac{2y_1y_2-y_3(y_1+y_2)}{y_1+y_2-2y_3}.$$

Dar:

$$x_3=-\frac{n}{m}, \quad y_3=o,$$

iar $x_1\ x_2$, $y_1\ y_2$ sînt: primele rădăcinele ecuațiunei:

$$m^2x^2+2(mn-p)x+n^2=o,$$

obținută înlocuind pe y cu $mx+n$, din ecuația dreptei, în ecuația parabolei; cele de al doilea se obțin înlocuind pe rînd pe x cu x_1, x_2 în ecuația dreptei Δ. Din cele zise rezultă că avem relațiunile:

$$x_1+x_2=\frac{2(p-mn)}{m^2}, \quad x_1x_2=\frac{n^2}{m^2},$$

$$x_4=\frac{\dfrac{n^2}{m^2}+\dfrac{2n(p-mn)}{m^3}}{\dfrac{2(p-mn)}{m^2}+\dfrac{2n}{m}}=\frac{n}{m}=-x_3, \quad y_4=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=mx_4+n=2n.$$

Să căutăm asemenea ecuațiele *cercurilor* C_1, C_2, *primul trecînd prin* O, A_1, A_2 *și al doilea prin* O, A_3, A_4.

Ecuația cercului C_1 este de forma:

$$\alpha x+\beta y=x^2+y^2.$$

Scriind că trece prin punctele A_1, A_2 avem ecuațiele:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x_1+\beta y_1=x_1^2+y_1^2 \\ \alpha x_2+\beta y_2=x_2^2+y_2^2, \end{cases}$$

pe lîngă care, încă următoarele:

$$(2)\quad \begin{cases} y_1^2 = 2px_1 \\ y_2^2 = 2px_2 \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}.$$

Din (1) prin scădere se obține:

$$\alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2p),$$

sau avînd în vedere pe (2) și (3),

$$(4)\quad \alpha + \beta m = x_1 + x_2 + 2p.$$

Din (1) prin adunare se obține:

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta[2n + m(x_1 + x_2)] = x_1^2 + x_2^2 + 2p(x_1 + x_2)$$

utilizînd ecuația (4) și simplificînd:

$$\beta = -\frac{x_1 x_2}{n} = -\frac{n}{m^2}.$$

Prin urmare:

$$\alpha = -\beta m + x_1 + x_2 + 2p = \frac{2p + 2pm^2 - mn}{m^2}.$$

Ecuația cercului C_1 se scrie dar:

$$(5)\quad m^2(x^2 + y^2) - (2p + 2pm^2 - mn)x + ny = o.$$

Pentru a obține ecuația cercului C_2 scriem că trece prin O_1, A_3, A_4 și ne vin relațiunele:

$$\alpha = x_3 = -\frac{n}{m}$$

$$-\frac{n^2}{m^2} + 2\beta n = \frac{n^2}{m^2} + 4n^2, \qquad \beta = \frac{n}{m^2}(1 + 2m^2).$$

Să presupunem că *dreapta* Δ *se mișcă paralel cu ea însuși*; în acest caz m e constant și deduc următoarele teoreme:

I) *Punctul* A_4 *descrie o dreaptă trecînd prin vîrful parabolei.*

In adevăr dacă facem raportul coordonatelor y_4, x_4, se vede că punctul A_4 se află pe dreapta, a cărei ecuație este:

$$y = 2mx.$$

II) *Centrele* O_1, O_2 *ale cercurilor* C_1, C_2 *descriu drepte.*

Din ecuațiele (5) și (6) se obțin imediat coordonatele punctelor O_1, O_2.

$$(O_1)\quad x = \frac{2p(1 + m^2) - mn}{2m^2}, \qquad y = -\frac{n}{2m^2},$$

$$(O_2)\quad x = -\frac{n}{2m}, \qquad y = \frac{n}{2m^2}(1 + 2m^2).$$

Dacă se elimină parametrul variabil n între coordonatele punctelor O_1, O_2 se obțin respectiv dreptele:

$$x - my = \frac{p}{m^2}(1+m^2), \quad my + (1+2m^2)x = o.$$

III) *Dreapta* O_1, O_2 *înfășură o parabolă.*

Dacă se scad ecuațiile (5), (6) una din alta se obține axul radical al cercurilor C_1, C_2, care este:

$$(7) \quad px - ny = o.$$

Scriem ecuația unei drepte trecînd prin O de exemplu (unul din punctele O_1, O_2) și perpendiculară pe (7), și acea va fi ecuația dreptei $O_1 O_2$:

$$y - \frac{n}{2m^2}(1+2m^2) = -\frac{n}{p}\left(x + \frac{n}{2m}\right)$$

sau

$$(8) \quad p[2m^2y - n(1+2m^2)] + mn(2mx+n) = o.$$

Derivăm ec. (8) în raport cu n.

$$-p(1+2m^2) + m(2mx+n) + mn = o,$$

de unde scoatem pe n.

$$n = \frac{p(1+2m^2) - 2m^2x}{2m},$$

și înlocuim această valoare (8)

$$p\left[2m^2y - \frac{1+2m^2}{2m}(p+2pm^2-2m^2x)\right] + \frac{p(1+2m^2)-2m^2x}{2} \cdot \frac{p(1+2m)-2m^2x}{2m} = o.$$

$$2p[4m^3y - (1+2m^2)(p+2pm^2-2m^2x)] + [p(1+2m^2)-2m^2x][p(1+2m^2)+2m^2x] = o;$$

punem în factor comun pe: $p(1+2m^2)-2m^2x$,

$$8pm^3y + [p(1+2m^2)-2m^2x][2m^2x - p(1+2m^2)] = o,$$

$$[2m^2x - p(1+2m^2)]^2 - 8pm^3y = o;$$

această ecuație reprezintă o parabolă, cu axul paralel la tangenta la vîrf, a parabolei date.

IV) *Cercurile* C_1, C_2 *rămîn tangente la niște drepte, ce trec prin origină și perpendiculare respectiv pe dreptele descrise de* O_1 *și* O_2.

Ecuațiele celor două drepte se obțin prin simplă derivare a ecuațiunilor (5) și (6) în raport cu n și avem:

pentru C_1.....$y+mx=o$,

» C_2.....$y(1+2m^2)-mx=o$. c.c.e.d.a.

Presupunem în al doilea caz *că dreapta dată* Δ, *se învîrtește în jurul unui punct fix;* să vedem modificările ce primesc teoremele expuse în primul caz cînd n este constant și m variabil.

1) *Punctul* A_4 *descrie o paralelă la axul parabolei.* Acest lucru se vede imediat din ordonata punctului A_4, care este cît $2n$, deci constantă.

2) *Punctele* O_1, O_2 *descriu niște parabole;* însemnînd cu x, y coordonatele lui O_1 se vede că:

$$2m^2=-\frac{n}{y},$$

$$x=\frac{2p\left(1-\frac{n}{y}\right)-mn}{-\frac{n}{y}}=\frac{2p(y-n)-mny}{-n},$$

de unde:

$$[nx+2p(y-n)]^2=m^2n^2y^2=-\frac{n^3}{2}y,$$

sau în fine:

$$[nx+2p(y-n)]^2+\frac{n^3}{2}y=o,$$

care ecuație reprezintă o parabolă, tangentă la dreapta

$$nx+2p(y-n)=o,$$

în punctul unde ea este întîlnită de axul parabolei date.

Asemenea x, y, fiind coordonatele lui O_2, eliminînd pe m între valorile lor în funcție de n se obține parabola.

$$2x^2-ny+n^2=o,$$

cu axul perpendicular pe axul parabolei date.

3) *Dreapta* O_1O_2 *se mișcă paralel cu ea însăși, iar axul radical al cercurilor* C_1C_2 *este fix.*

Inspectînd ecuația (7), unde n e constant, se vede că teorema este învederată.

