GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 6. FEBRUARIE 1896.

SUMARUL

1. Cite-va proprietăți ale triungiului de arie maximă înscris în elipsă . . . . . *Bogdan Ionescu*
2. Instrumente logaritmice.—Rigla de calcul. *Z.*
3. Formula fundamentală a trigonometriei plane . . . . . *I. Ionescu*
4. Probleme rezolvite 11, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 34, 42.
5. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacţia *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanţa, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

CITE-VA PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI DE ARIE MAXIMĂ INSCRIS ÎN ELIPSĂ.

Se știe că pe o elipsă există trei puncte, așa că cercurile osculatoare în acele puncte trec prin un punct dat pe curbă; aceste puncte aparțin la un cerc care trece prin punctul dat și formează un triunghiu cu aria maximă, dintre triunghiurile înscrise elipsei, ale căror mediane se întîlnesc în centrul elipsei; normalele la elipsă în cele trei puncte, concură, etc. Se pot vedea un mare număr de proprietăți ale acestui triunghiu în revista «*Mathesis*» tome V pag. 42, pag. 81. Eată încă cîte-va:

I. Numind R_1, R_2, R_3 razele de curbură la elipsă, în cele trei puncte, există relațiunea:

$$\frac{2}{3}(ab)^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}}+R_2^{\frac{2}{3}}+R_3^{\frac{2}{3}}\right)=a^2+b^2,$$

a, b fiind axele elipsei.

Fie 3α anomalia excentrică a unui punct A, dat pe elipsă. Se știe că anomaliele excentrice ale punctelor B, C, D, așa ca cercurile osculatoare la elipsă în aceste puncte să treacă prin A, sînt respectiv $-\alpha$, $-\alpha+120^0$, $-\alpha+240^0$.

Expresiunea razei de curbură la elipsa, a cărei ecuațiune este:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

și în punctul cu anomalia excentrică φ este:

$$R=-\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

ridicînd la puterea $\frac{2}{3}$ și înlocuind pe a^2 cu b^2+c^2 obținem:

$$(Rab)^{\frac{2}{3}}=b^2+c^2\sin^2\varphi.$$

Pentru punctele B, C, D avem respectiv:

$$(R_1ab)^{\frac{2}{3}}=b^2+c^2\sin^2\alpha,\quad (R_2ab)^{\frac{2}{3}}=b^2+c^2\sin^2(120^0-\alpha),$$

$$(R_3ab)^{\frac{2}{3}}=b^2+c^2\sin^2(240^0-\alpha);$$

de unde urmează că:

$$(ab)^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}}+R_2^{\frac{2}{3}}+R_3^{\frac{2}{3}}\right)=3b^2+c^2\times$$
$$\left[\sin^2\alpha+\sin^2(120^0-\alpha)+\sin^2(240^0-\alpha)\right].$$

Sau dacă calculăm pe $\sin(120^0-\alpha)$, $\sin(240^0-\alpha)$ în funcție de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, avem :

$$\sin^2(120^0-\alpha)+\sin^2(240^0-\alpha)=\frac{3}{2}-\sin^2\alpha.$$

Utilisînd această egalitate, se obține imediat :

$$\frac{2}{3}(ab)^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}}+R_2^{\frac{2}{3}}+R_3^{\frac{2}{3}}\right)=a^2+b^2.$$

II. Suma pătratelor distanțelor de la centrul elipsei la punctele B, C, D e constantă și egală cu $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$.

Pătratele acestor distanțe sînt respectiv :

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=a^2-c^2\sin^2\alpha,\ a^2-c^2\sin^2(120^0-\alpha),$$
$$a^2-c^2\sin^2(240^0-\alpha);$$

Făcînd suma lor și observîndu-se din teorema I că :

$$\sin^2\alpha+\sin^2(120^0-\alpha)+\sin^2(240^0-\alpha)=\frac{3}{2}.$$

Se deduce că această sumă este :

$$3a^2-\frac{3}{2}c^2=\frac{3}{2}(a^2+b^2).$$

III. Se știe că tangentele la elipsă în punctele B, C, D sînt paralele cu laturile opuse acestor vîrfuri în triunghiul B C D.

Suma pătratelor distanțelor de la centrul elipsei la vîrfurile triunghiului format de aceste trei tangente e constantă și egală cu $6(a^2+b^2)$.

Ecuațiunile tangentelor la elipsă în punctele cu anomaliele excentrice φ_1, φ_2, φ_3, sînt cele ce urmează:

$$\frac{\cos\varphi_1}{a}x+\frac{\sin\varphi_1}{b}y=1,$$

$$\frac{\cos\varphi_2}{a}x+\frac{\sin\varphi_2}{b}y=1,$$

$$\frac{\cos\varphi_3}{a}x+\frac{\sin\varphi_3}{b}y=1.$$

Resolvind pe cele două d'întăiu în raport cu x și y, obținem coordonatele unuia din vîrfurile triunghiului format de cele trei tangente. Insemnîndu-le cu x_1, y_1 avem:

$$x_1=\frac{a(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)}{\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1}\qquad y_1=\frac{b(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)}{\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1}$$

Prin permutări circulare obținem și coordonatele x_2, y_2, x_3, y_3, ale celorlalte două vîrfuri:

$$x_2 = \frac{a(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_3)}{\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \sin\varphi_3\cos\varphi_2}, \quad y_2 = \frac{b(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_3)}{\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \sin\varphi_3\cos\varphi_2}$$

$$x_3 = \frac{a(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1)}{\sin\varphi_3\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_3}, \quad y_3 = \frac{b(\cos\varphi_3 - \cos\varphi_1)}{\sin\varphi_3\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_3}$$

Dacă vom lua punctele (φ_1), (φ_2), (φ_3) în B, C, D, avem egalitățile:

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin\alpha, \quad \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 = \sqrt{3}\cos\alpha,$$

$$\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{3}{2}\sin\alpha, \quad \cos\varphi_2 - \cos\varphi_3 = \sqrt{3}\sin\alpha,$$

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = -\frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \quad \sin\varphi_3\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\varphi_3 - \cos\varphi_1 = -\frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \quad \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \sin\varphi_3\cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Prin urmare coordonatele vîrfurilor triunghiului format de tangentele la elipsă în punctele B, C, D sînt, însemnîndu-le cu $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$.

$$\xi_1 = a(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha), \quad \eta_1 = b(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)$$

$$\xi_2 = 2a\cos\alpha \quad \eta_2 = -2b\sin\alpha$$

$$\xi_3 = a(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha), \quad \eta_3 = b(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha).$$

Suma pătratelor distanțelor din centrul elipsei, la punctele $(\xi_1\ \eta_1)$, $(\xi_2\ \eta_2)$ $(\xi_3\ \eta_3)$ este:

$$\Sigma(\xi_1^2 + \eta_1^2) = 6(a^2 + b^2) \qquad \text{c. c. e. d. d.}$$

Observare. Se vede imediat că:

$$\Sigma\xi_1 = 0, \ \Sigma\eta_1 = 0,$$

ceea ce ne indică o teoremă cunoscută, că centrul de gravitate al acestui triunghiu este în centrul elipsei.

