Tipsi nr. 1–4.

GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 5. IANUARIE 1896.

SUMARUL

1. O clasă de ecuaţiuni elementare . . . . *G. Ţiţeica.*
2. Simplificarea calculului. — Instrumente logaritmice. — Rigla de calcul . . . . . *Z.*
3. Despre parcelarea poligoanelor prin drepte paralele . . . . . *I. N. Neculcea.*
4. Probleme rezolvite 10, 13, 18, 25, 31, 33, 34.
5. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

TIPOGRAFIA CURŢII REGALE. F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 1[illegible]

Redacţia *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanţa, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

1 FEB. 1935

Intrat înainte
de anul 1933
Biblioteca Universității Iași
12 FEB. 1935



O CLASA DE ECUAȚIUNI ELEMENTARE

Observațiunea, pe care o utilizez în cele ce urmează, este așa de simplă că de sigur a fost aplicată de mulți. Voesc numai să atrag atențiunea asupra unei metoade elementare, care rezultă din acea observațiune, și a da cîte-va exemple de aplicațiunile sale.

1 — Fie:

$$(1)\quad Am^2+Bm+C=o.$$

o ecuațiune, în care A, B, C sînt niște polinoame în x prime între ele, și m un parametru, o constantă, care intră în ecuațiune. Fie m_1, m_2 rădăcinile ecuațiunei (1) rezolvită în raport cu m. Ecuațiunea (1) se poate pune sub forma :

$$(2)\quad A\,(m-m_1)\,(m-m_2)=o.$$

Se vede imediat, că dacă ecuațiunile :

$$(3)\quad m-m_1=o,\ m-m_2=o.$$

sunt rezolvabile pe cale elementară, ecuațiunea (1) este rezolvită. Este evident că una din condițiuni pentru ca ecuația (1) să fie rezolubilă elementar, este ca B^2-4AC să fie un polinom pătrat perfect sau o constantă.

Exemplu. — *Să se rezolve ecuațiunea :*

$$(4)\quad x^4+(1-2m)x^3+(1-3m)x^2+(1+2m^2)x-2=o.$$

Ecuațiunea dată se poate scrie :

$$(5)\quad 2mx^3-(2x^3+3x^2+1)\,m+x^4+x^3+x^2+x=o.$$

sau:

$$2x(m-m_1)\,(m-m_2)=o.$$

unde m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuațiunei (5), adică :

$$\left.\begin{matrix}m_1\\m_2\end{matrix}\right\}=\frac{2x^3+3x^2+1\pm\sqrt{(2x^3+3x^2+1)^2-8x(x^4+x^3+x^2+x)}}{4x}$$

de unde, observînd că cantitatea de sub radical este pătratul polinomului $2x^3+x^2-1$ găsim :

$$m_1=x^2+x,\ m_2=\frac{x^2+1}{2x}.$$

Așa că rezolvirea ecuațiunei propuse se reduce la rezolvirea a două ecuațiuni de gradul al II-lea :

$$x^2+x-m=o \text{ și } x^2-2mx+1=o.$$

2.— Ceea ce s'a zis relativ la o ecuațiune de gradul al II-lea în raport cu m, se aplică evident la o ecuațiune de o formă oare

care (în raport cu m) dintre cele care se pot resolvi pe cale elementară. De exemplu : forma bipatrată, reciprocă, etc.

Exemplu.— *Să se resolve ecuațiunea*

$$(x^2-m^2)^2-4m(x^3-m)(mx-1)=0.$$

(E. N. Barisien.)

Aranjăm polinomul din ecuațiunea dată după puterile lui m. Obținem :

$$m^4+4x.m^3-2(2x^4+x^2+2)m^2+4x^3.m+x^4=0.$$

Ecuațiunea precedentă în raport cu m se poate resolvi elementar. Ea face parte dintr'o clasă de ecuațiuni zise : *Ecuațiuni reciproce în sens mai larg*, spre deosebire de ecuațiunile reciproce ordinare. Să împărțim cu m^2 și să grupăm termenii în modul următor :

$$(6)\quad \left(m^2+\frac{x^4}{m^2}\right)+4x\left(m+\frac{x^2}{m}\right)-2(2x^4+x^2+2)=0.$$

Să punem:

$$m+\frac{x^2}{m}=y \text{ deci: } m^2+\frac{x^4}{m^2}=y^2-2x^2.$$

Ecuațiunea (6) devine:

$$y^2+4yx-4(x^4+x^2+1)=0,$$

de unde:

$$y=-2x\pm 2(x^2+1),$$

sau: $y_1=2x^2-2x+2$, și: $y_2=-2x^2-2x-2$.

Așa că rezolvirea ecuațiunei propuse se reduce la rezolvirea următoarelor două ecuațiuni de gradul II :

$$m+\frac{x^2}{m}=2x^2-2x+2,$$

și:

$$m+\frac{x^2}{m}=-2x^2-2x-2,$$

din cari se scoate:

$$x=\frac{-m\pm(m-1)\sqrt{2m}}{1-2m},$$

și:

$$x=\frac{-m\pm(m+1)\sqrt{-2m}}{1+2m}$$

Ecuațiunea are patru rădăcini, dintre cari numai două reale.

3.— *Mai general* încă, m în loc să fie constant, poate fi un polinom sau chiar o expresiune algebrică oare-care. Se alege deci o necunoscută auxiliară oare-cum parțială, care să ne servească a rezolvi ecuațiunea.

Exemplu.— *Să se rezolve ecuațiunea de gradul IV*:

$$8c^2(x\cos\theta-c)[2x^2(x\cos\theta-c)(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-b^2x(x^2-c^2)\cos\theta]=$$
$$b^4(x^2-c^2)^2,$$

unde $b^2=a^2-c^2$. (E. N. Barisien.)

Să punem:

$$\frac{x(x\cos\theta-c)}{x^2-c^2}=m, \text{ și } b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta=a^2-c^2\cos^2\theta=d^2$$

Ecuațiunea dată se poate scrie:

$$16c^2d^2m^2-8b^2c^2\cos\theta.m-b^4=o,$$

de unde:

$$m=\frac{b^2(c\cos\theta+a)}{4cd^2}=\frac{b^2(c\cos\theta+a)}{a^2-c^2\cos^2\theta},$$

și rezolvirea ecuațiunei propuse se reduce la rezolvirea ecuațiunilor:

$$\frac{x(x\cos\theta-c)}{x^2-c^2}=\frac{b^2}{4c(a-c\cos\theta)},$$

și:

$$\frac{x(x\cos\theta-c)}{x^2-c^2}=-\frac{b^2}{4c(a+c\cos\theta)},$$

ecuațiuni, cari aranjate în raport cu x sînt de gardul II și prin urmare ușor de rezolvit.

4. — Principiul dezvoltat pînă aici se poate aplica adesea cu succes la transformarea unor formule și prin urmare la demonstrarea unor identități.

Exemplu. *Să se demonstreze că*:

$$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=(a+b+c)(a-b-c)$$
$$(b-c-a)(c-a-b).$$

Consider trimonul bipatrat:

$$a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2.$$

Rădăcinile acestui trinom sînt:

$$a_1=b+c, \qquad a_2=-(b+c),$$
$$a_3=b-c, \qquad a_4=-(b-c).$$

Prin urmare trinomul se poate pune sub forma:

$$(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

care poate conduce imediat la cea dată de enunciu.