4) *Cercurile* C_1C_2 *înfășură niște cubice unicursale.*

Să derivăm ecuația cercului C_1 în raport cu m.

$$2m(x^2+y^2-2ny)+nx=o$$

$$m=-\frac{nx}{2(x^2+y^2-2ny)};$$

înlocuind pe m prin această valoare în (5) avem:

$$(x^2+y^2-2ny)\frac{n^2x^2}{4(x^2+y^2-2ny)^2}-\frac{n^2x^2}{2(x^2+y^2-2ny)}-ny=o;$$

făcînd toate reducțiunile:

$$2ny(x^2+y^2-2ny)+n^2x^2=o.$$

Coordonatele acestei cubice se pot pune sub forma:

$$y=tx,\quad x=\frac{4nt^2-n}{2t^3+2t},$$

t fiind un parametru variabil.

Derivînd în raport cu m, ecuația cercului C_1, avem:

$$2m(x^2+y^2-2px)+nx=o,$$

de unde scoatem:

$$m=-\frac{nx}{2(x^2+y^2-2px)};$$

înlocuind în (6) pe m prin această valoare avem:

$$\frac{x^2n^2}{4}-\frac{n^2x^2}{2}+(xy-2px)(x^2+y^2-2px)=o,$$

de unde:

$$(ny-2px)(x^2+y^2-2px)-\frac{n^2}{2}x^2=o,$$

cubică tangentă la axul ycilor în punctele de intersecție ale cercului:

$$x^2+y^2-2px=o$$

cu acest ax.

Coordonatele ei se pot scrie:

$$y=tx,\quad x=\frac{n^2+4p(nt-2p)}{2(nt-2p)(1+t^2)}.$$

Bogdan Ionescu.

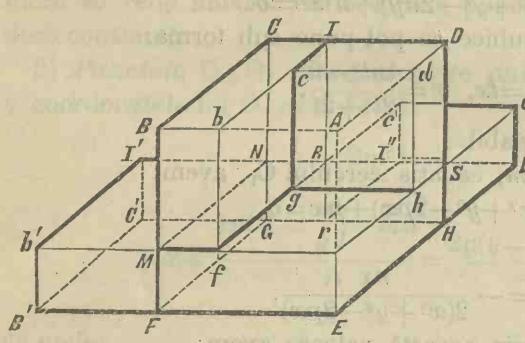
Formule algebrice demonstrate geometricește.

Să ne propunem a demonstra geometricește următoarele două egalități:

$$(1)\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab),$$
$$(2)\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab).$$

I) Fie ABCDEFGH cubul construit cu lungimea a, și al cărui

volum va fi prin urmare egal cu a^3. Din colțul A al acestui cub, să scoatem cubul *Abcdefgh* construit cu lungimea b, și al cărui volum va fi prin urmare b^3. Ne va rămîne ast-fel un solid pe care să'l numim Σ, și al cărui volum va fi a^3-b^3. Putem descompune solidul Σ, în modul următor, în 3 paralelipipede dreptunghii: 1) Planul *efgh* detașează paralelipipedul EFGHeMNS a cărui bază EFGH

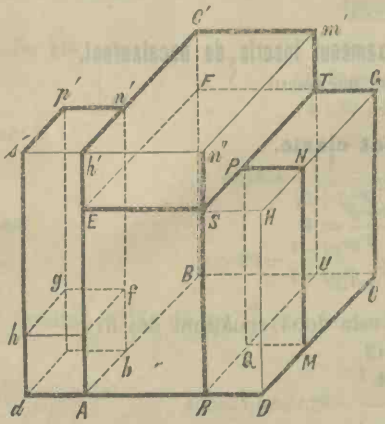


este un patrat cu latura a și prin urmare cu aria a^2, și a cărui înălțime Ee este egală cu $a-b$. 2) Din restul solidului, planul *bagf* detașează paralelipipedul BCNM*b*I*R*f, a cărui bază BCNM este un dreptunghiu cu laturile BC$=a$, BM$=b$, și prin urmare cu aria ab, iar a cărui înălțime este egală cu $a-b$. 3) Restul este paralelipipedul *cdhg* IDSR a cărui bază este patratul cu latura b și prin urmare cu aria b^2, și a cărui înălțime este egală cu $a-b$. Dacă acum luăm aceste trei paralelipipede, cari au aceiași înălțime și le așezăm pe planul EFGH alături unul de altul, cum indică figura, vom obține o prismă dreaptă cu baza B′ED′I″*r*C′ a cărei arie va fi a^2+b^2+ab, egală cu suma ariilor bazelor celor 3 paralelipipede, și a cărei înălțime va fi $a-b$. Volumul acestei prisme, pe care să o numim Σ', va fi deci: $(a-b)(a^2+b^2+ab)$. Dar prisma Σ' a fost construită cu porțiunile solidului Σ. Deci volumele solidelor Σ și Σ' sînt aceleași, și prin urmare avem egalitatea:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab).$$

II) Fie ABCDEFGH cubul construit cu lungimea b și al cărui volum va fi deci egal cu b^3; și *Abcdef* cubul construit cu lungimea a și al cărui volum va fi deci a^3. Să punem aceste două cuburi unul lîngă altul, cum indică figura și vom obține ast-fel un solid pe care să'l numim Σ, și al cărui volum va fi evident a^3+b^3. Să ducem planul STQR la distanța a de față CDHG. Vom detașa ast-fel din solidul Σ, paralelipipedul dreptunghiu CDHGURST a cărui bază RUCD este un dreptunghiu cu laturile RU$=b$ și UC$=a$,

și a cărui înălțime este RS=b. Ducem prin acest paralelipiped planul PNMQ la distanța a de fața RDHS și obținem astfel două paralelipipede dreptunghii: 1) Paralelipipedul RDMQSHNP a cărui bază RDMQ este un patrat cu latura a, și a cărui înălțime RS este egală cu b; 2) paralelipipedul QMCUPNGT a cărui bază NGCM este un dreptunghiu cu laturile NG=$b-a$ și MN=b, și a cărui înălțime TG este egală cu a. Primul din aceste paralelipipede îl



putem pune peste cubul $Abcdefg$, de oare-ce baza lui e egală cu fața cubului. Al doilea paralelipiped îl putem pune cu baza lui peste paralelipipedul ARUBESTF a cărui față superioară are ca latura ES=$b-a$ și EF=b, adică aceleași dimensiuni ca baza paralelipipedului PTGNQUCM. Vom obține cu modul acesta două paralelipipede alăturate: $Abcdh'n'p's'$ și ABUR$h'c'm'n''$ ale căror înălțimi sînt egale, și egale cu $a+b$. Deci aceste două paralelipipede formează o prismă dRUB$bcs'n'm'c'n''$ pe care să o însemnăm cu Σ'. Baza acestei prisme se compune din patratul $Abcd$ cu aria a^2, și din patratul ABCD au aria b^2, micșorat cu aria dreptunghiului DRUC egală cu ab. Deci aria bazei prismei Σ' este: a^2+b^2-ab. Înălțimea acestei prisme fiind $(a+b)$ volumul ei este: $(a+b)(a^2+b^2-ab)$. Dar prisma Σ' a fost construită cu porțiunile solidului Σ, și prin urmare solidele Σ și Σ' au același volum. Avem deci egalitatea:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab).$$

Observarea I. Demonstrațiunile precedente făcîndu-se numai prin deplasări de solide, ele sînt susceptibile de o verificare experimentală, executînd în realitate diferitele solide (în lemn, sau cărămizi, etc.) și făcînd aranjamentul lor, în un fel sau în altul din cele indicate.

Observarea II. Demonstrarea formulelor algebrice pe cale geometrică era esclusiv întrebuințată de vechii matematiciani greci.