IV. Suma pătratelor inverselor distanțelor de la centrul elipsei la laturile BC, CD, DB ale triunghiului BCD e constantă și egală cu $6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$.

Să punem pentru ușurarea calculului ca și în teorema precedentă: $\varphi_1 = -\alpha$, $\varphi_2 = 120^0 - \alpha$, $\varphi_3 = 240^0 - \alpha$.

Ecuația dreptei BC este:

$$b(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)X - a(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)Y = ab(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1).$$

Pătratul inversului distanței δ, de la centrul elipsei la dreapta BC este:

$$\frac{1}{\delta_1^2} = \frac{b^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2 + a^2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)^2}{a^2b^2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)^2}$$

In mod analog, însemnînd cu δ_2, δ_3 distanţele de la centrul elipsei la CD, DB:

$$\frac{1}{\delta_2^2} = \frac{b^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_3)^2 + a^2(\cos\varphi_2-\cos\varphi_3)^2}{a^2b^2(\sin\varphi_2\cos\varphi_3-\sin\varphi_3\cos\varphi_2)^2},$$

$$\frac{1}{\delta_3^2} = \frac{b^2(\sin\varphi_3-\sin\varphi_1)^2 + a^2(\cos\varphi_3-\cos\varphi_1)^2}{a^2b^2(\sin\varphi_3\cos\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_3)^2}.$$

In privinţa diferenţelor:

$$\sin\varphi_2-\sin\varphi_3,\ \cos\varphi_1-\cos\varphi_2,\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1$$

şi celorlalte deduse din acestea, ne putem raporta la teorema III. Făcînd înlocuirile, după toate reducţiunile ne rămîne:

$$\sum\frac{1}{\delta_1^2} = 6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

(Va urma) **Bogdan Ionescu.**

INSTRUMENTE LOGARITMICE — RIGLA DE CALCUL

(Urmare)

Rigla de calcul. — Fără ca să se modifice întru nimic principiul scărei logaritmice, s'a căutat să se efectueze operaţiunile într'un mod mult mai repede şi mai sigur, prin suprimarea compasului şi înlocuirea lui prin alte mijloace, pentru a cumula segmentele socotite pe scara logaritmică.

Mai întâi s'a alăturat la o linie, pe marginea căreia erau trasate divisiunile unei scări logaritmice, o altă linie, de aceeaş lungime şi purtînd două indexuri, dintre care unul fix la extremitatea ei stîngă, iar celalt mobil dealungul ei. — Aşezînd această a doua linie cu indexul fix în dreptul lui 1 după scara logaritmică se aduce indexul mobil în dreptul numărului B de pe scară; apoi, mişcînd linia ast-fel ca indexul fix să vină în dreptul numărului A după scară, se citeşte produsul, tot pe scară şi în dreptul indexului mobil (a cărui poziţie relativă pe linie nu s'a schimbat prin această deplasare).

Al douilea mijloc întrebuinţat în acelaş scop este acela al *scărilor juxtapuse.*

Să presupunem două linii alăturate, pe a căror margine comună sînt trasate diviziunile unei aceleaşi scări logaritmice. —

Dacă diviziunea 1 a uneia din ele se află în dreptul numărului A de pe cealaltă, numărul B de pe cea d'întâi se găsește în dreptul rezultatului C = A×B, citit pe a doua.

In adevăr, distanța punctului *C* de originea *1* a aceleaș scări, este egală cu suma distanțelor *1A* de pe această scară și *1B* de pe cealaltă; aceste distanțe fiind, prin construcție, respectiv egale cu log A și logB, urmează că distanța *1C* este egală cu logA + logB, adică cu log(A×B), și prin urmare C este egal cu productul A×B.

Această dispoziție, care datează chiar de pe timpul cînd s'a inventat scara logaritmică, a fost perfecționată ulterior; iar pe la anul 1671 s'a imaginat *rigla cu săltar*, al cărui tip s'a menținut în instrumentele de care ne servim astă-zi sub numele de *riglă de calcul*.

O riglă de calcul se compune dintr'o parte *fixă*, — pe care o vom numi-o *linie* — o parte *mobilă*, — pe care o vom numi-o *liniuță* — care lunecă în interiorul liniei și un *cursor*, în genere metalic, al cărui scop este să însemneze rezultatele intermediare în operațiunile combinate și să facă să corespundă scara superioară (a pătratelor) cu cea inferioară (a numerilor) după cum vom vedea mai la vale.

Pentru înlesnirea și priceperea celor ce urmează vom admite numirile din fig. 1..... Planșa I.

I. Fața riglei

1) Partea inferioară a liniei și liniuței.— (Scara numerilor).

Pe această parte a liniei și liniuței sînt trasate, începînd de la indexul stîng și pînă la cel drept, diviziunile unei scări logaritmice, cu o unitate de lungime egală cu distanța între cele două indexe.

Așa: log1 = 0 (originea 1)
log2 = lungimea 1—2 [1]
log3 = lungimea 1—3
log10 = lungimea 1—1

[1]) A nu se confunda cu cifrele cele mici 1, 2, 3,.....9 din primul interval 1—2, cifre care se raportă la subdiviziunile acestui interval.

Subîmpărţirile acestei scări înlesnesc citirea numerilor cu mai multe cifre. — Aşa, cu ajutorul trăsurilor celor mari [1]), se citeşte peste tot, a doua cifră (11, 12, 13....19, 21.....29, 31.....39.....99); cît despre a treia cifră, ea se citeşte ori-care ar fi ea, numai în primul interval 1—2 (101, 102.....109, 111.....119, 121.....199); în al douilea şi al treilea interval (2—4) numai cînd această cifră este 2, 4, 6 sau 8 (202, 204, 206, 208, 212,.....218, 222.....298, 302.....308) iar în toate celelalte intervale, numai cînd ea este 5 (405, 415.....495.....995 [2]).

Cu puţin exerciţiu însă, se poate ajunge ca să se citească aproximativ şi a patra cifră a unui număr în primul interval şi a treia cifră, ori-care ar fi ea, în celelalte intervale.

Trebue să observăm aci, că partea zecimală (mantiza) a logaritmilor, fiind independentă de poziţia virgulei — care desparte partea întreagă a unui număr zecimal — pe o aceiaşi diviziune A a riglei vom citi toate numerile $A \times 10^n$, n putînd fi ori-ce număr întreg, positiv sau negativ.