G. Țițeica.

SIMPLIFICAREA CALCULULUI. — INSTRUMENTE LOGARITMICE. — RIGLA DE CALCUL.

Este de netăgăduit importanța calculului nu numai în științele esacte, ca Mecanica și Astronomia (a căror esență o formează calculul), și în științele aplicate, cum este Ingineria, dar chiar și în științele experimentale și de observațiune, în urma preciziunei ce se caută, de la un timp, să se introducă în metodele lor; de asemenea în stabilimentele financiare, în industrie, în comerț, etc., etc., calculul, de și redus numai la operațiuni simple, ca îmmulțirea și împărțirea, are o importanță foarte mare.

Calculele însă, de multe ori, cer un timp neproporționat cu rezultatele la care se ajunge; în genere sînt obositoare, din causă că cer o prea mare incordare a atențiunei și rare ori ne putem baza pe exactitatea lor, cînd sînt făcute o singură dată. Așa fiind, este natural ca ușurarea sau simplificarea calculului numeric să fi preocupat, multe inteligențe de valoare: în adevăr, din cele mai vechi timpuri și mai la toate popoarele, paralel cu progresele științei, s'au imaginat diverse metode și procedeuri, fie pentru a ușura calculul, fie pentru a înlocui *lucrul intelectual* printr'un *lucru mecanic*, mai puțin obositor, fie pentru a se putea face o verificare simplă sau un calcul aproximativ, suficient în multe cazuri.

Actualmente diferitele moduri de a simplifica calculul numeric se pot rezuma în următoarele cinci grupe :

1) *Instrumente și mașini aritmetice.*
2) *Instrumente logaritmice.*
3) *Calculul grafic.*
4) *Table numerice.*
5) *Table grafice.*

Nu mă voi ocupa de mașinele aritmetice, al căror mecanism ingenios se perfecționează din zi în zi și cari au început să fie apreciate și la noi [1]); de asemenea las la o parte calculul grafic,

[1]) In București, mai multe biurouri de ingineri și stabilimente financiare se servesc cu succes de mașina *Odhner*, cu care se efectuează îmulțirile și împărțirile prin adunări sau scăderi succesive. La exposiția din Paris la 1889 D-nu *Léon Bollée* a prezentat o mașină (invenția sa) cu care se efectuează direct operațiunile. Aflăm că acum în urmă D-sa și a perfecționat invenția și a prezentat'o sub forma definitivă. Singurul inconvenient al acestor mașini este prețul lor relativ cam prea mare.

care interesează mai mult pe ingineri, precum și tablele numerice și cele grafice, scopul meu fiind să descriu *instrumentele logaritmice* și în special *rigla de calcul*, ca una din cele mai ingenioase aplicațiuni practice ale logaritmilor.

Instrumente logaritmice. *Principiul logaritmilor.* Pentru a înțelege principiul acestor instrumente este necesar să se știe ce este *un logaritm;* voi încerca să dau, despre această noțiune, o idee clară și suficientă pentru priceperea celor ce urmează.

Să presupunem că într'un tablou cu două coloane, înscriem, în prima coloană seria numerilor naturale, iar în a doua și în dreptul fie-cărui număr din prima coloană, niște numere —*logaritmi celor d'întîiu* — cari satisfac următoarea condițiune :

No.	Logaritm	No.	Logaritm	No.	Logaritm	No.	Logaritm	No.	Logaritm
1,0	0,00000	3,0	0,47712	5,0	0,69897	7,0	0,84510	9,0	0,95424
1,1	0,04159	3,1	0,49136	5,1	0,70757	7,1	0,85126	9,1	0,95904
1,2	0,07918	3,2	0,50515	5,2	0,71600	7,2	0,85733	9,2	0,96379
1,3	0,11394	3,3	0 51851	5,3	0,72428	7,3	0,86332	9,3	0,96848
1,4	0,14613	3,4	0,53148	5,4	0,73239	7,4	0,86923	9,4	0,97313
1,5	0,17609	3,5	0,54407	5,5	0,74036	7,5	0,87506	9,5	0,97772
1,6	0,20412	3,6	0,55630	5,6	0,74819	7,6	0,88081	9,6	0,98227
1,7	0,23045	3,7	0,56820	5,7	0,75587	7,7	0,88649	9,7	0,98677
1,8	0,25527	3,8	0,57978	5,8	0,76343	7,8	0,89209	9,8	0,99123
1,9	0,27875	3,9	0,59106	5,9	0,77085	7,9	0,89763	9,9	0,99564
2,0	0,30103	4,0	0,60206	6,0	0,77815	8,0	0,90309	1 0	1,00000
2,1	0,32222	4,1	0,61278	6,1	0,78533	8,1	0,90849		
2,2	0,34242	4,2	0,62325	6,2	0,79239	8,2	0,91381		
2,3	0,36173	4,3	0,63347	6,3	0,79934	8,3	0,91908		
2,4	0,38021	4,4	0,64345	6,4	0,80618	8,4	0,92428		
2,5	0,39794	4,5	0,65321	6,5	0,81291	8,5	0,92942		
2,6	0,41497	4,6	0,66276	6,6	0,81954	8,6	0,93450		
2,7	0,43136	4,7	0,67210	6,7	0,82607	8,7	0,93952		
2,8	0,44716	4,8	0,68124	6,8	0,83251	8,8	0,94448		
2,9	0,46240	4,9	0,69020	6,9	0,83885	8,9	0,94939		

Fie *a*, *b* și *c* logaritmi din coloana doua, corespunzători numerilor A, B, C din coloana întîia.

Dacă numărul C este egal cu produsul A×B, trebue ca logaritmul său *c* să fie egal cu suma *a*+*b* a logaritmilor numerilor A și B. Așa de exemplu, logaritmul lui 10 trebue să fie egal cu suma logaritmilor factorilor 2 și 5; logaritmul lui 7, 5 egal cu suma logaritmilor factorilor 5 și 1, 5 etc. etc.

A priori, s'ar părea că nu e posibil să se găsească niște numere, cari să îndeplinească această condițiune; analisa matematică însă demonstrează că este posibil. Trebue să notăm că această demonstrație s'a făcut mult mai tîrziu după descoperirea logaritmilor de către Neper, descoperire publicată pentru prima oară în Edimburg, la anul 1614 sub titlul: «*Descripțiunea unei admirabile able de logaritmi și explicarea întrebuințărei ei, universale, ușoare și repede, în cele două trigonometrii și în ori-ce calcul matematic, de Jean Neper, baron de Merchiston*».

Logaritmii ușurează foarte mult operațiunile aritmetice și trigonometrice, reducîndu-le la niște simple adunări sau scăderi, efectuate asupra logaritmilor numerilor.

Așa de exemplu, dacă voim să aflăm produsul numerilor A și B, căutăm în table logaritmii corespunzători a și b, facem suma lor $a + b = c$, și apoi căutăm în coloana logaritmilor pe c; numărul corespunzător C din coloana I-a, este, prin urmare, produsul căutat sau mai bine zis valoarea apropiată a acestui produs, după gradul de aproximație ce ni'l dă tablele de care ne servim. Logaritmii se găsesc foarte ușor în table din cauză că totdeauna ei cresc în același sens ca și numerile înscrise în prima coloană.