Diophante, în problemele sale, întrebuinţează relaţiunile (1) şi (2) găsite pe cale geometrică. Numai de la *Viete* încoace algebra a început a se debarasa de ajutorul geometriei, iar de la *Descartes* încoace, cu descoperirea geometriei analitice, rolurile au fost intervertite, de oare-ce algebra a fost întrebuinţată pentru studiarea proprietăţilor geometrice ale figurilor.

I. Ionescu.

Soluţiunele chestiunelor propuse la examenul înscris de bacalaureat.

(Sesiunea Iunie 1897, Bucureşti).

a) Bacalaureat clasic.

1) *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\frac{x-y}{6}+\frac{x+y}{2}=4,$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1.$$

Gonind numitorii şi făcind reducerile, cele două ecuaţiuni devin:

$$2x+y=12$$

$$2x-y=4,$$

de unde prin adunare:

$$4x=16$$

sau:

$$x=4$$

iar:

$$y=4.$$

2) *Înălţimea unei prisme drepte este de 10 cm.; fie-care bază este un dreptunghiu, în care o latură e îndoită de cea-laltă, suprafaţa totală e de 216 cmp.; se cere:*

a) *Dimensiunele şi suprafaţa celor două baze.*

b) *Aria fie-cărei feţe laterale.*

Fie x dimensia cea mică a bazei prismei, după enunciu cea-l'altă dimensiune va fi: $2x$, iar suprafaţa celor două baze va fi:

$$2\times x\times 2x.$$

Suprafaţa feţelor laterale va fi:

$$2\times 10\times x+2\times 10\times 2x.$$

Prin urmare ecuaţiunea problemei este:

$$2\times x\times 2x+2\times 10\times x+2\times 10\times 2x=216.$$

sau

$$4x^2+60x-216=0,$$

sau

$$x^2+15x-54=0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţiuni sînt:

$$x=-18$$

$$x=+3.$$

Soluţiunea negativă este evident că nu poate fi admisă, rămine numai so-

luțiunea pozitivă $x=3$, care dă pentru dimensiile și suprafața celor două baze:

3 cm., 6 cm., 18 cm.

iar ariile fețelor laterale vor fi respectiv:

30 cmp. și 60 cmp.

3) *Să se calculeze expresia:*

$$a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$$

știind că:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}.$$

Se știe că:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

iar:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \text{ și } \sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

deci:

$$\cos 2\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} \text{ și } \sin 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Punînd în loc de $\operatorname{tg}\theta$, $\frac{a}{b}$ și introducînd în expresia dată, avem:

$$a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}} + b\,\frac{2\,\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

sau

$$a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = \frac{a(a^2-b^2)+2ab^2}{a^2+b^2} = a.$$

Constantin Coculescu.
Ion Temistocle Alexandrescu.

b) Bacalaureat real.

1) *Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:*

$$x+y=65$$
$$\log x+\log y=3.$$

Presupunînd că baza logaritmilor este 10, cea de a doua ecuațiune poate fi scrisă:

$$\log xy=3=\log 10^3$$

deci:

$$xy=1000.$$

Cunoscînd suma și produsul, putem forma o ecuațiune de gradul al doilea, ale cărei rădăcini să fie x și y. Această ecuațiune este:

$$z^2-65z+1000=0$$

care dă:

$$z = \frac{x}{y} = \frac{40}{25}.$$

2) *Intr'un triunghiu dreptunghiu ipotenuza este de 15.^{m}00 și suprafața de 54^{mp}.00. Să se calculeze laturile unghiului drept.*

Fie x și y laturile unghiului drept, avem dupe enunciu:

$$(1) \quad x^2+y^2=15^2$$

$$\frac{1}{2}xy=54$$

sau

$$(2) \quad xy=108.$$

Multiplicînd cu 2, ecuațiunea (2), adunînd și scăzînd cu ecuațiunea (1), avem:

$$x^2+y^2+2xy=15^2+216$$
$$x^2+y^2-2xy=15^2-266$$

sau

$$(x+y)^2=441$$
$$(x-y)^2=9$$

sau:

$$x+y=\pm 21$$
$$x-y=\pm 3.$$

Rădăcinele acestui sistem de ecuațiuni, sînt.

$$x=12, \quad x=9, \quad x=-12, \quad x=-9$$
$$y=9, \quad y=12, \quad y=-9, \quad y=-12.$$

Este evident că numai rădăcinele pozitive convin chestiunei, iar laturile unghiului drept, vor fi respectiv de 12.^{m}00 și 9.^{m}00.

3) *Să se demonstreze relația:*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\operatorname{tg}2a.$$

Avem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}a}=\frac{1+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a}$$

și

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}a}=\frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a}$$

căci:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Prin urmare:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{1+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a}-\frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a}=\frac{2\times 2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2a}=2\operatorname{tg}2a.$$

C.C.T.D.

Marin Mateescu.

Nota. D-nu *A. D. Chiricuță* din Bârlad, ne a trimes de asemenea, posterior însă, soluțiunele asestor cestiuni. Aceste soluțiuni sunt aproape identice cu cele de mai sus.

Chestiunile propuse la concursul inscris pentru trimiterea a doi elevi din școlele militare (Iași și Craiova) a urma cursurile Școalei Politecnice din Paris.

Algebră.

Să se discute realitatea și semnul rădăcinilor ecuației:

$$(m-2)x^2-(m-4)x+m-3=0.$$

Cînd m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

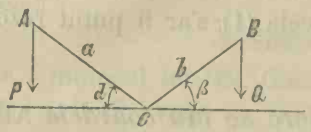
Trigonometrie.

Să se calculeze lungimea bisectriței unghiului A din triunghiul ABC în funcție de liniile trigonometrice ale acestui unghiu și laturile b și c.

(3 Iulie 1897; 9–12 a. m.).

Mecanică.

Se dă pîrghia ACB. In A și B se aplică respectiv forțele P și Q. Să se afle condițiunile de echilibru ale pîrghiei sub acțiunea acestor forțe.



Diferitele condițiuni ce reies cînd unghiurile α și β variază.

(3 Iulie 1897; 3–4 p. m.).

Nota. In numărul viitor vom publica soluțiunele date acestor chestiuni de corespondentul nostru *C. Țițirigă*, care a reușit întîiul la acest concurs.

PROBLEME REZOLVITE

Problema 117. — *Să se rezolve ecuația:*

$$(1)\quad (x+a)(x+a+b)(x+a+b+c)(x+a+b+c+2d)\times$$
$$(x+a+b+2c+2d)(x+a+2b+2c+2d)=(b+c+d)^2(c+d)^2d^2.$$

(Constanța Pompilian.)

Soluțiune dată de D-l C. Lupu (București).

Dacă punem:

$$x+a+b+c+d=y,\quad b+c+d=A,\quad c+d=B,\quad d=C$$

Vom avea:

$$x+a=y-(b+c+d)=y-A$$
$$x+a+b=y-(c+d)=y-B$$
$$x+a+b+c=y-d=y-C$$
$$x+a+b+c+2d=y+C$$
$$x+a+b+2c+2d=y+c+d=y+B$$
$$x+a+2b+2c+2d=y+b+c+d=y+A$$

și ecuația propusă devine:

(2) $$(y^2-A^2)(y^2-B^2)(y^2-C^2)=A^2B^2C^2.$$

Punem iar: $$y^2=z$$

și vom avea de rezolvat o ecuație de gradul al treilea, care (redusă la forma $x^3+px+q=o$ și aplicînd formulele cunoscute) ne va da pentru z trei valori z_1, z_2, z_3; rădăcinile ecuației propuse vor fi atunci:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1}-A-a \qquad =\pm\sqrt{z_1}-(a+b+c+d)$$
$$x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}-B-(a+b) \qquad =\pm\sqrt{z_2}-(a+b+c+d)$$
$$x_{5,6}=\pm\sqrt{z_3}-C-(a+b+c)=\pm\sqrt{z_3}-(a+b+c+d)$$

Observație. Dacă membrul al doilea al ecuației propuse ar fi avut semnul —, ecuația (2) ar fi avut o rădăcină nulă și s'ar fi redus la gradul al doilea; în cazul acela (1) s'ar fi putut rezolva direct.