Aşa de exemplu, numerile: 0,024; 0,24; 2,4; 24; 240 etc. toate ce citesc pe diviziunea 2,4 de pe riglă.

De alt-fel nici nu e nevoe să ţinem seamă de virgulă, cînd citim pe riglă, de oare-ce, după cum vom vedea mai la vale, sînt reguli foarte simple, care ne dau numărul exact al cifrelor rezultatelor tutulor operaţiunilor ce se pot efectua cu rigla.

Vom expune modul cum se pot face înmulţirea şi împărţirea cu ajutorul părţei inferioare a riglei şi apoi vom reveni la partea superioară (scara patratelor).

a. — Immulţirea.

Pentru a afla produsul C a doui factori A şi B, se aduce în-

[1]) Presupun că lectorul are în mînă o riglă de calcul de 25 cm. lungime.

[2]) Pentru a se putea urmări cele ce se vor expune, chiar fără ca cine-va să aibă o riglă, s'ar putea trasa pe marginele a două benzi de hîrtie o scară logaritmică. — Una din aceste benzi va juca rolul liniei, iar cealaltă pe acela al liniuţei.

dexul stîng sau drept [1]) al liniuței în dreptul unuia din factori (A) citit pe linie; rezultatul (C) se citesce pe linie, în dreptul celui de al douilea factor (B) citit pe liniuță (fig. 2).

Figurile 3, 4, 7, 8 și 9 reprezint pozițiunile liniei și liniuței pentru aflarea produselor: $2 \times 3 = 6$; $1{,}6 \times 3 = 4{,}8$; $2 \times 6 = 12$.

Pentru a ști numărul cifrelor produsului avem următoarea regulă generală:

Dacă produsul cade pe linie *la stînga* primului factor citit pe ea (întrebuințînd indexul drept) *numărul cifrelor produsului este egal cu suma cifrelor celor doui factori;* dacă însă produsul cade *la dreapta* primului factor (întrebuințînd indexul stîng) *numărul cifrelor produsului este egal cu suma cifrelor celor doui factori micșorată cu o unitate.* [2])

---

[1]) Căci, dacă, servindu-ne de indexul stîng (fig. 5) produsul, ce ar trebui citit pe linie în dreptul celui d'al douilea factor citit pe liniuță, cade dincolo de indexul drept al liniei, nu-l putem citi de cît presupunînd că linia se prelungește dincolo de indexul drept, în care caz am avea:

$$\log A + \log B = \log(A \times B) = 1 + \log C = \log 10 + C$$

Deci:

$$A \times B = 10\,C$$

La acelaș rezultat ajungem (fig. 6) dacă aducem indexul drept al liniuței în dreptul factorului A și citim rezultatul pe linie, în dreptul lui B citit pe liniuță, căci atunci avem:

$$1 - \log B = \log A - \log C$$
$$\log A + \log B = 1 + \log C = \log 10 + \log C$$
$$A \times B = 10 \times C$$

In acest caz deci, pentru a avea adevăratul produs, trebue să înmulțim rezultatul citit cu 10, adică să mutăm virgula cu o cifră spre dreapta.

[2]) Dacă însemnăm cu m și n numărul cifrelor întregi ale celor doui factori A și B, caracteristicile logaritmilor lor vor fi: $m-1$ și $n-1$. Dacă pe de altă parte a și b sînt mantizele logaritmilor lor, vom putea să scriem:

$$\log A = (m-1) + a.$$
$$\log B = (n-1) + b.$$

$$\log(A \times B) = \log A \times \log B = (m-1) + (n-1) + a + b.$$

din adunarea celor două mantize a și b, putem să obținem sau numai un rezultat $c = a + b$ mai mic de cît o unitate sau un rezultat $1 + c$, după cum întrebuințăm indexul stîng saŭ drept. — Vom avea deci:

sau: $\log(A \times B) = (m-1) + (n-1) + 1 + c = (m + n - 1) + c,$

sau: $\log(A \times B) = (m-1) + (n-1) + c = (m + n - 2) + c,$

Numărul cifrelor unui număr întreg este egal cu caracteristica logaritmului lui sporită cu o unitate. Pentru a conserva generalitatea regulilor date, sîntem conduși să considerăm numerile zecimale ca avînd *un număr negativ* de cifre întregi, număr egal cu caracteristica logaritmului sporită cu o unitate. Urmează deci că numărul (negativ) al cifrelor (întregi) ale unei fracțiuni zecimale este egal cu atîtea unități cîte zerori sînt după virgulă pînă la prima cifră însemnătoare. Așa de exemplu, numărul cifrelor numerilor: 0,24; 0,024; 0,0024 va fi respectiv $\overline{0}$; $\overline{1}$; $\overline{2}$; caracteristicile logaritmilor lor fiind $\overline{1}$; $\overline{2}$; $\overline{3}$.

Exemple: 1°.— $16 \times 3 = 48$

Suma cifrelor celor doui factori . . . . . $2 + 1 = 3.$

Rezultatul la dreapta (indexul stîng) . . . $-1.$

Numărul cifrelor produsului . . $= +2.$

2°.— $0{,}0016 \times 0{,}3 = 0{,}00048$

Suma cifrelor celor doui factori . . . . . $(-2) + 0 = -2.$

Rezultatul la dreapta (indexul stîng) . . . $-1.$

Numărul cifrelor produsului . . $= -3.$

3°.— $0{,}2 \times 600 = 120$

Suma cifrelor celor doi factori . . . . . $0 + 3 = +3.$

Rezultatul la stînga (indexul drept) . . . . $0.$

Numărul cifrelor produsului . . $= +3.$

4°.— $2 \times 0{,}006 = 0{,}012$

Suma cifrelor celor doui factori . . . . . $1 + (-2) = -1.$

Rezultatul la stînga (indexul drept) . . . . $0.$

Numărul cifrelor produsului . . . $= -1.$

Caracteristica produsului va fi prin urmare,

sau: $m + n - 1,$

sau : $m + n - 2.$

cea ce însemnează că, numărul cifrelor va fi:

sau: $m + n,$

adică egal cu suma cifrelor celor doui factori,

sau : $m + n - 1,$

adică egal cu aceași sumă, micșorată cu o unitate, după cum întrebuințăm indexul *drept* saŭ *stîng*.

Trebue observat în fine că, cu o aceiași poziţiune a liniei putem afla produsele succesive ale unui factor constant cu altul variabil, așa de exemplu productul lui 2 prin factori 2, 4; etc. etc.

b. — Impărţirea

Pentru a afla cîtul (A) a două numere C și B $\left(A=\frac{C}{B}\right)$ se aduce împărţitorul (B) citit pe liniuţă în dreptul deîmpărţitului (C) citit pe linie; cîtul căutat (A) se citește pe linie în dreptul indexului stîng sau drept [1]) al liniuţei. Fig. 10.