Pentru o împărțire se face operațiunea inversă, adică se caută numărul al cărui logaritm este egal cu diferința dintre logaritmul deîmpărțitului și acel al împărțitorului.

A m^a putere a unui număr A, fiind egală cu productul a m factori egali cu A, logaritmul său va fi egal cu suma a m logaritmi egali cu a. Vom avea deci logaritmul puterei, multiplicînd pe m cu a.

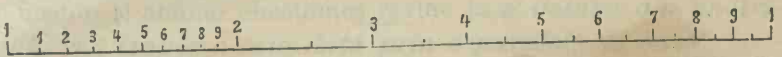
Invers, logaritmul rădăcinei a m^a a unui număr, va fi egal cu a m^a parte a logaritmului acelui număr.

Scara logaritmică.— Din cele ḍise pînă acum se vede că efectuarea operațiunilor prin ajutorul logaritmilor comportă trei faze și anume: 1°) Căutarea în table a logaritmilor numerilor date; 2°) Combinarea acestor logaritmi prin adunare saŭ scădere; 3°) Căutare în table a numărului al cărui logaritm este egal cu rezultatul acestei combinări.

Prin exercițiu, se ajunge ca toate aceste operațiuni să ceară foarte puțin timp. Cu toate acestea, de îndată ce *Neper* și-a dat

la lumină invenția, s'a căutat, ca, cel puțin pentru trebuințele practice, unde e de ajuns o aproximație nu prea mare, să se simplifice și mai mult calculul, făcînd ca cele trei faze să se realiseze oare cum în mod mecanic. Felul cum s'a realizat aceasta poate să ni se pară astă-zi foarte simplu și natural: trebue să ne gîndim însă că această idee a *scărilor logaritmice* s'a născut pe la începutul secolului al XVII-lea.

Pentru a construi o *scară logaritmică*, ducem, pe o linie dreaptă, începînd de la un acelaș punct, luat ca origine, niște lungimi proporționale cu logaritmi numerilor; la extremitățile fiecăror din aceste lungimi însemnăm numărul, al cărui logaritm e proporțional cu lungimea considerată.



Vom însemna origina cu cifra 1, de oare-ce logaritmul lui 1 este necesarmente nul [1]); apoi plecînd de la acest punct, vom duce segmente, ale căror lungimi, măsurate cu o unitate arbitrară, sînt egale cu logaritmii numerilor: 2, 3, 4, etc., și la extremitățile fiecărui segment vom scrie numerile 2, 3, 4, etc.; în intervale vom duce segmente proporționale cu 1,1; 1,2; 1,3;... 1,9; 2,1; 2,2;.. 2,9 etc.

Dacă scara este prea mică și prin urmare diviziunile prea apropiate, ne putem dispensa de a scrie toate aceste numere alături de extremitățile segmentetor și ne vom mărgini numai să le însemnăm prin niște trăsături normale la linie. Pentru a înlesni însă citirea, dăm o lungime mai mare trăsăturilor, ce corespund cu numerile 1,5; 2,5; 3,5 etc. etc.

O dată scara construită, iată cum ne putem servi de dînsa pentru a face operațiunile despre care am vorbit.

Să presupunem că se cere să aflăm produsul A×B.

Cu o deschidere de compas luăm lungimea segmentului cuprins între originea 1 și trăsătura cotată B (segmentul 1B); punînd apoi un vîrf al compasului pe trăsătura cotată A, ducem lungimea segmentului 1B pe scară înainte: numărul citit în fața celui de al doilea vîrf al compasului va fi produsul căutat AB.

---

[1]) In adevăr pentru că A×1=A, avem, dupe definiție log A+log 1=log A, prin urmare log 1=0.

In adevăr, segmentul cuprins între originea 1 și al douilea vîrf al compasului se compune: 1°) din segmentul coprins între 1 și punctul cotat A, egal prin construcție cu log A ; 2°) din deschiderea de compas egală cu segmentul cuprins 1 și punctul cotat B, adică log B. Acest segment este egal deci cu log A+log B, sau după definiția logaritmilor, cu log (A×B.) Prin urmare, în virtutea modului de construcție al scărei, în dreptul celui de al douilea vîrf al compasului, este înscrisă chiar valoarea acestui produs.

(Va urma). Z.

DESPRE PARCELAREA POLIGOANELOR PRIN DREPTE PARALELE

O chestiune care se prezintă în practica parcelărilor, adică a împărțirei terenurilor în părți de suprafețe anumite, este și următoarea: *să se împartă aria închisă de un contur poligonal sau curb* (care se poate considera tot poligonal, înscriind un poligon pe cît voim de apropiat de aria limitată prin curbă), *în părți de suprafețe anumite prin drepte paralele cu o direcțiune dată.*

Această chestiune însă se reduce în cele din urmă la aceia de a detașa dintr'un trapez sau triunghiu o arie dată prin o paralelă la bazele trapezului sau la o latură a triunghiului. In adevăr, fie că s'ar cere a divide poligonul în părți echivalente sau proporționale cu cantități date, fie că s'ar cere a'l divide după ori și ce alte condițiuni, vom calcula aria totală a poligonului și apoi un calcul aritmetic sau algebric ne va da valoarea fie-cărei porțiuni. Chestiunea revine deci la a separa un poligon în porțiuni de arii date. Acum e evident că e destul a cunoaște modul de a detașa din poligon numai prima porțiune *(parcelă)*, căci apoi restul îl vom considera ca un nou poligon din care să separăm a doua parcelă, și așa mai departe.

Pentru a rezolvi această din urmă problemă, să presupunem că voim a detașa prima parcelă de la stînga, a cărei arie să o însemnăm cu S. Fie *mn* direcția liniilor care va desparte parcelele. Vom duce prin B sau G o paralelă cu *mn* care să detașeze la stînga un triunghiu iar nu un poligon cu mai multe laturi. Fie

BM. această paralelă. Dacă aria ABM = S chestiunea e resolvată. Dacă aria ABM > S atunci chestiunea revine a detașa din triunghiul ABM un triunghiu de arie dată, prin o paralelă la latura BM. Dacă în fine aria ABM < S, atunci prin vîrfurile C sau G ducem o paralelă la *mn* care să detașeze la stînga un trapez BMNC, iar nu un poligon cu mai multe laturi.

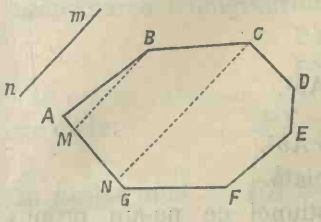


Fig. 1.

Din acest trapez va trebui să detașăm o arie care să complecteze aria S, sau dacă nici acest trapez nu e suficient, vom continua mai departe în modul indicat. Deci se adevereşte cele spuse mai înainte și anume chestiunea revine la *a detașa din un triunghiu sau trapez o arie dată prin o paralelă la bază.*

Pentru a resolvi această chestiune voi lua ca necunoscută linia care detașează aria cerută. Lungimea acestei linii o vom deduce cu ajutorul următoarei teoreme.