***Problema 177.** — *Într'un cerc se iau coardele* AB *și* BC *respectiv egale cu laturile triunghiului echilateral și a exagonului regulat înscrise în cerc și se unesc mijloacele* M *și* N *ale arcelor* AB, BC. *Să se demonstreze că porțiunea din dreapta* MN *coprinsă în unghiul* ABC *este egală cu latura dodecagonului regulat înscris în cerc.* (I. Ionescu.)

Soluție dată de D-nii: I. Moscuna (Bacalaureat, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *B. Paraschivescu* (Ploești); *C. Țițirigă* (Craiova); *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei); *J. Wittner* (Focșani); *Em. Blondel, G. Dobrovici* (Bărlad); *C. Vintilă* (Liceul Matei Basarab).

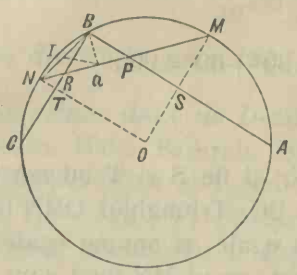
Fie P punctul de intersecțiune al dreptei AB cu MN și R punctul de intersecțiune al dreptei BC cu MN. Unghiul PBR este drept. In adevăr avem:

$$\text{arc BC}=60^0, \quad \text{arc AB}=120^0, \quad \text{arc ABC}=180^0=\text{arc ADC}.$$

Unghiul ABC fiind înscris în o semicirconferență este drept. Triunghiul dreptunghiu PBR este și isoscel. In adevăr avem:

$$\sphericalangle \text{BRP}=\frac{1}{2}(\text{arc CN}+\text{arc BM})=\frac{1}{2}(30^0+60^0)=45^0.$$

$$\sphericalangle BRP = \frac{1}{2}(\text{arc } BN + \text{arc } AM) = \frac{1}{2}(30^0 + 60^0) = 45^0.$$



Deci înălțimea BQ a acestui triunghiu este și mediană. Circonferența descrisă din QR ca rază va trece deci prin P și B și vom avea:

(1) $PR = 2PQ = 2BQ.$

In triunghiul dreptunghiu BNQ avem:

$$\sphericalangle BNQ = \frac{1}{2} \text{arc } BM = \frac{1}{2} 60^0 = 30^0.$$

și deci:

$$\sphericalangle NBQ = 90^0 - 30^0 = 60^0.$$

Fie I mijlocul lui BN. Circonferența descrisă pe BN ca diametru trecînd prin Q avem:

$$NI = IQ,$$

deci și:

$$\sphericalangle IQN = \sphericalangle INQ = 30^0.$$

Prin urmare avem:

$$\sphericalangle IQB = 90^0 - 30^0 = 60^0.$$

Așa dar triunghiul IBQ avînd două unghiuri de 60^0 el este echilateral, și vom avea:

(2) $$NB = 2BI = 2BQ.$$

Comparînd egalitățile (1) și (2) avem:

$$RP = BN.$$

Dar BN subîntinzînd un arc de $30^0 = 360:12$, este latura dodecagonului regulat înscris în cerc, și prin urmare teorema este demonstrată.

Soluțiune dată de D-nii: G. Cica (Iași); *A. D. Chiricuța* (Bârlad); *Corneliu Ionescu* (Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național din Iași); *V. V. Cambureanu* (Bârlad); *L. Hermann* (Liceul Mateiu Basarab). *L. I. Rădulescu* (Ploești); *Gr. Ruptureanu* (București).

Să căutăm expresiunea lungimei PR în funcțiune de raza cercului.

Coarda MN este latura patratului înscris în cerc căci, ea subîntinde un arc de 90°. In adevăr:

$$\text{arc MN} = \text{arc NB} + \text{arc BM} = 30^0 + 60^0 = 90^0.$$

Deci avem:

$$MN = R\sqrt{2}.$$

Unim centrul O cu punctele M și N, și fie S și T intersecțiunile acestor drepte respectiv cu AB și BC. Triunghiul OMN fiind isoscel unghiurile lui din M și N sînt egale și anume egale cu 45°, de oare-ce unghiul din O este drept, arcul MN fiind cum am arătat de 90°. De aci rezultă că triunghiurile dreptunghii MPS, NRT cari au un unghiu de 45° sînt isoscele și prin urmare:

$$NT = TR, \quad \text{și} \quad MS = SP,$$

și prin urmare:

$$MP = MS\sqrt{2}, \quad NR = NT\sqrt{2}.$$

Dar MS este diferența între rază și apotema triunghiului echilateral care se știe că este $\frac{R}{2}$. De asemenea NT este diferența între rază și apotema exagonului regulat înscris în cerc, care este $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ căci e egală cu BS cum se poate vedea ușor. Deci:

$$MP = \left(R - \frac{R}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad NR = \left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2} = R\sqrt{2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Prin urmare avem în definitiv:

$$RP = MN - MP - NR = R\sqrt{2} - R\frac{\sqrt{2}}{2} - R\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},$$

sau:

$$RP = R\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = R\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Dar $R\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ este expresiunea laturei dodecagonului regulat înscris în cerc.

c.e.e.d.d.

***Problema 182.**— *Să se demonstreze că pentru n întreg și pozitiv, expresiunea:*

$$49^{n+2}.39^{2n}-75.2^{2n+5}-4^n,$$

este divizibilă prin 1897. (I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: L. Hermann și *C. Vintilă* (Elevi ai Liceului Matei Basarab, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *G. Iliovici* (Elev al Liceului Național, Iași); *I. Moscuna* (Bacalaureat, București); *V. Oprișanu* (Bacalaureat, Ploești); *G. Penescu* (Student, București); *C. Popovici* (Student, Iași); *L. I. Rădulescu* (Elev al Liceului din Ploești); *I. Sichitiu* și *C. Țițirigă* (Craiova); *Th. M. Vladimirescu* (Rîmnicul-Vîlcei); *J. Wittner* (Focșani); *Em. Blondel, V. Cambureanu* și *G. Dobrovici* (Bărlad).

Expresiunea dată se poate scrie succesiv:

$$(7^2)^2.(7^2)^n 39^{2n}-75.2^5.2^{2n}-(2^2)^n,$$

$$7^4.7^{2n}39^{2n}-2400.2^{2n}-2^{2n},$$

$$7^4.(7.39)^{2n}-2401.2^{2n},$$

$$7^4.(273)^{2n}-2401.2^{2n}.$$

Dar $2401=7^4$. Deci expresiunea se poate scrie:

$$7^4(273^{2n}-2^{2n}).$$

Parenteza e divizibilă cu 273—2=271; expresiunea e divizibilă cu 7, deci ea este divizibilă în total cu $7\times271=1897$. c.c.e.d.d.

***Problema 184.** — *Fie* I, R *înălțimea unui con și raza sferii înscrise;* S, *s suprafața totală a conului și suprafața sferii; în fine* V, *v volumele acelorași corpuri.*

a) *Să se demonstreze că:*

$$V=\frac{S\times R}{3}.$$

b) *Să se determine raportul:*

$$\frac{V}{v}=\frac{S}{s}=m$$

cînd se dă:

$$\frac{I}{R}=k.$$

c) *Să se determine minimul lui m cînd k variază.*

(G. Țițeica.)