Figurile 11, 12 și 13 reprezint poziţiunile liniei și liniuţei pentru aflarea cîturilor: $\frac{48}{4}=12$; $\frac{42}{7}=6$; și $\frac{1}{144}=0.00694$.

Pentru a ști numărul cifrelor cîtului avem următoarea regulă generală:

Dacă cîtul se citește, pe linie, *în dreptul indexului drept* al liniuţei, *numărul cifrelor cîtului este egal cu diferența dintre numărul cifrelor deîmpărţitului și împărţitorului;* dacă, din contră, cîtul se citește *în dreptul indexului stîng* al liniuţei, *numărul cifrelor cîtului este egal cu aceaș diferință, sporită însă cu o unitate.*

Exemple: 1°.— $\frac{48}{4}=12$.

Diferința între numărul cifrelor deîmpărţitului
și ale împărţitorului . . . . . $2-1=+1$.
Rezultatul în dreptul indexului stîng . . . . . $+1$.
Numărul cifrelor cîtului . $+2$.

2°. — $\frac{0.48}{0.004}=120$.

Diferința . . . . . $0-(-2)=+2$.
Rezultatul în dreptul indexului stîng. . . . . $+1$.
Numărul cifrelor cîtului . . $=+3$.

3°. — $\frac{4,2}{20}=0.06$.

Diferința: . . . . . $1-2=-1$.
Rezultatul în dreptul indexului drept. . . . . 0.
Numărul cifrelor cîtului . . $=-1$.

*) A se vedea observaţiunile de la înmulţire.

4°.— $\frac{0.0042}{0.07} = 0.07.$

Diferința: . . . . . —2—(—1)=—1.

Rezultatul în dreptul indexului drept. . . . 0.

Numărul cifrelor cîtului . . =—1.

c. — Aflarea celui de al patrulea termen al unei proporții.

$$x = \frac{A}{C} \times B.$$

Pentru aceasta mai întâi se efectuează împărțirea $\frac{A}{C}$ și apoi, după ce se însemnează (pe linie) cîtul cu cursorul metalic, se procede la înmulțirea acestui cît cu factorul B (fig. 14).

Numărul cifrelor rezultatului x se poate deduce, sau succesiv prin regulile date la împărțire și înmulțire, sau mai simplu, (*dacă se procede tocmai în modul arătat mai sus*) prin următoarea regulă:

Numărul cifrelor rezultatului *este egal cu suma cifrelor factorilor de la numărător (A și B) mai puțin numărul cifrelor numitorului (C),* dacă, după ce s'a însemnat cîtul $\left(\frac{A}{C}\right)$ cu cursorul, *nu mai este nevoe de o a doua deplasare a liniuței* pentru ca să citim rezultatul definitiv; *la această sumă însă trebue, să adăogăm sau să scădem o unitate,* dacă, pentru ca să citim resultatul definitiv (x) *este nevoe de o a doua deplasare a liniuței către stînga sau către dreapta.*

Exemple: 1°.— $\frac{3}{8} \times 6 = 2{,}25.$

Numărul cifrelor rezultatului . . . . =(1 + 1—1) + 0 = 1.

Ne fiind nevoe de o a doua deplasare a liniuței.

2°.— . . . $\frac{8}{3} \times 6 = 16.$

Numărul cifrelor rezultatului . . . . =(1 + 1—1) + 1 = 2.

Fiind nevoe de o a doua deplasare a liniuței la stînga.

3°.— . . . . $\frac{3}{8} \times 2 = 0.75.$

Numărul cifrelor rezultatului . . . . =(1 + 1—1) — 1 = 0.

Fiind nevoe de o a doua deplasare a liniuței la dreapta.

Fig. 15 reprezintă poziţiunea liniei şi liniuţei pentru efectuarea operaţiunei $\frac{36 \times 4,2}{22,4} = 6,75$.

d. — *Inmulţirea şi împărţirea cu ajutorul liniuţei răsturnate.*

Zicem că liniuţa este răsturnată atunci cînd, după ce am scos'o din linie, o întoarcem de 180 în planul său şi apoi o introducem la loc, ast-fel că cifrele de pe dînsa să apară răsturnate în raport cu cele de pe linie.

Cu liniuţa răsturnată putem face înmulţirea, după regula împărţirei cu liniuţa normală şi vice-versa, împărţirea după regula înmulţirei. Adică: pentru înmulţire, în dreptul primului factor, citit pe linie se aduce al doilea factor citit pe liniuţă, (prin ajutorul cursorului) iar resultatul se citeşte pe linie în dreptul indexului stîng sau drept al liniuţei. — Numărul cifrelor produsului va fi egal numai cu suma cifrelor celor doi factori sau cu această sumă micşorată cu o unitate, după cum rezultatul se citeşte în dreptul indexului stîng sau drept al liniuţei.

Pentru împărţire, în dreptul deîmpărţitului citit pe linie se aduce indexul stîng sau drept al liniuţei, cîtul se citeşte pe linie în dreptul împărţitorului citit pe liniuţă. Numărul cifrelor cîtului va fi egal numai cu diferinţa între numărul cifrelor deîmpărţitului şi împărţitorului sau cu această diferinţă sporită cu o unitate, după cum cîtul cade pe linie la dreapta sau stînga deîmpărţitului (întrebuinţînd indexul stîng sau drept al liniuţei).

Figurile 16, 17 şi 18 reprezint poziţiunile liniei şi liniuţei resturnate, pentru aflarea produselor: $2 \times 6 = 12$; $16 \times 3 = 48$; şi a cîturilor $\frac{42}{7} = 6$ şi $\frac{48}{4} = 12$.

Inmulţirea este mai comod să se facă cu liniuţa dreapta; împărţirea însă, va fi de multe ori mai comodă cu liniuţa răsturnată şi anume atunci cînd nici deîmpărţitul, nici împărţitorul nu corespund exact cu o diviziune a scărei.

(Va urma) **Z.**

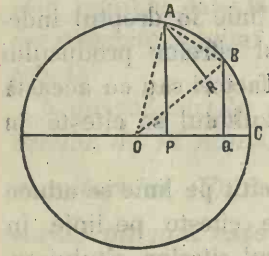
FORMULA FUNDAMENTALA A TRIGONOMETRIEI PLANE

In cele ce urmează îmi propun a arăta cum se poate stabili formula fundamentală a trigonometriei plane utilizînd numai proprietăţile ariilor, fără a interveni proprietăţile triunghiurilor asemenea.