Teoremă. *Produsul ariei unui trapez prin pătratul unei linii paralelă cu bazele și limitată la laturile neparalele, este egală cu suma produselor obținute înmulțind pătratul fiecărei baze prin aria detașată lîngă cealaltă bază.*

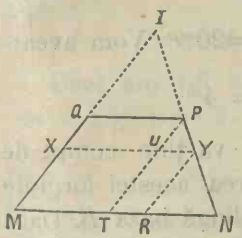


Fig. 2.

Pentru a demonstra această teoremă prelungim laturile neparalele ale trapezului pînă la intersecțiunea lor I. Vom însemna:

aria IPQ=S, aria XYPQ=a, aria MNYX=A,

XY=x, PQ=b, MN=B.

Din asemănarea triunghiurilor IPQ, IYX, INM deducem:

$$\frac{\text{aria PQI}}{\text{aria XYI}} = \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{XY}^2} \text{ sau } (1)\ \frac{S}{S+a} = \frac{b^2}{x^2},$$

$$\frac{\text{aria IXY}}{\text{aria IMN}} = \frac{\overline{XY}^2}{\overline{MN}^2}, \text{ sau } (2)\ \frac{S+a}{S+b+A} = \frac{x^2}{B^2}$$

Din (1) și (2) deducem aplicînd proprietățile proporțiilor:

$$\frac{a}{S+a} = \frac{x^2-b^2}{x^2}, \text{ și } \frac{S+a}{A} = \frac{x^2}{B^2-x^2}.$$

Inmulţind aceste 2 egalităţi obţinem:

$$\frac{a}{A} = \frac{x^2 - b^2}{B^2 - x^2},$$

de unde:

$$aB^2 - ax^2 = Ax^2 - Ab^2,$$

sau:

$$(3) \quad (A+a)x^2 = aB^2 + Ab^2.$$

egalitate care demonstră teorema enunciată.

Acum putem trece la soluţiunea chestiunei ce ne-am propus. Fie S aria ce trebue detaşată şi fie H înălţimea trapezului. Prin urmare vom avea:

$$A+a = \frac{B+b}{2} H, \qquad A = S, \qquad a = \frac{B+b}{2} H - S.$$

Prin urmare egalitatea (3) devine:

$$\frac{B+b}{2} H.x^2 = \frac{B+b}{2} H.B^2 - SB^2 + Sb^2.$$

de unde:

$$x^2 = B^2 - \frac{2S}{H} \cdot \frac{B^2 - b^2}{B+b} = B^2 - \frac{2S}{H}(B-b),$$

deci:

$$4) \quad x = \sqrt{B^2 - \frac{2S}{H}(B-b)}.$$

Aplicaţiune. Fie $H=8^m$, $B=6^m$, $b=2^m$, $S=20^{mp.}$ Vom avea:

$$x = \sqrt{6^2 - \frac{2.20\ (6-2)}{8}} = 4^m.$$

Observaţiune. In aplicarea formulei (4) se va ţine compt de semnul lui $B-b$, şi se va observa că stabilirea acestei formule s'a făcut în hipotesă că S trebue să fie detaşat lîngă baza B. Dacă am fi voit ca S să fie detaşat lîngă basa cea mică; atunci vom aplica următoarea formulă dedusă din formula (4) schimbînd b în B şi vice-versa:

$$5) \quad x = \sqrt{b^2 - \frac{2S}{H}(b-B)}.$$

Fie de exemplu $b=2^m$, $B=6^m$, $H=8^m$, $S=12^{mp.}$ Vom găsi $x=4^{m.}$

Cunoscînd lungimea dreptei XY putem găsi poziţiunea ei în trapez, luînd $MR=x$ şi ducînd RY paralel cu MQ, şi apoi prin punctul unde această paralelă taie latura PM, vom duce o paralelă (XY) la bazele trapezului. Putem determina şi prin calcul lungimile

MX și NY. In adevăr ducînd PT paralel cu MI, vom avea din asemănarea triunghiurilor PUY și PTN:

$$\frac{PY}{PN} = \frac{UY}{TN},$$

de unde: $$PY = PN\,\frac{UY}{TN} = PN\,\frac{x-b}{B-b},$$

In acelaș mod: $$PX = PM\,\frac{x-b}{B-b}.$$

Dacă în formulele (3) (4) (5) vom face $b = o$, vom găsi soluțiunea chestiunei propuse în casul unui triunghiu.

Relațiunea (3) este cea mai bună de întrebuințat, de oare-ce pe de o parte ea se poate memora foarte ușor, iar pe de altă parte întrebuințarea formulelor (4) și (5) ar putea da loc la confuziuni în privința posițiunei ariei detașate. Așa de exemplu să ne propunem a divide trapezul în n părți egale și a detașa m din aceste părți spre baza cea mică. Relațiunea (3) ne va da:

$$(A+a)\,x^2 = \frac{m}{n}\,(A+a)\,B^2 + \frac{n-m}{n}\,(A+a)\,b^2,$$

de unde: $$nx^2 = m\,B^2 + (n-m)\,b^2,$$

și prin urmare:

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{m}{n}(B^2-b^2)}.$$

Dacă am voi a divide trapezul în 2 părți echivalente, atunci $m = 1$ și $n = 2$. Deci:

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{1}{2}\,(B^2-b^2)} = \sqrt{\frac{(B^2+b^2)}{2}}.$$

Notă. O chestiune care se resolvă în acelaș mod este și următoarea: *să se taie din o piramidă sau con, sau trunchiuri de piramidă și de con, porțiuni de volum dat prin plane paralele la bază.* Urmînd acelaș procedeu ca și mai sus vom găsi relațiunea:

$$(A+a)\,x^3 = aB^3 + Ab^3.$$

în care A și a sunt cele 2 volume separate de un plan paralel cu baza, iar B și b basele uneia din fețele laterale ale trunchiului de piramidă, sau razele bazelor trunchiului de con. Cu ajutorul acestor formule vom putea calcula pentru fie-care față liniile de intersecțiune ale planului ce separă cele 2 porțiuni cu fețele laterale ale trunchiului de piramidă, sau putem calcula raza circonferenții de secțiune pentru trunchiul de con.

I. N. Neculcea

PROBLEME REZOLVITE

Problema 10. *O dreaptă întîlnește o cisoidă în trei puncte A, B, C și perpendiculara la axă trecînd prin punctul de rebrusment O al cisoidei într'un punct M. Dacă P este proecțiunea punctului O pe dreaptă și dacă a este distanța punctului O la asimptotă, a se demonstra că avem :*

$$OA.OB.OC = a.OM.OP.$$ **(V. Cristescu.)**

Soluție dată de d-nul D. Negulescu, Student. Ecuația cisoidei raportată la axă și la perpendiculară trecînd prin punctul său de rebrusment O, este:

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}. \tag{1}$$

Fie :

$$y = mx + n, \tag{2}$$

ecuația unei drepte ce taie cisoida în punctele A, B, C și (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) coordonatele punctelor A, B, C. Vom avea :

$$OA.OB.OC = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2)}. \tag{3}$$

Punctul A fiind pe cisoidă, avem:

$$y_1^2 = \frac{x_1^3}{a-x_1},$$

și deci :

$$x_1^2 + y_1^2 x = x_1^2 + \frac{x_1^3}{a-x_1} = \frac{ax_1^2}{a-x_1}.$$

In mod analog vom găsi:

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{a x_2^2}{a-x_2}, \text{ și } x_3^2 + y_3^2 = \frac{a x_3^2}{a-x_3}.$$

Inlocuind în (3) obținem :

$$OA.OB.OC = \frac{a\sqrt{a}(x_1x_2x_3)}{\sqrt{a^3 - a^2\Sigma x_1 + a\Sigma x_1x_2 - x_1x_2x_3}}.$$

Dacă între ecuațiile (1) și (2) eliminăm pe y, găsim că ecuația care ne dă abscisele punctelor de intersecție ale dreptei (1) cu cisoida, este:

$$(1+m^2)x^3 - (am^2 - 2mn)x^2 + (n^2 - 2mna)x - an^2 = 0,$$

și prin urmare vom avea:

$$\Sigma x_1 = \frac{am^2-2mn}{1+m^2}, \quad \Sigma x_1x_2 = \frac{n^2-2mna}{1+m^2}, \quad x_1x_2x_3 = \frac{an^2}{1+m^2}.$$

Ducînd aceste valori în (4), obținem:

$$OA.OB.OC=a.n.\frac{n}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Insă: $OM=n$ și $OP=\frac{n}{\sqrt{1+m^2}}$,

deci: $OA.\ OB.\ OC=a.\ OM.\ OP.$

Problema 13. — *Fie o progresie aritmetică de $n+1$ termeni, primul termen fiind a și rația 1, se ridică fie-care termen al acestei progresiuni la o aceiași putere întreagă positivă. Să se arate că la proprietățile cunoscute ale progresielor aritmetice, corespund pentru șirul ast-fel format proprietățile următoare:*

1) Un termen oare-care este mai mare ca primul plus de atîtea ori rația ridicată la acea putere, cîți termeni sînt înaintea lui; 2) Suma a doi termeni egal depărtați de extremi e mai mică ca suma extremilor; Suma termenilor e mai mică ca semisuma extremilor multiplicată cu numărul termenilor, dar mai mare ca semisuma termenilor (sau terminul) de la mijloc multiplicată cu numărul terminilor.

(A. G. Ioachimescu.)

Soluție, dată de d-nii Bogdan Ionescu și I. Bucurescu, Elevi ai școalei Normale Superioare din Bucuresci. Prima proposiție e evidentă. Ea resultă imediat din inegalitatea (1) $a^m+pr^m<(a+pr)^m$ în care m e puterea indicată și p rangul termenului în progresie.

Ca să demonstrăm numărul (2) vom verifica inegalitatea $a^m+(a+nr)^m>(a+pr)^m+[a+(n-p)\,r]^m$ o vom scrie sub forma: $a^m+[a+(n-p)\,r+pr]^m>(a+pr)^m+[a+(n-p)\,r]^m$. Desvoltînd binoamele, avem evident:

$$mpr\,[a+(n-p)\,r]^{m-1}+\frac{m\,(m-1)}{1.2}p^2r^2\,[a+(n-p)\,r]^{m-2}+\ldots>$$

$$mpra^{m-1}+\frac{m\,(m-1)}{1.2}p^2r^2a^{m-1}+\ldots$$

Dacă n e par, avem tabloul ce urmează după (1), dînd lui p valorile 1, 2, 3 . . . . .

$$(3)\begin{cases} a^m+(a+nr)^m > (a+r)^m+[a+(n-1)r]^m \\ a^m+(a+nr)^m > (a+2r)^m+[a+(n-2)r]^m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{a^m+(a+nr)^m}{2} > \left(a+\dfrac{n}{2}r\right)^m \end{cases}$$

Dacă n e impar avem acelaș tablou, dar ultima inegalitate $a^m+(a+nr)^m > \left(a+\dfrac{n-1}{2}r\right)^m+\left(a+\dfrac{n+1}{2}r\right)^m$.

Și deci însemnînd cu $\Sigma(n+1)$, suma termenilor progresiei deducem din (3) în ambele cazuri $\Sigma(n+1) < \dfrac{n+1}{2}[a^m+(a+nr)^m]$.

Vom arăta că:

(4) $\left[a+\dfrac{n}{2}r-pr\right]^m+\left[a+\dfrac{n}{2}r+pr\right]^m > 2\left[a+\dfrac{n}{2}r\right]$ cînd n e par

și (5) $\left[a+\dfrac{n}{2}r-pr\right]^m+\left[a+\dfrac{n}{2}r+pr\right]^m > \left(a+\dfrac{n-1}{2}\right)^m+\left(a+\dfrac{n+1}{2}r\right)^m$,

cînd n e impar. Inegalitatea (4) se verifică dacă desvoltăm binoamele, căci se vede că:

$$2\left(a+\frac{a}{2}r\right)^m+2mp^2r^2\left(a+\frac{n}{2}r\right)^{m-2}\frac{(m-1)}{1.2}+\frac{2m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}p^4r^4\times$$
$$\left(a+\frac{n}{2}r\right)^{m-2}+\ldots > 2\left(a+\frac{n}{2}r\right)^m.$$

Inegalitatea (5) se verifică în acelaș mod punînd'o sub forma:

$$\left[a+\frac{n-1}{2}r-\left(p-\frac{1}{2}\right)r\right]^m+\left[a+\frac{n+1}{2}r+\left(p-\frac{1}{2}\right)r\right]^m > \left(a+\frac{n-1}{2}r\right)^m$$
$$+\left(a+\frac{n+1}{2}r\right)^m.$$

Utilizînd pe (4) și (5) întocmai cum am utilizat pe (1), vom forma tablouri analoage cu (3) din care vom deduce a doua parte a propoposiției (3).

* **Problema 18.** *Se scrie unul după altul fără a le separa toate numerile întregi începînd de la 1. Se cere a se afla de cîte ori se va întîlni a 1000000 cifră în primele 10000 cifre.* (I. Ionescu.)

Soluție dată de d-nii C. Ionescu și C. Virgiliu, Sergenți în Regimentul I de Geniu.

Pentru a găsi a 1000000 cifră, descompunem șirul în modul următor:

De la	1	pînă la	10	ne trebue	$9\times1=$	9	cifre.
» »	10	» »	100	» »	$90\times2=$	180	»
» »	100	» »	1000	» »	$900\times3=$	2700	»
» »	1000	» »	10000	» »	$9000\times4=$	36000	»
» »	10000	» »	100000	» »	$90000\times5=$	450000	»
Deci de la	1	» »	100000	» »		488889	»

Nu mergem mai departe, căci vom trece peste 1000000 cifre. Insă pînă la acest număr de cifre ne mai trebue 1000000—488889= 511111 cifre. Dar numerile de la 100000 au 6 cifre fie-care. Deci ne va mai trebui încă $\frac{511111}{6} = 85185 + \frac{1}{6}$ numere. Deci în total am întrebuințat 100000+85185=185185 numere și ne mai trebue o cifră din numărul următor 185186. Prima cifră a acestui număr e 1. Deci a 1000000 cifră a șirului e 1.