Soluție dată de D-nii: I. Moscuna (Bacalaureat, București); *A. Iliovici* (Student, Iași); *B. Paraschivescu* (Ploești); *G. Giușcă, L. I. Rădulescu* (Ploești); *C. Țițirigă* (Craiova).

a) Propoșițiunea este adevărată, în general, pentru un poliedru circumscris unei sfere, căci se poate descompune într'un număr de piramide cu vîrful în centrul sferii egal cu numărul fețelor și avînd aceiași înălțime R. Așa că vom avea pentru volumul poliedrului:

$$V=\frac{R}{3}\times \textit{suma fețelor}=\frac{S\times R}{3}$$

S fiind suprafața totală. Propoziținea relativă la con se obține plecînd, ca de obicei, de la o piramidă circumscrisă sferii și trecînd la limită.

b) Am demonstrat deci că:

$$V=\frac{S\times R}{3}.$$

Și cum avem pentru sferă:

$$V=\frac{s\times R}{3}$$

rezultă:

$$\frac{V}{v}=\frac{S}{s}.$$

Consider acum triunghiul dreptunghiu în A:SAB, care dă naștere conului de vîrf S; fie C proiecția centrului sferii pe SB, sau punctul de contact al sferii cu generatrița SB, deci OC=R. Avem:

$$(1)\qquad m=\frac{V}{v}=\frac{\pi}{3}I\times\overline{AB}^2:\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{k}{4}\cdot\frac{\overline{AB}^2}{R^2}$$

ținînd seama că $I=kR$. Din triunghiurile asemenea SAB, SOC scoatem:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{OC}^2}=\frac{\overline{SB}^2}{\overline{SO}^2}=\frac{\overline{SB}^2-\overline{AB}^2}{\overline{SO}^2-\overline{OC}^2}=\frac{\overline{SA}^2}{\overline{SO}^2-\overline{OC}^2}$$

deci, ținînd seama că $SO=(k-1)R$,

$$\frac{AB^2}{R^2}=\frac{k-2}{k}$$

așa că (1) dă:

(2) $$m=\frac{k^2}{4(k-2)}.$$

c) Din (2) avem:

$$\frac{1}{m}=2\cdot\frac{2}{k}\left(1-\frac{2}{k}\right)$$

deci $\frac{1}{m}$ este maximum și prin urmare m minimum cînd:

$$\frac{2}{k}=1-\frac{2}{k}$$

deci $k=4$ și $m=2$.

D-l *C. Vintilă* (Liceul Mateiu Basarab), a dat o soluțiune parțială acestei chestiuni.

***Problema 189.**— *Să se determine forma generală a întregilor x, y ast-fel ca numerile:*

$$7^x+1,\quad 7^{x+y}+1.$$

să fie în acelaș timp divizibile cu 10. (G. Țițeica.)

Soluție dată de D-nii: I. Moscuna, B. Paraschivescu, J. Wittner, L. Hermann, C. Popovici, C. Țițirigă, Corneliu Ionescu, L. I. Rădulescu, G. Iliovici, I. Sichitiu, G. Ginșcă, I. Kanner, B. Obrișanu, A. D. Chiricuță.

Pentru ca numărul 7^x+1 să fie divizibil cu 10 e necesar și suficient ca 7^x să fie un număr terminat cu 9. Insă în șirul puterilor lui 7 ultima țifră revine după o diferență de rang egală cu 4 unități; mai clar, 7^k și 7^{k+4} sau mai general 7^k și 7^{k+4p} au aceiași țifră finală. De oare-ce 7^2 e prima putere care dă 9 ca ultimă țifră, rezultă:

$$x=4m+2.$$

Se mai deduce că vom avea:

$$x+y=4m'+2,$$

deci:

$$y=4(m'-m)=4n.$$

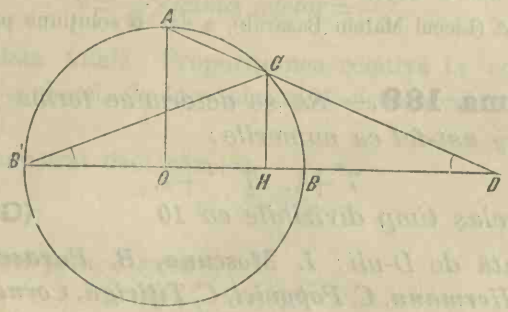
Așa dar:

$$x=4m+2,\quad y=4n.$$

***Problema 201.**— *Se consideră două raze dreptunghiulare* OA, OB *ale unui cerc cu centrul* O *și fie* C *mijlocul arcului* AB. *Se unește* A *cu* C *și fie* D *punctul de intersecție al dreptei* AC *cu raza* OB. *Să se demonstreze că dreapta* CD *este egală cu latura octogonului regulat stelat înscris în cercul* O. (C. Țițirigă.)

Soluție dată de D-nii: V. Cambureanu, Em. Blondel (Bârlad); *L. Hermann* (București); *C. Grigorescu, Victor Ionescu, I. Moscuna* (București); *I. N. Rădulescu* (Craiova); *Gr. Ruptureanu* (București); *I. Sichitiu* (Craiova); *A. Toussaint* (București); *N. Flicher* (Constanța) și *Y. Wittner* (Focșani).

Fie B′ extremitatea diametrului B′OB. Unind B′ cu C′, coarda B′C este latura octogonului regulat stelat înscris în cerc, căci:



$$\text{arc } B'C = \text{arc } B'A + \text{arc } AC = \frac{1}{2}\text{ circ.} + \frac{1}{4}\text{ circ.} = \frac{3}{8}\text{ circ.}$$

Triunghiul B′CD este isoscel, căci:

$$\sphericalangle CB'D = \frac{1}{2}\text{arc } BC = \frac{1}{16}\text{ circ.}$$

$$\sphericalangle CDB' = \frac{1}{2}\text{arc } AB' - \frac{1}{2}\text{ arc } BC' = \frac{1}{16}\text{ circ.}$$

deci vom avea: $CD = CB'$.

c.c.e.d.d.

Soluție dată de D-nii: G. Dobrovici (Bârlad); *A. Iliovici, G. Iliovici* (Iași); *St. N. Corbeanu* (Turnu-Severin); *Corneliu Ionescu* (Iași); *I. Sichitiu* (Craiova); *B. Paraschivescu, L. I. Rădulescu* (Ploești); *C. Vintilă* (București) și *Y. Wittner* (Focșani).

Să căutăm expresiunea lungimei lui CD. Ducem raza OA și din C lăsăm perpendiculara CH pe OB. Insemnînd cu x lungimea lui CD și observînd că CH este jumătatea din latura patratului înscris, iar AC este latura octogonului înscris, triunghiurile DHC și ADO fiind asemenea, avem:

$$\frac{AD}{AO}=\frac{CD}{CH'}$$

sau

$$\frac{x+AC}{R}=\frac{x}{\frac{R\sqrt{2}}{2}}=\frac{AC}{R-\frac{R\sqrt{2}}{2}}=\frac{2R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{R(2-\sqrt{2})}$$

care este expresia laturei octogonului regulat înscris în cerc.

c.c.e.d.d.

PROBLEME PROPUSE

*254. Se dau două circonferențe concentrice și un punct A situat în planul lor. Să se ducă prin A o secantă ast-fel, ca porțiunea coprinsă între cele două circonferințe să aibă o lungime dată.

(P. Suchar.)

255. Fie O centrul unei circonferențe, A un punct fix și T un punct variabil pe circonferența, P și Q punctele de intersecție ale dreptelor TO și TA cu tangenta dusă la circonferință în punctul A′ diametral opus cu A. Prin P și Q se duc perpendiculare pe tangenta în A′, fie M și M′ intersecțiile acestor perpendiculare, respectiv cu dreptele OT și AT. Să se găsească locurile acestor puncte, cînd punctul T se mișcă pe circonferințe. (G. Dragu.)

256. Dreapta, care unește punctele unde două diametre conjugate ale unei elipse întîlnesc cercul circumscris dreptunghiului construit pe axe, este tangentă la elipsă. Proprietate analogă la iperbolă.

(C. Lupu.)