Să considerăm o circonferenţă a cărei rază să fie egală cu unitatea. Fie C origina arcelor. Să considerăm arcele CA, CB ambele mai mici de cît un sfert de circonferenţă. Din punctele A şi B să scoborîm perpendicularele AP, BQ pe diametrul ce trece prin origina arcelor. Ducem raza OB şi din punctul A scoborîm perpendiculara AR pe această rază. Ducem în fine raza OA şi coarda AB.

Să însemnăm:

$$\text{arc}CA = a \qquad \text{arc}CB = b$$



Prin urmare după figură, avem:

$$AP = \sin a \qquad OP = \cos a$$

$$BQ = \sin b \qquad OQ = \cos b \qquad PQ = OQ - OP = \cos b - \cos a$$

$$\text{arc}AB = a - b \qquad AR = \sin(a - b)$$

$$OA = OB = OC = 1$$

După figură, descompunînd în 2 moduri aria OABQ, avem relaţiunea:

$$OAP + PABQ = OAB + OBQ.$$

Să exprimăm valorile fie-cărei arii din egalitatea precedentă. Vom avea:

$$\frac{1}{2}\overline{OP}.\overline{AP} + \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{BQ}).\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{OB}.\overline{AR} + \frac{1}{2}\overline{OQ}.\overline{BQ}.$$

Multiplicînd toată egalitatea cu 2 şi înlocuind diferitele linii prin valorile lor date mai sus, obţinem relaţiunea:

$$\cos a \sin a + (\sin a + \sin b)(\cos b - \cos a) = 1 \times \sin(a - b) + \cos b \sin b.$$

Desfăcînd parentezele şi reducînd ajungem la relaţiunea:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

care poate fi considerată ca formula fundamentală a trigonometriei plane. Aplicînd metodele de generalisare şi de transformare cari se dau mai în toate tratatele de trigonometrie, vom generalisa mai întăi formula precedentă şi apoi vom deduce şi celelalte formule:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Observare. Dacă în formula:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

facem $a = b$, vom obține:

$$\cos 0 = 1 = \cos a^2 + \sin^2 a.$$

Așa dar această din urmă relațiune se prezintă ca o consecință a proprietăților ariilor și prin urmare se găsește stabilită independent de *teorema lui Pitagora*.

Rezultă de aci că putem considera ca demonstrațiune a *teoremei lui Pitagora* și următoarea, dată ca verificare mai în toate tratatele de trigonometrie.

In ori-ce triunghiu dreptunghiu avem relațiunile:

$$b = a \sin B \qquad c = a \cos B$$

făcînd suma pătratelor acestor 2 egalități avem:

$$b^2 + c^2 = a^2 \sin^2 B + a^2 \cos^2 B = a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B)$$

sau:

$$b^2 + c^2 = a^2 . 1 = a^2$$

care e expresiunea *teoremei lui Pitagora*.

I. Ionescu.

PROBLEME REZOLVITE

Problema 11. *Să se resolve ecuațiile:*

$$5(x^2 + y^2) - 6xy - 6(x + y) + 5 = 0,$$
$$x^3 + y^3 + xy(x + y) + x^2 + y^2 - 9xy + x + y + 1 = 0.$$

Soluție dată de d-nul I. P. Rădulescu, (Licențiat în Matematici Focșani).

Aceste ecuații se mai pot scri:

$$5(x + y)^2 - 16xy - 6(x + y) + 5 = 0,$$
$$(x + y)^3 - 2xy(x + y) + (x + y)^2 - 11xy + x + y + 1 = 0.$$

Punînd $x + y = u$ și $xy = v$, ecuațiile devin:

$$5u^2 - 16v - 6u + 5 = 0,$$
$$u^3 - 2uv + u^2 - 11v + u + 1 = 0.$$

Din prima ecuație a acestui sistem avem:

$$v = \frac{5u^2 - 6u + 5}{16}.$$

Ducînd valoarea lui v în a doua ecuație avem:

$$2u^3 - 9u^2 + 24u - 13 = 0$$

Putem face aci să dispară termenul de gradul al doilea, punînd $u = z + \frac{3}{2}$ și avem:

$$4z^3 + 21z + 19 = 0. \qquad (a)$$

Pentru această ecuație avem $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$, deci n'are decît o singură rădăcină reală, care este negativă. Formăm ecuația transformată, punînd aci $-z$ în loc de z și avem:

$$f(z) = 4z^3 + 21z - 19 = 0. \qquad (b)$$

Această ecuație admite ca limita rădăcinelor pe 1. Făcînd succesiv în această ecuație pe $z = 0$ și $z = 1$, primul membru al acestei ecuații devine -19 și $+6$. Deci rădăcina este coprinsă între 0 și $+1$. Rădăcini fracționare nu admite. Așa dar ecuația de mai sus admite o rădăcină incomensurabilă. Această rădăcină este coprinsă între 0,8 și 0,9, căci făcînd pe rînd $z = 0{,}8$ și $z = 0{,}9$, primul membru al ecuației de mai sus devine $-0{,}152$ și $+2{,}816$.

Pentru a afla această rădăcină, aplicăm metoda de aproximație a lui *Newton*. Derivata a doua a primului membru al ecuației (b) este pozitivă în intervalul dintre 0,8 și 0,9; funcțiunea este pozitivă pentru $z = 0{,}9$.

Vom pleca de la această valoare. Formula lui *Newton* ne dă:

$$\alpha = -\frac{f(0{,}9)}{f'(0{,}9)} = -\frac{2{,}816}{30{,}72} = -0{,}091666...$$

Să evaluăm acum eroarea comisă cu ajutorul formulei:

$$\beta = -\frac{h^2 f''(a + \theta h)}{2 f'(a)}$$

$f''(z)$ are o valoare pozitivă care crește cu z, căci $f'''(z)$ e pozitiv. Deci valoarea lui $f''(a + \theta h)$ e mai mică decît $f''(0{,}9)$, și avem:

$$-\beta < \frac{h^2 f''(0{,}9)}{2 f'(0{,}9)} = \frac{h^2 21{,}6}{2 \times 30{,}72} < h^2 \times 0{,}4$$

Cum $h = \alpha + \beta$, se vede că h e mai mic de cît 0,1 și prin urmare valoarea absolută a lui β e mai mică de cît 0,004; de aci

rezultă că h e mai mic de cît $0{,}092 + 0{,}004$ adică mai mic de cît $0{,}096$. Punînd această valoare în expresiunea erorei avem:

$$-\beta < 0{,}096^2 \times 0{,}4 > 0{,}01$$

Vom lua deci $h = -0{,}09$ și vom avea rădăcina:

$$z = 0{,}81$$

Această rădăcină luată cu semn schimbat, verifică ecuațiunea (a).

Dacă în ecuația $u = z + \frac{3}{2}$ facem acum $z = 0{,}81$, avem $u = 0{,}69$

Ducînd valoarea lui u în expresia lui v găsim $v = 0{,}20$.