Să căutăm acum de cîte ori 1 se găsește în primele 10000 cifre. Pentru aceasta ne trebue să știm cîte numere sînt necesare pentru a complecta 10000 cifre. Din tabloul de mai sus reese că de la 1 pînă la 1000 ne trebue 9+180+2700 = 2889 cifre. Ne mai trebue deci 10000—2889=7111 cifre. Numerile de la 1000 în sus avînd 4 cifre ne va trebui $\frac{7111}{4} = 1777 + \frac{3}{4}$ numere. Deci în total 1000+1777=2777 numere plus 3 cifre din numărul următor 2778. Acum observăm că:

De la	1	pînă la	100	se găsește	1	de	20	ori (1+10+9).
» »	100	» »	200	» »	1	»	120	» (100+20).
» »	200	» »	1000	» »	1	»	160	» (8×20).
» »	1000	» »	2000	» »	1	»	1300	» (1000+20+120+160).
» »	2000	» »	2700	» »	1	»	240	» (20+120+5×20).

De la 2700 până la 2777 se găsește 1 de 18 ori (1 + 11 + 6).
» » 2777 » » 2778 » » 1 » 0 »
Deci:
De la 1 » » 2778 » » 1 de $\overline{1858}$ »
Prin urmare rezultatul căutat e 1858.

Notă. A doua parte a acestei probleme se poate rezolvi mai ușor în modul următor.

Observăm că începînd cu 1, la 10 numere consecutive avem pe 1, o dată la unități; la 100 numere consecutive avem pe 1 de 10 ori la zecimi; la 1000 de numere consecutive avem de 100 ori pe 1 la sutimi, etc. Deci de la 1 la 2777 vom avea pe 1:

La unimi de	277 + 1 = 278 ori	(odată de la 0 la 7 al unimilor lui 2777)
„ zecimi de	27 × 10 + 10 = 280 ori	(de 10 ori „ „ „ „ „ „ zecimilor „ 2777)
„ sutimi de	2 × 100 + 100 = 300 „	(„ 100 „ „ „ „ „ „ „ sutimilor „ 2777)
„ mii de	1000 „	
„ cele 3 cifre ale lui 2778	0 „	
	$\overline{1858}$ „	

***Problema 25.** *Să se demonstreze egalitatea.*

$$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=2(2\sqrt{2}-\sqrt{3}).$$

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-ra Matilda Nicolescu și D-nii N. Negoescu I. Cristescu, A. Iliovici, G. Iliovici, C. Popovici, D. Negulescu, C. Mateiescu, C. S. Stănulescu, I. Tutuc și N. Trandafirescu.

Înmulțind ambii termeni ai fracțiunilor cu conjugatele numitorilor, obținem:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[(3+\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+(3-\sqrt{5})\times\sqrt{3-\sqrt{5}}-2\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}\Big]$$

Însă:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}},$$

Înlocuind și făcînd înmulțirile, obținem:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-2\sqrt{3}\sqrt{5}\Big]=2\Big(\frac{4}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\Big),$$

sau:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=2\,(2\sqrt{2}-\sqrt{3}).$$

Problema 31. — *Fiind dat o elipsă E, în paralelogramul format prin unirea vîrfurilor sale se înscrie o elipsă E_1, asemenea cu E; se repetă pentru E_1 aceiași construcție ca și pentru E și așa mai înainte îndefinit; să se găsească limita rapoartelor dintre suprafața sau lungimea primei elipse și suma suprafețelor sau lungimilor tutulor celorlalte elipse. Aceiași chestiune pentru elipsoid, înlocuind paralelogramul printr'un octaedru, suprafața și volumul elipsei prin volumul și suprafața lipsoidului.* (Constanța Pompilian.)

Soluție dată de d-nul Catone Erbiceanu, Elev în Anul IV al Școalei de Poduri și Șosele.

I. Elipsa. Să căutăm ecuațiunea elipsei E_1. Ecuațiunea generală a conicelor înscrise în patrulaterul ale cărui laturi sînt:

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha-\beta+\gamma=0, \quad \alpha+\beta-\gamma=0, \quad \alpha-\beta-\gamma=0,$$

este:

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}+\frac{\beta^2}{1-\lambda}-\gamma^2=0,$$

în care λ este un parametru variabil. Pentru paralelogram se poate ușor vedea că avem:

$$\alpha=bx, \qquad \beta=ay, \qquad \gamma=ab \text{ (dreapta la infinit)}.$$

Deci ecuațiunea generală a conicelor înscrise în acest patrulater va fi:

$$\frac{x^2}{a^2\lambda}+\frac{y^2}{b^2(1-\lambda)}-1=0.$$

E evident că toate elipsele considerate vor fi asemenea cu elipsa E. Rezultă deci:

$$\lambda=1-\lambda,$$

de unde:

$$\lambda=\frac{1}{2},$$

și prin urmare ecuațiunea elipsei E_1 va fi:

$$\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}-1=0,$$

și în același mod, ecuațiunile celorlalte elipse vor fi:

$$\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}-1=0.$$

$$\frac{8x^2}{a^2}+\frac{8y^2}{b^2}-1=0.$$

iar lungimile semi-axelor acestor elipse vor fi :

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ și } \frac{b}{\sqrt{2}}; \quad \frac{a}{\sqrt{2^2}} \text{ și } \frac{b}{\sqrt{2^2}}; \quad \frac{a}{\sqrt{2^3}} \text{ și } \frac{b}{\sqrt{2^3}}; \text{ etc.}$$

1) Raportul între suprafața elipsei E și suma suprafețelor celorlalte elipse va fi :

$$\frac{\pi ab}{\frac{\pi ab}{2} + \frac{\pi ab}{4} + \frac{\pi ab}{8} + \cdots} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots} = \frac{1}{1} = 1$$

2) Perimetrul p al elipsei E este :

$$p = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

în care e este excentricitatea, iar φ e unghiul excentric. Elipsele fiind asemenea, au aceiași excentricitate și prin urmare integrala precedentă e aceiași pentru toate elipsele. Să însemnăm cu I această integrală. Rezultă de aci că raportul între perimetrul primei elipse și suma perimetrelor celorlalte elipse va fi :

$$\frac{a\,I}{\frac{a}{\sqrt{2}} I + \frac{a}{\sqrt{2^2}} I + \frac{a}{\sqrt{2^3}} I + \cdots} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \cdots} = \sqrt{2} - 1$$

Notă. Se poate vedea și în modul următor, că raportul între axele a 2 elipse consecutive e $\sqrt{2}$. În adevăr ecuațiunea unei trangente la elipsă e:

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

și pentru că aceasta e paralelă cu linia ce unesce vîrfurile avem $m = -\frac{b}{a}$. Deci ecuațiunea tangentei devine :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \sqrt{2} = 0,$$

și prin urmare această dreaptă interceptează pe axele OX și OY, lungimile $a\sqrt{2}$ și $b\sqrt{2}$. Deci raportul între axele elipselor înscrise și circumscrise a aceluiași paralelogram e $\sqrt{2}$.

II. Elipsoid. Ecuațiunea unuĭ plan tangent la elipsoid paralel cu planul :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

fiind :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma},$$

urmează că planul tangent la elipsoid paralel cu planul :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

va fi :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\sqrt{\frac{3}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}},$$

sau :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}.$$

Lungimile interceptate de acest plan pe cele 3 axe sunt: $a\sqrt{3}$, $b\sqrt{3}$, $c\sqrt{3}$. Deci raportul între lungimile axelor elipsoizilor înscriși și circumscriși octaedrului format de cele 6 vîrfuri ale unui elipsoid este $\sqrt{3}$.