*257. Dintr'un punct fix O, al unei drepte date AB, se ia pe această dreaptă distanțele OA′ și OB′, respectiv egale cu rădăcinele ecuațiunii:

$$2mx^2-2(a+b)x+mab=o.$$

Să se determine coeficientul m, ast-fel ca punctele A′ și B′ să să fie conjugate armonic, în raport cu punctele A și B.

(C. Țițeica.)

*258. Pe înălțimele AA′, BB′, CC′ ale unui triunghiu, luăm de la vîrf spre bază lungimele AM, BN, CP proporționale cu laturile opuse. Să se demonstre că pentru două valori ale raportului de proporționalitate, punctele M, N, P sînt în linie dreaptă, și că intersecția dreptelor ast-fel obținute, se face în punctul de întîlnire al medianelor triunghiului. (I. Ionescu.)

*259. Să se găsească trei numere întregi, a căror sumă este 168, produsul lor 87200, și cel mai mare divizor comun 6.

(B. Ionescu.)

*260. Să se găsească un număr prim egal cu suma a două numere prime consecutive. (I. Ionescu.)

*261. Un balon de sticlă se umple cu un amestec de două lichide, avînd respectiv densitățile d și d', iar greutatea amestecului fiind P. Se extrage o cantitate de amestec și se umple balonul la loc cu lichidul de densitatea d; prin cîntărire se găsește că greutatea noului amestec este P′. Din acest din urmă amestec se extrage aceiași cantitate ca mai sus, și se umple iarăși balonul cu lichidul de densitatea d; prin cîntărire se află că greutatea ultimului amestec obținut este P″. Să se determine: 1) capacitatea balonului; 2) Cantitatea de lichid estrasă prin operațiunele de mai sus; 3) proporția de amestec a celor două lichide la început și la sfîrșit. (A. G. Ioachimescu.)

*262. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^3 - y^2 + x - 1 = 0$$
$$y^3 - x^2 + y - 1 = 0.$$

(B. Ionescu.)

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

Aritmetică.

		Pag.
I. Ionescu.	Adunarea și scăderea simultanee.	53

Geometrie Elementară.

I. Ionescu.	Expresiunea patratului laturei unui triunghiu.	11
C. Popovici.	Chestiuni de maximum și minimum rezolvite geometriceşte	17
A. G. Ioachimescu.	Suprafața și volumul elipsoidului de revoluție prelung	29
G. Iliovici.	Expresiunea patratului laturei unui triunghiu opusă unui unghiu ascuțit sau obtuz. . . .	56
C. Miclescu.	Ordonata medie a unui segment de curbă . .	133
G. Țițeica.	Asupra patrulaterelor inscriptibile	149
B. Ionescu.	Cestiuni de maximum și minimum rezolvite geometriceşte.	178
B. Ionescu	Formule algebrice demonstrate geometriceşte. .	200
I. Ionescu.	Formule algebrice demonstrate geometriceşte .	273

Trigonometrie.

I. Ionescu.	Un nou metod pentru studiul trigonometrii plane.	101, 129, 152, 173, 197, 221.

Teoria Numerilor.

C. Miclescu.	O proprietate a puterilor lui 2	84
I Moscuna.	O proprietate a puterilor lui 2	104
I. Moscuna.	Numĕrul descompunerilor unui numĕr dat într'o sumă de numere pare sau impare consecutive.	225

Geometrie Analitică.

G. Țițeica.	Asupra unor infășurătoare de cercuri și sfere	15
B. Ionescu.	Teoreme asupra triunghiului	125
A. G. Ioachimescu.	Asupra unei clase de curbe unicursale. . .	245
B. Ionescu.	Asupra parabolei.	269

Algebra superioară.

Al. Em. Melencovici.	Câte-va serii	250

Mecanică. Pag.

I. Ghibaldan. O ipoteză a lui Newton 33

Diverse.

Congresul internațional al matematicianilor. . 160

B. CHESTIUNI DE EXAMEN ȘI CONCURSURI.

V. Cristescu. Soluțiunele chestiunelor propuse la concursul înscris pentru ocuparea catedrei de matematici din Rîmnicul-Vilcei 5

Școala de Poduri și Sosele. Examenul înscris de admitere anul I, Secția inginerilor (1896). . 36

Școala de Poduri și Sosele. Examenul înscris de admitere în anul I, Secția conducătorilor (1896) 38

Școala de Poduri și Sosele. Examenul înscris de admitere în anul preparator (1896). 59

Școala Specială de Artilerie și Geniu. Examenul înscris de admitere (1896) 60

Școala de oficeri. Examenul înscris de admitere. 60

A. G. Ioachimescu. Soluțiunele chestiunilor date la concursul înscris pentru ocuparea catredei de Matematici la școala de telegrafie. 77

Școala Normală Superioară, București, Examenul înscris de admitere (1896). 85

Bacalaureat, București, Sesiunea Septembre 1896. Examenul înscris de matematici 108

Scoala Normală de Institutori. Examenul înscris pentru obținerea diplomei (1896) 134

C. Țițirigă. Soluțiunele chestiunelor propuse la examenul înscris, pentru admiterea în anul preparator al Scoalei de Poduri și Sosele 155

C. Țițirigă. Soluțiunea chestiunelor propuse la examenul înscris pentru obținerea diplomei, la școala Normală de institutori. 179

C. Țițirigă. Soluțiunile chestiunilor propuse la examenul de admitere în Scoala Normală Superioară, București 203

Bacalaureat clasic și real, București. Sesiunea Iunie 1897. Chestiunile propuse la examenul înscris 252

Facultatea de matematici, București. Chestiunele propuse la examenele parțiale înscrise . . . 253

Scoala Normală de Institutori. Examenul înscris pentru obținerea diplomei (1897) 254

		Pag.
N. Coculescu. şi *I. T. Alexandrescu.*	Soluţiunele chestiunilor propuse la examenul înscris de bacalaureat clasic, Bucureşti. Sesiunea lunie (1897)	276
M. Mateescu	Idem..... idem pentru bacalaureatul real . . .	277
	Chestiunile propuse la concursul înscris pentru trimiterea a doi elevi din şcoalele militare (Iaşi şi Craiova) a urma cursurile Scoalei Politecnice din Paris	279

C. PROBLEME PROPUSE.

a) Indicarea paginei unde au fost propuse sau rezolvite.

	Pagina la care a fost:			*Pagina la care a fost:*	
Numărul problemei [1]	propusă [2]	rezolvită [3]	Numărul problemei	propusă	rezolvită
22	40 (I)	NR	*107	184 (I)	67
23	40 »		108	207 »	
*24	63 »	38	*109	207 »	111
71	135 »	18	*110	207 »	NR
*75	135 »	40	111	208 »	111
*76	136 »	42	*112	208 »	67
*77	136 »	NR	113	208 »	NR
*82	159 »	20	*114	208 »	91
*83	159 »	22	*115	208 »	69
84	159 »		*116	231 »	70
85	159 »	NR	117	232 »	279
*86	159 »	24	*118	232 »	NR
*87	160 »	45	119	232 »	161
*89	160 »	49	*120	232 »	113
*90	160 »	25	*121	232 »	72
*92	160 »	61	*122	232 »	205
*93	160 »	26	123	255 »	114
*94	182 »	86	*124	255 »	93
*95	182 »	62	*125	256 »	115
96	183 »	134	*126	256 »	74
*97	183 »	49	127	256 »	NR
*98	183 »	50	*128	256 »	95
*99	183 »	51	*129	256 »	96
100	183 »		*130	256 »	74
*101	183 »	62	*131	256 »	136
102	183 »	63	132	281 »	162
*103	184 »	65	*133	281 »	
*104	184 »	66	*134	281 »	118
*105	184 »	108	*135	282 »	181
106	184 »	NR	136	282 »	164

[1]) Problemele însemnate cu * se referă la *matematicele elementare*, (cursul de liceu).