Așa dar avem sistemul:

$$x + y = 0{,}69,$$
$$xy = 0{,}20.$$

Deci x și y sunt rădăcinele ecuației:

$$z^2 - 0{,}69\, z + 0{,}20 = 0,$$

de unde:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{0.69 \pm \sqrt{-0{,}33}}{2},$$

rădăcini imaginare.

Notă. Dacă O, I, G sînt centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris și centrul de greutate al unui triunghiu ale cărui laturi sînt proporționale cu x, y, 1, atunci ecuația:

$$x^3 + y^3 + xy\,(x + y) + x^2 + y^2 - 9\,xy + x + y + 1 = 0,$$

exprimă că avem $OI = OG$, iar ecuația:

$$5\,(x^3 + y^3) - 6\,xy - 6\,(x + y) + 5 = 0,$$

exprimă că avem $IG = r$ (raza cercului înscris). Aceste două ecuații avînd soluții imaginare, rezultă următoarea teoremă:

Nu există nici un triunghiu în care punctele O, I, G să formeze un triunghiu isoscel, a cărui bază IG să fie egală cu r.

***Problema 25.** — *A rezolvit această problemă și D-nul Ioan P. Rădulescu, (Focșani) în mod analog cu soluțiunea dată în No. 5.*

Problema 26. — *Să se găsească, fără ajutorul derivatelor, ce devine expresiunea*

$$\frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$$

pentru $x = 0$. **(N. Nicolescu).**

Soluție dată de D-nii I. Bucurescu și Bogdan Ionescu (Elevi ai Școalei Normale Superioare din București).

Expresiunea dată se poate scrie:

$$\frac{(x-2)\,e^x+x+2}{(e^x-1)^3}\,e^x. \qquad (1)$$

Știm însă că:

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots.$$

Inlocuind în (1) avem:

$$\frac{(x-2)\,e^x+x+2}{(e^x-1)^3}\,e^x = \frac{x+\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3}+\ldots\ldots-2-2\frac{x}{1}-2\frac{x^2}{1.2}-2\frac{x^3}{1.2.3}-\ldots\ldots+x+2}{\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\right)^3}\,e^x,$$

sau:

$$e^x\,\frac{(x-2)\,e^x+x+2}{(e^x-1)^3} = \frac{x^3\left(\frac{1}{1.2}+\frac{x}{1.2.3}+\ldots\ldots-\frac{1}{1.2.3}\,2-\frac{x}{1.2.3.4}\,2-\ldots\ldots\right)}{x^3\left(\frac{1}{1}+\frac{x}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\right)^3}\,e^x.$$

Suprimînd x^3 de la numărător și numitor și făcînd $x=0$, găsim pentru adevărata valoare a expresiunei date:

$$\frac{\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}\,2}{1^3} = \frac{1}{6}$$

Problema 27. — *Să se descompună fracția:*

$$\frac{5x^3+6x^2-3x+8}{x^4-5x^2+4}$$

în o sumă algebrică de fracțiuni simple cu numărătorii constanți. (Paul Ionescu.)

Soluție dată de D-nii Ioan P. Rădulescu, Licențiat în Matematici (Focșani) și D. Negulescu, Student (București).

Să însemnăm numărătorul cu $F(x)$ și numitorul cu $f(x)$. Rădăcinele numitorului fiind $+1, +2, -1, -2$, fracțiunea de mai sus se poate descompune în fracțiuni simple de forma:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{5x^3+6x^2-3x+8}{x^4-5x^2+4} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2} \qquad (1)$$

Pentru calculul constantelor A, B, C, D ne servim de derivata:

$$f'(x) = 4x^3-10x,$$

și avem : $A = \frac{F(1)}{f(1)} = -\frac{8}{3}$,

$B = \frac{F(2)}{f(2)} = +\frac{11}{2}$,

$C = \frac{F(-1)}{f(-1)} = +2$,

$D = \frac{F(-2)}{f(-2)} = +\frac{1}{6}$.

Deci avem :

$$\frac{5x^3+6x^2-3x+8}{x^4-5x^2+4} = -\frac{\frac{8}{3}}{x-1} + \frac{\frac{11}{2}}{x-2} + \frac{2}{x+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x+2}.$$

Soluție dată de D-nii N. Negoescu, (Râmnicul-Vîlcei).

Stabilim egalitatea (1) ca mai sus, și gonind numitorii obținem :

$$5x^3+6x^2-3x+8 = A(x-2)(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+1)(x+2) + C(x-1)(x-2)(x+2) + D(x-1)(x-2)(x+1). \quad (2)$$

Această egalitate trebue să aibă loc ori-care ar fi valoarea lui x. Dacă dăm lui x succesiv valorile $+1, +2, -1, -2$, obținem:

$$A = -\frac{8}{3},\quad B = \frac{11}{2},\quad C = 2,\quad D = \frac{1}{6}.$$

Soluție dată de D-l I. Tutuc, Student (București) și I. Bucurescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București).

Egalitatea (2) de mai sus se poate scrie:

$$5x^3+6x^2-3x+8 = (A+B+C+D)x^3 + (A-C+2D-2B)x^2 - (4A+4C+B+D)x + 4(C-A) + 2(D-B).$$

Identificînd ambii membrii ai acestei egalități, obținem ecuațiile :

$$A+B+C+D = 5,\qquad 3(A+B)+B+D = 3,$$
$$A-C+2(D-B) = 6,\qquad 4(C-A)+2(D-B) = 8,$$

care rezolvite ne dau:

$$A = -\frac{8}{3},\quad B = \frac{11}{2},\quad C = 2,\quad D = \frac{1}{6}.$$

* **Problema 28** — *Să se găsească suma celor dintâi n termeni ai șirului:*

5, 45, 445, 4445, ... **(V. Cristescu).**

Soluție dată de D-nii Ioan P. Rădulescu, (Focșani), A. Iliovici, și C. Popovici, (Elevi în Clasa VII de la Liceul din Iași),

G. Iliovici, (Elev în Clasa V de la Liceul din Iași) și *I. Tutuc.*

Dacă însemnăm cu S suma cerută, avem succesiv:

$$S = 5 + 45 + 445 + 4445 + 44445 + \cdots\cdots$$

$$S = n + 4 + 44 + 444 + 4444 + 44444 + \cdots\cdots$$

$$S = n + 4(1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \cdots\cdots).$$

în cît chestiunea se reduce la a găsi suma celor dîntăi n termen ai șirului:

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

Acest șir se poate descompune în modul următor:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 & \ldots & \ldots & \ldots & 10^{n-2} & 10^{n-1} \\
 & 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & \ldots & \ldots & \ldots & 10^{n-3} & 10^{n-2} \\
 & & 1 & 10 & 10^2 & \ldots & \ldots & \ldots & 10^{n-4} & 10^{n-3} \\
 & & & 1 & 10 & \ldots & \ldots & \ldots & 10^{n-5} & 10^{n-4} \\
 & & & & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 10^{n-6} & 10^{n-5} \\
 & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & & & 1 & 10 \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}$$

Ast-fel că un termin de un rang oare-care din șirul (1), este egal cu suma terminilor din coloana verticală corespunzătoare. In total avem n coloane verticale, care sînt niște progresii geometrice. Să însemnăm cu $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$ suma terminilor din coloanele $1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

Avem:

$$s_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

$$s_{n-1} = \frac{10^{n-1} - 1}{9}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_2 = \frac{10^2 - 1}{9},$$

$$s_1 = \frac{10 - 1}{9}.$$

Deci:

$$S = n + \frac{4}{9}\left[(10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots\ldots + 10^n) - n\right] \qquad (2)$$

Făcînd suma progresiei geometrice, obținem în definitiv :

$$S = \frac{45\,n + 40\,(10^n - 1)}{81}.$$

Notă. Eată cum se poate afla suma șirului propus, însumind o singură progresie geometrică. Avem:

$$S = n + 4\,(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots\ldots).$$

Această sumă se poate scrie :

$$S = n + \frac{4}{9}\,(9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots\ldots).$$

Dacă acum adăogăm o unitate la fie-care din cei n termeni ai parantezei, din ultima egalitate, obținem :

$$S = n + \frac{4}{9}\left[(10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots\ldots + 10^n) - n\right],$$

adică găsim de o dată egalitatea (2) de mai sus. Făcînd suma progresiei geometrice avem:

$$S = \frac{45n + 40\,(10^n - 1)}{81}.$$

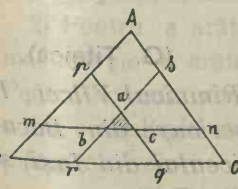
***Problema 29.** *Să se determine aria triunghiului format de dreptele ce divid un triunghiu dat în 2 părți echivalente prin paralele la baze. Să se demonstreze apoi că raportul ariei acestui triunghiu către aria triunghiului dat este o constantă.*

(I. Ionescu)

Soluțiune dată de d-nii I. Bucurescu, (Elev al Scoalei Normale Superioare Bucuresci), A. Iliovici și C. Popovici (Elevi Clasa VII a Liceului din Iași).

Fie S aria triunghiului dat ABC, și s aria triunghiului construit în condițiunile problemei. Triunghiurile ABC, abc fiind asemeni ca avînd laturile paralele ne dau :

$$(1)\quad \frac{S}{s} = \frac{\overline{Bc}^2}{\overline{bc}^2}.$$



Rămîne deci a evalua lungimea bc.

Pentru aceasta avem :

$$(2)\quad bc = mn - mb - nc = mn - Br - Cq.$$

Dar dreptele mn, pq, rs divizînd triunghiul ABC în două părți echivalente, avem relațiunile:

$$\frac{\overline{mn}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{Amn}{ABC} = \frac{1}{2},\quad \frac{\overline{Cr}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{Crs}{ABC} = \frac{1}{2},\quad \frac{\overline{Bq}^2}{\overline{Bc}^2} = \frac{Bpq}{Abc} = \frac{1}{2},$$

de unde:

$$mn = \frac{Bc}{\sqrt{2}},\quad Cr = \frac{BC}{\sqrt{2}},\quad Bq = \frac{BC}{\sqrt{2}},$$

și prin urmare :

$$(3)\ mn = \frac{BC}{\sqrt{2}},\ Cq = CB - Bq = BC\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$Br = BC - Cr = BC\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Introducînd aceste valori în (2) obținem :

$$(4)\ bc = BC\frac{1}{\sqrt{2}} - BC\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - BC\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = BC\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right),$$

sau:

$$(5)\quad bc = BC\,\frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = BC\,\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{\sqrt{2}}$$

de unde:

$$\left(\frac{bc}{BC}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2} - 1)^4}{2}$$

Introducînd această valoare în egalitatea (1) obținem:

$$\frac{S}{s} = \frac{2}{(\sqrt{2} - 1)^4}$$

de unde:

$$s = S\,\frac{(\sqrt{2} - 1)^4}{2}$$

c. c. e. d. d.

* **Problema 32.** — *Fie* $a, b, c, d, D, D', a_1, b_1, c_1, d_1, D_1, D'_1$ *cele patru laturi și cele două diagonale a două patrulatere convexe. Să se demonstreze că dacă avem relația:*

$$a_1\,[c\,(a^2 - b^2) + b\,(bc + ad) + a\,D_1\,D'_1] =$$
$$a\,[c_1\,(a_1{}^2 - b_1{}^2) + b_1\,(b_1\,c_1 + a_1\,d_1) + a_1\,D\,D'],$$

și dacă unul din patrulatere este inscriptibil, rezultă că și celalt este inscriptibil.

(G. Țițeica).

Soluție dată de D-nii, N. Negoescu, (Rîmnicul-Vîlcei), I. Bucurescu, (Elev al Scoalei Normale Superioare din Bucuresci), A. Iliovici (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași) și G. Iliovici, (Elev în Clasa V a Liceului din Iași).

Relațiunea dată se poate scrie:

$$a\,a_1\,(a\,c + b\,d + D_1 D'_1) = a a_1 (a_1 c_1 + b_1 d_1 + DD'),$$

de unde se scoate imediat:

$$(1) \qquad ac + bd - DD' = a_1c_1 + b_1d_1 - D_1D'_1$$

Dacă primul patrulater e inscriptibil, avem după *teorema lui Ptolemeu*:

$$ac + bd - DD' = 0,$$

și atunci relațiunea (1) ne dă:

$$a_1c_1 + b_1d_1 - D_1D'_1 = 0.$$

Deci după reciproca *teoremei lui Ptolomeu*, patrulaterul al doilea este inscriptibil.

* **Problema 34.** — *A rezolvit această problemă și D-l Alexandru Bărcăcilă, (Elev în Clasa VI a Seminarului Nifon, Bucuresci)*, în mod analog cu a doua din soluțiunile date în No. 5.

Problema 42.—*Să se demonstre că dacă a nu e multiplu de 7, expresiunea*

$$1001\,a^6(a+d) + 110\,a^6(b+c) - 1001\,(a+d) - 110\,(b+c),$$

e divisibilă prin 77. **(I. Tutuc.)**

Soluție dată de D-nii I. Bucurescu, (Elev al Scoalei Normale Superioare din București), A. Iliovici (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași), G. Iliovici (Elev în Clasa V a Liceului din Iași), C. Mateiescu (Elev în Clasa VI a Liceului din Craiova) și C. Popovici (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași).