Raportul căutat dintre volume va fi :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi abc}{\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^6}}+\frac{1}{\sqrt{3^9}}+\ldots\right)}=\sqrt{3^3}-1=\sqrt{27}-1.$$

2) Suprafața elipsoidului :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

e dată de relațiunea :

$$S=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\int_0^{\mu}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi+c^2\int_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right],$$

în care : $$k^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)},\ \text{și}\ \cos\mu=\frac{c}{a}.$$

Rezultă de aci că S e de gradul II în raport cu a, b și c (ceia ce se putea prevede). Cantitățile k și μ fiind constante pentru toți elipsoizii, asemeni rezultă că S nu va varia de la un elipsoid la altul de cît din cauza cantităților a, b și c, și anume după puterea a doua a uneia din aceste 3 cantități. Deci dacă S e suprafața primului elipsoid, suprafața celui de al douilea va fi: $S\times\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}^2$ sau $\frac{S}{3}$.

Deci raportul căutat dintre suprafețe va fi :

$$\frac{S}{S\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)}=4-1=2.$$

***Problema 33.**— *Să se demonstreze egalitatea* :

$$\alpha+\beta+\gamma-\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+b\operatorname{tg}\frac{B}{2}+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=3(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

în care α, β, γ, *sînt razele cercurilor exînscrise la un triunghiu*, A, B, C, *cele trei unghiuri și* a, b, c *cele trei laturi.* (I. Tutuc.)

Soluție dată de D-ra Matilda Niculescu și D-nii N. Negoescu (Rîmnicul-Vîlcei), *I. Bucurescu, C. S. Stănulescu, N. Trandafirescu* și *I. Cristescu.*

Se știe că : $\alpha=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\beta=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\gamma=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Inlocuind în expresiunea dată, ea devine :

$$(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}+(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Dacă însemnăm cu r raza cercului înscris în triunghiul ABC, se știe că avem:

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

deci :

$$\alpha+\beta+\gamma-\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+b\operatorname{tg}\frac{B}{2}+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=3(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=3(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$$

$$3(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=3r.$$

***Problema 34.**—*Un număr e format din cifre impare. Să se demonstreze că diferența dintre acest număr și numărul format scriind cifrele acestui număr în ordine inversă, nu poate avea de cît cinci valori.* (I. Ionescu.)

Soluție dată de D-nii N. Negoescu, C. Ionescu și C. Virgiliu.

Inainte de a găsi valorile diferenței, vom face următoarele observări:

1) Dacă cifrele sutimilor și unimilor sînt egale, atunci scăzătorul e egal cu descăzutul și prin urmare diferența va fi zero. Deci una din valorile diferenței este 0. In cele ce urmează nu vom mai ține seamă de acest caz.

2) Cifra unimilor restului va fi totdeauna pară. In adevăr, obținem această cifră, scăzînd sutimele din unimile numărului dat, sporite cu 10. Sporirea cu 10 este necesară totdeauna, de oare-ce sutimile numărului dat trebue să fie mai mari ca unimile, pentru ca inversînd numărul să putem obține scăzătorul mai mic ca des-

căzutul. Dar unimile impare, sporite cu 10, ne dau un număr impar, din care scăzînd sutimile impare ne va rămîne un număr par, și anume: 0, 2, 4, 6, 8. Deci unimile restului nu poate fi de cît una din aceste cifre.

3) Cifra zecimilor restului nu poate fi de cît 9. In adevăr am văzut că pentru a avea unimile restului a trebuit să sporim cu 10 unimile descăzutului. Deci zecimile descăzutului s'au micșorat cu 1. Dar cifra zecimilor e aceiași la descăzut și scăzător, de oare-ce inversînd un număr de 3 cifre, cifra mijlocie nu'și schimbă locul. Deci obținem zecimile diferenței, scăzînd un număr din altul mai mic cu 1. Aceasta neputîndu-se face, vom spori zecimile descăzutului cu 10 sau 9+1. Adunînd 1 la cifra descăzutului o facem egală cu cifra scăzătorului și prin urmare restul va fi tot-d'auna 9. Deci ultimele două cifre ale restului pot fi: 90, 92, 94, 96 și 98. Prima valoare însă nu e admisibilă, de oare-ce dacă obținem 0 la unități, aceasta probează că cifrele sutimilor și unimilor numărului dat sînt egale, și atunci după No. 1 diferența e 0. Deci rămîne ca valori admisibile: 92, 94, 96, 98.

4) Adunînd cifrele sutimilor și unimilor restului, obținem 9. Aceasta se poate proba în următoarele moduri:

a) De oare-ce pentru a afla zecimile restului am sporit cu 10 zecimile descăzutului, rezultă că cifra sutimilor descăzutului e micșorată cu 1. Deci obținem sutimile restului, scăzînd unimile numărului dat din sutimile micșorate cu 1. Am văzut apoi că obținem unimile restului, scăzînd sutimile numărului dat din unimile lui sporite cu 10. Deci în total suma cifrelor unimilor și sutimilor restului o vom obține scăzînd din sutimi micșorate cu 1 și unimi mărite cu 10, sutimile și unimile. Ne va rămîne deci 10 micșorat cu 1, adică 9.

b) Se știe că un număr oare-care e un multiplu de 9 plus suma cifrelor sale adunate ca simple unități. Inversînd numărul, vom obține un alt multiplu de 9, plus suma acelorași cifre. Deci restul acestor două numere va fi un multiplu de 9. Dar cifra zecimilor restului e 9, deci suma cifrelor unimilor și sutimilor restului trebue să fie un multiplu de 9, și anume chiar 9; de oare-ce pentru ca această sumă să fie cel puțin 18 (multiplu de 9), ar trebui ca ambele cifre să fie 9, ceea ce nu se poate, de oare-ce unimile sînt pare.

Din cele spuse mai sus reese că singurile valori admisibile pentru rest sînt: 0, 792, 594, 396 și 198.

Soluție dată de D-nii I. Bucurescu, A. Iliovici, G. Iliovici, C. Popovici, N. Trandafirescu și I. Tutuc.

Fie a, b, c, cele 3 cifre impare ale numărului dat N. Vom avea:

$$N = 100\,a + 10\,b + c.$$

Inversînd acest număr, vom obține un alt număr N′:

$$N' = 100\,c + 10\,b + a.$$

Scăzînd aceste 2 numere avem:

$$N - N' = 99\,a - 99\,c = 99\,(a - c).$$

Dar a și c fiind două numere impare mai mici ca 10, diferența lor nu poate fi de cît un număr par mai mic ca 10 adică 0, 2, 4, 6 și 8. Deci diferența N—N′ nu poate fi de cît de 99 ori una din aceste valori, adică 0, 198, 396, 594 și 792.

PROBLEME PROPUSE

49. Să se rezolve în numere întregi ecuațiunea:

$$2y^4 - 7y^3x + y^2x^2 + 7yx^3 - 3x^4 = 0.$$

(N. NEGOESCU.)

50. Să se găsească fără ajutorul derivatelor adevărata valoare a expresiunei:

$$\frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}$$

pentru $x = 0$.

(N. NICOLESCU.)