[2]) Numărul latin din parentesă indică volumul colecţii, s. ex. 40 (I), înseamnă că problema a fost propusă la pag. 40 din volumul I.

[3]) NR, însemnează că problema nu a fost rezolvită încă. Pentru acele probleme, în dreptul cărora nu e trecut nici un număr, redacţia posedă deja soluţiuni bune dar care n'au fost publicate încă.

Numărul problemei	*Pagina la care a fost:* propusă	rezolvită
*137	282 (I)	138
*138	282 »	97
*139	282 »	141
140	282 »	
141	27 (II)	165
*142	27 »	167
*143	27 »	98
*144	27 »	144
145	27 »	183
*146	27 »	120
147	27 »	145
*148	28 »	184
*149	28 »	186
*150	28 »	120
*151	28 »	206
*152	28 »	187
153	52 »	
*154	52 »	168
*155	52 »	189
156	52 »	208
*157	52 »	210
*158	52 »	145
*159	52 »	122
*160	52 »	211
*161	52 »	213
162	52 »	169
*163	75 »	146
*164	75 »	215
*165	75 »	191
*166	76 »	216
167	76 »	217
*168	76 »	228
*169	76 »	192
*170	76 »	254
171	76 »	NR
*172	76 »	NR
*173	100 »	193, 230
*174	100 »	230
*175	100 »	332
176	100 »	NR
*177	100 »	280
*178	100 »	233
179	100 »	233
*180	100 »	234
*181	100 »	169
*182	123 »	282
*183	123 »	235
*184	123 »	282
185	123 »	NR
*186	123 »	238
*187	123 »	256
*188	123 »	

Numărul problemei	*Pagina la care a fost:* propusă	rezolvită
*189	124 (II)	285
*190	124 »	239
*191	124 »	240
*192	124 »	258
193	124 »	242
*194	124 »	260
*195	124 »	261
*196	147 »	263
*197	147 »	264
*198	147 »	
199	148 »	
*200	148 »	
*201	148 »	286
*202	148 »	
*203	148 »	
204	148 »	NR
205	170 »	
*206	171 »	
*207	171 »	
*208	171 »	
209	171 »	
*210	171 »	265
*211	172 »	
*212	172 »	
*213	172 »	
*214	172 »	267
*215	172 »	
216	172 »	
*217	195 »	
*218	195 »	
*219	196 »	
*220	196 »	
221	196 »	
*222	196 »	
*223	196 »	
*224	196 »	
*225	196 »	
*226	220 »	
*227	220 »	
*228	220 »	
229	220 »	
*230	220 »	
*231	220 »	
*232	220 »	
*233	220 »	
*234	243 »	NR
235	243 »	NR
236	243 »	
*237	243 »	
238	244 »	
*239	244 »	
*240	244 »	

Numărul problemei	*Pagina la care a fost:* propusă	rezolvită	Numărul problemei	*Pagina la care a fost:* propusă	rezolvită
*241	244 (II)		*252	268 (II)	
*242	244 »		253	268 »	NR
*243	267 »		*254	287 »	NR
*244	267 »		255	287 »	NR
*245	267 »		256	287 »	NR
246	268 »		*257	287 »	NR
*247	268 »	NR	*258	288 »	NR
*248	268 »	NR	*259	288 »	NR
249	268 »	NR	*260	288 »	NR
*250	268 »		*261	288 »	NR
*251	268 »		262	288 »	NR

b) **Repartiția problemelor propuse dupe materii.**

Aritmetică. Problemele: 170, 175, 189, 191, 212, 238, 245.

Geometrie elementară. Problemele: 144, 149, 152, 155, 157, 160, 161, 164, 165, 168, 169, 173, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 186, 188, 190, 194, 195, 196, 198, 200, 201, 205, 208, 211, 213, 215, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 225, 226, 227, 232, 234, 237, 239, 243, 244, 254, 258.

Algebră elementară. Problemele: 142, 143, 148, 150, 151, 154, 159, 163, 172 181, 184, 187, 197, 202, 203, 206, 207, 210, 224, 230 231, 240, 251, 257, 262.

Trigonometrie. Problemele: 146, 166, 214, 233, 242, 248, 250.

Analisă nedeterminată și *teoria numerilor.* Problemele: 158, 174, 182, 185, 189, 191, 192, 212, 241, 245, 247, 252, 259, 260.

Geometrie analitică. Problemele: 145, 147, 162, 167, 171, 179, 199, 209, 216, 221, 228, 229, 235, 236, 246, 253, 255, 256.

Algebră superioară. Problemele: 156, 176, 249.

Analisă. Problemele: 141, 153.

Mecanică. Problemele: 193, 204.

Fizică. Problema: 261.

TABLOUL NUMELOR.

D-ra Albinetz Maria, 146, 261.
Alexandrescu T. I, 253, 276.
Alexandrini O., 67, 171.
Anastasiadi I., 26, 47, 49, 69, 74, 91, 122, 137, 169.
Ascher S. L., 170, 194.

Balasan M. D., 169, 194, 239, 256.
Barcăcilă A., 26.
Bleuler, 160.
Blondel Em., 234, 238, 261, 263, 264, 265, 267, 286, 280, 283.
Buga A., 76, 205.
Burkhart, 160.

Cambureanu V. V., 231, 239, 241, 254, 261, 262, 263, 264, 266, 267, 268, 286.
Capriel D., 268.
Ceva J., 212, 235.
Chasles, 135.
Chiricuța A. D., 278, 281, 285.
Cica G., 191, 215, 228, 234, 281.
Coculescu C., 253, 276.
Corbeanu St. N., 147, 169, 191, 216, 228, 230, 234, 238, 239, 256, 262, 264, 281, 283, 286.
Cremona L., 160, 245.
Cristescu V., 11, 18, 20, 27, 76, 86, 93, 100, 109, 141, 164, 172, 193, 216, 230, 234, 267.

Descartes, 276.
Diophante, 276.
Dobrovici G., 231, 238, 239, 256, 262, 263, 264, 266, 267, 268, 280, 283, 286.

Drăgănescu I., 147, 167, 169, 192, 214, 215, 215, 217, 256, 261, 262, 263, 264, 267.
Dragu G., 74, 97, 120, 147, 192, 208, 211, 215, 216, 229, 238, 266, 267, 287.
Dubesset F., 170,
Dumas G., 160.

Eftihie Floru, 26.

Franel J., 160.
Flicher N., 267, 286.

Geiser G. F., 160, 161.
Gheorghe I., 266, 267.
Ghibaldan I., 36, 52, 75, 123, 145, 171, 215, 265.
Giușcă G., 120, 147, 161, 169, 192, 194, 215, 216, 239, 261, 284, 285.
Gogu C., 70.
D-ra Gorgos Eufrusina, 193.
Greenhil A. C., 160.
Grigorescu I., 264, 267, 286.
Grillet, 113.

Hermann L., 169, 194, 229, 230, 231, 239, 256, 261, 264, 265, 267, 281, 283, 285, 286.
Herzog A., 160.
Hill G. N., 160.
Hurvitz A., 160.