*51. Fie A′, B′, C′ punctele unde bisectriţele interioare ale unghiurilor unui triunghiu ABC întîlnesc cercul circumscris. Să însemnăm cu S, S′, S_a, S_b, S_c ariele triunghiurilor ABC, A′B′C′, AB′C′, BC′A′, CA′B′; în fine p perimetrul triunghiului ABC. Să se demonstreze relația:

$$R^2 S^2 S' = 4p^2 S_a S_b S_c.$$

(G. ȚIȚEICA.)

*52. Se consideră patrulaterul A'B'C'D' format prin intersecțiunele diagonalelor AC, BD ale unui patrulater inscriptibil ABCD, cu perpendicularele scoborîte din vîrfurile B, D și A, C respectiv opuse diagonalelor AC și BD. Să se demonstreze: 1) Că patrulaterul A'B'C'D' este și el inscriptibil; 2) Că există relația $S'=S\cos^2\varphi$ în care S e aria patrulaterului ABCD, S' aria patrulaterului A'B'C'D' și φ unghiul diagonalelor AC, BD.

(BOGDAN IONESCU.)

*53. A se verifica identitatea:

$$\left(\cos\frac{32\pi}{17}+\cos\frac{26\pi}{17}\right)\left(\cos\frac{30\pi}{17}+\cos\frac{18\pi}{17}\right)=$$
$$\left(\cos\frac{22\pi}{17}+\cos\frac{20\pi}{17}\right)\left(\cos\frac{28\pi}{17}+\cos\frac{24\pi}{17}\right)$$

(I. GHIBALDAN.)

54. In ori-ce elipsoid există o sferă de rază constantă, concentrică cu elipsoidul, și care e tangentă la ori-ce plan secant ce trece prin extremitățile a 3 diametre rectangulare. Chestiunea analoagă pentru elipsă.

(D. NEGULESCU.)

*55. Un tablou are 68 centimetri lungime și 43 centimetri lățime și voim a'i pune o ramă care are 75 milimetri lățime și care acoperă tabloul pe o lățime de 8 milimetri. Un metru liniar de ramă întrebuințată și așezată costă 7,35 lei. Cît ne va costa punerea ramei?

(I. IONESCU.)

*56. Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor unui triunghiu ABC și I centrul cercului înscris. Dacă însemnăm cu $\hat{o}$ unghiul pe care HI îl face cu latura BC, să se demonstreze că avem:

$$\sin^2\hat{o}=\frac{\left(\cos B\cos C-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}{8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-\cos A\cos B\cos C}$$

(V. CRISTESCU.)

*57. Să se afle valorile lui α pentru care x din ecuația

$$(2\alpha-1)\sin^2x-2(\alpha-1)\sin x-1=0,$$

are valori reale; α fiind cuprins între $-\infty$ și $+\infty$.

(N. NEGOESCU).

58. Fiind dat un șir de puncte materiale *independente*, care la momentul $t=0$, formează o curbă plană continuă, a cărei ecuațiune în raport cu un pol O este : $r_0 = f(\theta_0)$; fie-care punct este atras de O cu o forță, funcțiune de distanță. Să se găsească curba pe care o va forma sistemul de puncte date la un moment t. Cazul particular cînd atracția este invers proporțională cu patratul distanței și curba inițială e o spirală.

(A. G. IOACHIMESCU.)

*59. Să se rezolve ecuațiunea :

$$x^4-2(a-1)x^3-(5a-1)x^2+2(a^2+1)x-a=0,$$

și să se arăte că ecuațiunea are totdeauna două rădăcini reale; să se găsească limitele între care trebue se fie cuprins a, pentru ca să aibă numai 2 rădăcini reale. Să se găsească valoarea lui a pentru care ecuațiunea are numai 2 rădăcini egale și valoarea pentru care toate rădăcinile sînt egale. (G. ȚIȚEICA.)

*60. Ce valoare trebue să aibă n ast-fel ca să avem egalitatea:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2n}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

(I. GHIBALDAN.)

*61. Să se rezolve ecuația:

$$x^5-(a-1)x^4+ax^3-(a^2-a+1)x^2+(a^2-1)x-a=0.$$

(I. TUTUC.)

62. Să se probeze că :

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{4n^4}+\frac{1}{6n^6}-\cdots\cdots=\frac{1}{1(2n^2+1)}+\frac{1}{3(2n^2+1)^3}+\frac{1}{5(2n^2+1)^5}+\cdots\cdots$$

în care $n \geq 1$. (CONSTANȚA POMPILIAN.)

63. Să se găsească maximul volumului unui cilindru înscris într'un sector sferic. Cazul particular cînd unghiul sectorului sferic este egal cu 90°. (A. G. IOACHIMESCU.)

Problemele însemnate cu * se pot resolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articole trimese de D-nii *A. Iliovici, Bogdan Ionescu, Alex. Proca* și ****.

2) Probleme propuse de D-nii *A. Iliovici, G. Iliovici, Bogdan Ionescu, N. Negoescu, Ioan P. Rădulescu, C. S. Stănulescu* și *I. Tutuc.*

3) Probleme rezolvite de D-nii: *I. Bucurescu* (26, 27, 29, 32, 38, 39, 42, 44); *A. Iliovici* (28, 29, 30, 32, 39, 42, 43, 44, 45, 47); *G. Iliovici* (28, 32, 39, 42, 44, 45); *Bogdan Ionescu* (26, 37, 38); *C. Ionescu* (44); *N. Negoescu* (27, 32); *D. Negulescu* (27); *I. Penescu* (44); *C. Popovici* (28, 29, 42); *Ioan P. Rădulescu* (11, 25, 27, 28, 43, 44); *C. N. Răileanu* (45); *C. S. Stănulescu* (30, 38, 39, 44); *N. Trandafirescu* (38, 39, 42, 44); *I. Tutuc* (27, 28, 38, 44) și *C. Virgiliu* (44).

Problemele nerezolvite: 7, 16, 19, 21—24, 35, 36, 40, 41, 46, 48.

Rectificări. Problema 36 ast-fel cum a fost enunțată fiind imposibilă, dăm aci din nou enunțul său:

*36. *Într'un triunghiu ABC în care unghiul* ABC $= 30^\circ$, *se prelungește latura* AB *dincolo de* B *cu* BD $=$ BC *și unim punctul* A *cu mijlocul* E *al dreptei* CD. *Se cere a se determina raportul lui* BC *către* AB *cînd dreapta* AE *e perpendiculară pe* CB.

(C. S. Stănulescu).

Pagina	85	rîndul	7	de sus	în loc de	$p - 9$	se va ceti	$p - q$
»	86	»	4	»	»	»	»	23B	»	»	»	23C
»	»	»	11	»	»	»	»	ABD	»	»	»	ADB
»	»	»	13	»	»	»	»	1) Să	»	»	»	2) Să
»	»	»	2	de jos	»	»	»	$\log(m+1)^x =$	»	»		$\log(m+2)^x =$
»	87	»	8	de sus	»	»	»	$(x + 4)$	»	»	»	$(x + 2)$
»	»	»	11	de jos	»	»	»	*30	»	»	»	*43
»	»	»	7	»	»	»	»	44	»	»	»	*44
»	88	»	2	»	»	»	»	*Réamur*	»	»	»	*Réaumur.*

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sunt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, până la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariția ele se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 a fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.