Iliovici A., 20, 22, 24, 25, 26, 27, 40, 46, 49, 50, 51, 52, 62, 63, 65, 65, 67, 69, 70, 74, 76, 89, 92, 93, 95, 97, 98, 99, 100, 111, 113, 118, 120, 121, 122, 124, 134, 136, 138, 141, 144, 147, 148, 161, 165, 166, 167, 168, 171, 183, 188, 189, 190, 191, 194, 206, 208, 210, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 231, 233, 234, 236, 240, 244, 256, 260, 261, 263, 264, 266, 267, 283, 286.
Iliovici G., 20, 23, 24, 26, 46, 49, 51, 52, 58, 62, 65, 66, 69, 70, 74, 89, 95, 96, 98, 99, 120, 122, 144, 147, 161, 183, 190, 191, 194, 206, 208, 215, 216, 217, 228, 230, 234, 241, 256, 261, 264, 281, 283, 285, 286.
Ioachimescu A. G., 22, 33, 40, 49, 52, 83, 107, 164, 168, 220, 244, 249, 268, 288.
Ioachimescu D., 26, 49, 96,
Ionescu A., 26, 91, 169, 194, 228, 261, 264.
Ionescu B., 18, 25, 27, 52, 63, 71, 73, 74, 76, 93, 95, 96, 97, 112, 113, 114, 118, 124, 128, 134, 137, 141, 144, 145, 148, 161, 169, 171, 179, 183, 196, 203, 217, 220, 243, 260, 268, 273, 288.
Ionescu C., 49.
Ionescu Corneliu, 124, 147, 161, 170, 184, 194, 196, 212, 217, 229, 231, 233, 234, 239, 256, 258, 262, 264, 281, 285, 286.
Ionescu I., 15, 26, 27, 28, 38, 52, 56, 75, 76, 91, 98, 100, 104, 115, 121, 123, 124, 132, 136, 146, 147, 148, 155, 169, 172, 178, 181, 184, 187, 189, 196, 199, 211, 220, 225, 228, 230, 242, 244, 254, 256, 264, 267, 280, 288.
Ionescu V., 196, 238, 260, 261, 263, 286.

Jijie A., 193.

Kanner I., 170, 194, 285.
Klein F., 160.

Lacroix, 229.
Lupu C., 63, 64, 114, 135, 162, 243, 279, 287.

Makarie Gr. N., 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 38, 41, 42, 46, 49, 50, 51, 62, 63, 65, 66, 69, 70, 74, 76, 95, 97, 99, 100, 108, 113, 115,

120, 124, 138, 145, 184, 192, 205, 258.
Markof A., 160.
D-ra Manoilescu Lucia, 193.
Mateescu C., 20, 23, 49, 74, 98, 120, 161, 216.
Mateescu M., 20, 122, 134, 147, 167, 170, 191, 211, 215, 216, 228, 253, 276.
Melencovici A. Em., 165, 170, 172, 192, 215, 216, 217, 236, 238, 242, 251, 264, 265, 267, 268.
Mertens F., 160.
Miclescu C., 67, 85, 100, 113, 123, 124, 133, 172, 228, 232, 236, 240, 268.
Mincowski H., 160.
Mittag-Leffler, 160.
Moisescu A., 169, 194, 164.
Moscuna I., 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 40, 48, 49, 50, 62, 65, 66, 67, 69, 72, 86, 89, 91, 93, 96, 108, 109, 111, 116, 118, 123, 135, 136, 147, 161, 162, 164, 168, 181 183, 184, 186, 189, 194, 195, 206, 210, 211, 213, 216, 228, 230, 233, 235, 236, 238, 239, 240, 241, 259, 263, 264, 265, 280, 283, 284, 285, 286.

Negretzu I., 65, 69, 74,
Negulescu D., 18, 63, 112, 192.
Newton, 33, 35, 232.
Nicolescu N., 195, 220, 267.

Oltramare G., 160.
Oprişan V., 170, 194, 231, 238, 241, 257, 283, 285.
Ozanam, 53.

Paltineanu A., 266, 267.
Pane Federigo, 264.
Paraschivescu B., 23, 26, 38, 49, 51, 66, 67, 74, 96, 108, 113, 121, 124, 144, 145, 147, 167, 170, 172, 190, 191, 194, 209, 215, 216, 220, 228, 235, 239, 256, 259, 261, 263, 264, 266, 280, 284, 285, 286.
Penescu G., 113, 120, 147, 170, 192, 194, 215, 216, 231, 239, 254, 261, 283.
Penescu I., 26, 170, 228, 254, 255.
Pitagora, 15, 56, 57, 58.
Poenaru D., 23.
Poincarre H., 160.
D-ra Pompilian Constanţa, 52, 208, 279.
Popescu C., 22, 46.
Popovici C., 17, 20, 24, 25, 40, 46, 49, 50, 51, 52, 66, 67, 74, 89, 93, 95, 96, 98, 99, 118, 120, 121, 136, 138, 147, 162, 164, 187, 191, 193, 194, 206, 210, 211, 215, 230, 238, 256, 258, 263, 266, 268, 283, 285.
D-ra Popovici Olga, 194.

Rădulescu I. N., 170, 263, 264, 266, 267, 286.
Rădulescu I. P., 61, 192.
Rădulescu L. I., 170, 239, 256, 261, 264, 266, 281, 283, 284, 285, 286.
Răileanu C. N., 26, 147, 189.
Rebstein I., 160.
Ripianu Tr., 138, 193.
Rudio F., 160.
Ruptureanu Gr., 229, 239, 264, 267, 281, 286.

D-ra Şandru Natalia, 194.
Săvulescu T., 26, 49, 51.
Scherer L., 40.
Suchar P., 287.
D-ra Şerbănescu Steliana, 72.
Sichitiu I., 147, 170, 194, 211, 214, 215, 216, 242, 256, 263, 264, 266, 267, 283, 285, 286.
Stănulescu C. S., 24, 98, 170, 194.

Tartinville, 71.
Ţiţeica G., 17, 22, 27, 28, 42, 49, 52, 63, 111, 123, 124, 145, 147, 148, 152, 167, 171, 172, 186, 195, 243, 263.
Ţiţirigă C., 134, 147, 148, 159, 170, 181, 189, 192, 194, 196, 205, 211, 214, 215, 216, 228, 232, 242, 244, 256, 260, 263, 264, 266, 267, 279, 280, 283, 284, 285, 288.
Trandafirescu N., 74.
Toussaint A., 236, 238, 239, 242, 256, 261, 286.

Ureche Gh. Gh., 266.

Vasilescu C., 170.
Viète, 276.
Vintilă C., 194, 216, 229, 230, 239, 257, 262, 263, 264, 266, 267, 280, 283, 285, 286.
Virigiliu C., 49.
Vladimirescu Th. M., 134, 161, 166, 168, 169, 190, 191, 193, 194, 196, 206, 208, 210, 213, 214, 215, 216, 217, 228, 231, 232, 235, 254, 280, 283.
Vondermühl, 160.

Weber, F. H., 160.
Wittner J., 122, 147, 170, 191, 194, 196, 216, 220, 228, 229, 236, 239, 240, 244, 256, 261, 263, 264, 266, 267, 280, 283, 285, 286.

TABLOUL UVRAGELOR CITATE.

		Pag.
Rouché et de Camberousse.	Traité de Géométrie	21, 191, 192
Ch. de Camberousse.	Cours de Mathématiques	250
I. B. Biot.	Traité d'astronomie physique	34
Ozanam.	Récréations mathématiques	53
E. Combette.	Cours d'arithmétique	67
Fitz. Patrick.	Exercices d'arithmétique	97
Julius Petersen.	Constructions géométriques	192
Bourget.	Journal de mathématiques élémentaires et spéciales	192
C. A. Laisant.	Recueil de problèmes de géométrie.	192
G. Ritt.	Problèmes de géométrie	192
A. Amiot.	Problèmes de géométrie	192
P. Serret.	Des méthodes en géométrie	192
E. Catalan.	Theorèmes et problèmes de géométrie élémentaire	192, 193
G. de Longchamps.	Journal de mathématiques élémentaires . . .	193
Georges Maupin.	Questions d'algèbre	193
C. A. Laisant.	Recueil de problèmes d'arithmétique, d'algèbre et de trigonomètrie	193
Sanguet.	Tables trigonomètriques centesimales . . .	192
	Gazeta Matematică . . . 15, 17, 22, 29, 39, 73, 85, 107, 178, 192, 193, 200.	
	Recreaţii ştiinţifice . . . . . 98, 252.	

BIBLIOTECA
UNIVERSITAŢII
-IAŞI-