1) Expresiunea dată se poate scrie:

$$1001\,(a+d)(a^6-1) + 110\,(b+c)(a^6-1),$$

sau:

$$[1001\,(a+d) + 110\,(b+c)]\,(a^6-1).$$

Numerile 1001 și 110 fiind divizibile cu 11, rezultă că expresiunea $1001(a+d) + 110(b+c)$ este divizibilă cu 11 și prin urmare și expresiunea dată e divizibilă cu 11.

2) Pentru a arăta că expresiunea dată e divisibilă cu 77, ne mai rămîne a arăta că ea e divizibilă prin 7, căci $77 = 11 \times 7$. Pentru aceasta vom demonstra că (a^6-1) e divizibil cu 7 cînd, a nu e multiplu de 7. In adevăr în acest cas avem pentru a următoarele valori:

$$a = \mathcal{M}\,7 \pm 1, \qquad a = \mathcal{M}\,7 \pm 2, \qquad a = \mathcal{M}\,7 \pm 3,$$

și ridicînd la cub avem:

$$a^3 = \mathcal{M}\,7 \pm 1, \quad a^3 = \mathcal{M}\,7 \pm 8 = \mathcal{M}\,7 \pm 1, \quad a^3 = \mathcal{M}\,7 \pm 27 = \mathcal{M}\,7 \pm 1.$$

Rezultă de aci că unul din numerile a^3+1 sau a^3-1 e multiplu de 7; și prin urmare produsul lor $(a^3+1)(a^3-1)=a^6-1$ este totdeauna multiplu de 7.

Deci a^6-1 e divisibil prin 7 și teorema e demonstrată.

Soluție dată de d-nii, N. Negoescu, (Rîmnicul-Vîlcei), Ioan P. Rădulescu (Focșani), C. Mateiescu, (Elev în Clasa VI a Liceului din Craiova) și *N. Trandafirescu,* (Elev în Anul preparator al Școalei de Poduri și Sosele).

Se demonstră ca și mai sus că expresiunea e divizibilă prin 11. Pentru a arătă că a^6-1 e divizibil prin 7, avem :

$$a^6-1=a^{7-1}-1$$

și după Teorema lui *Fermat*, $a^{7-1}-1$ e divizibil cu numărul prim 7 dacă a este prim cu 7, ceea ce are loc după enunciu.

PROBLEME PROPUSE

* 64. Să se rezolve ecuația:

$$(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5.$$

(I. P. RĂDULESCU).

65. Să se probeze că:

$$1^p-\frac{n}{1}2^p+\frac{n(n-1)}{1.2}3^p-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}4^p+\ldots\ldots=0,$$

n și p fiind două numere întregi și $p<n$.

(A. G. IOACHIMESCU.)

* 66. Să se împartă un pătrat dat în medie și extremă rațiune printr'un pătrat construit pe 2 din laturile sale adiacente și avînd un unghiu comun cu primul pătrat.

(A. ILIOVICI).

* 67. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oare-care, avem relațiunile:

$$a\sin B\sin C-\alpha)-c\sin C\sin\alpha=b\sin C\sin(A-\alpha)-a\sin A\sin\alpha,$$

și

$$=c\sin A\sin(B-\alpha)-b\sin B\sin\alpha,$$

$$a\sin C\sin(B-\alpha)-b\sin B\sin\alpha=b\sin A\sin(C-\alpha)-c\sin C\sin\alpha,$$

$$=c\sin B\sin(B-\alpha)-a\sin A\sin\alpha,$$

α fiind un unghiu oare-care.

(G. ȚIȚEICA).

68. Să se găsească adevărata valoare a expresiunei :

$$(\cos ax)^{(\operatorname{cosec} bx)^2}$$

pentru $x = o$.

(N. NICOLESCU).

* 69 Într'un triunghiu oare-care să se exprime $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, laturile, perimetrul, înălțimile și suprafața sa în funcțiune de razele cercurilor ex-înscrise.

(N. NEGOESCU).

* 70. Să se construească un triunghiu T, cunoscîndu-se picioarele înălțimilor triunghiului T', care are ca vîrfuri mijlocul laturilor triunghiului T.

(I. IONESCU).

71. Două circonferințe cu centrele o și O sînt tangente în punctul A. Prin punctul A se deduce o secantă variabilă care întîlnește circonferențele o, O în punctele b, B. Să se afle locul punctului de întîlnire al diagonalelor patrulaterului obBO.

(V. CRISTESCU).

*72. Să se verifice identitatea :

$$\frac{(b+c)bc}{(b-a)(c-a)} + \frac{(c+a)ca}{(c-b)(a-b)} + \frac{(a+b)ab}{(a-c)(b-c)} = a+b+c.$$

(I. P. RĂDULESCU).

*73. Să se găsească un număr care divizat pe rînd prin trei numere întregi consecutive, să dea ca resturi numerile 4, 5, 6, și care să fie egal cu suma celor trei numere consecutive plus unu multiplicată cu suma celor dintăi două din aceste numere.

(G. ILIOVICI).

74. Să se determine suprafața înfășurătoare a unei familii de sfere mobile, cari trec prin centrul unui elipsoid și al căror centru se mișcă pe suprafața elipsoidului. Să se găsească trajectoriele ortogonale ale secțiunilor făcute în această suprafață prin sfere cu raze variabile și al căror centru e în centrul elipsoidului.

(CONSTANȚA POMPILIAN).

*75. Într'un atelier lucrătorii sînt plătiți cu ziua, nu însă cu acelaș preț. Ei sînt împărțiți în trei categorii. Prețul pe zi pentru

acei din categoria a doua este cu 20% mai mare de cît al acelora din categoria a treia și cu 25% mai mic de cît al acelora din categoria întâi. Să se determine numărul lucrătorilor din fie-care categorie, știind că într'o zi de lucru fie-cărei categorii de lucrători i s'a cuvenit aceași sumă, cîte 200 lei; că numărul total al lucrătorilor este mai mic ca 120, și că nici unui lucrător nu 'i s'a cuvenit mai mult de 8 lei, nici mai puțin de 4 lei.

(A. G. Ioachimescu).

*76. Se dă un semi-cerc cu centrul O și cu diametrul AB, și un punct C între O și A. Să se determine pe semi-circonferența dată un punct M așa că :

$$MB + MC = m.$$

Discuțiune în raport cu cantitatea m privită ca pozitivă.

(G. Țițeica).

*77. Să se compare cele două procedeuri de construcțiune date pentru problema 3 (rezolvită în numărul 3 al *Gazetei Matematice*). Să se arate care din acele două procedeuri e mai simplu și mai exact.

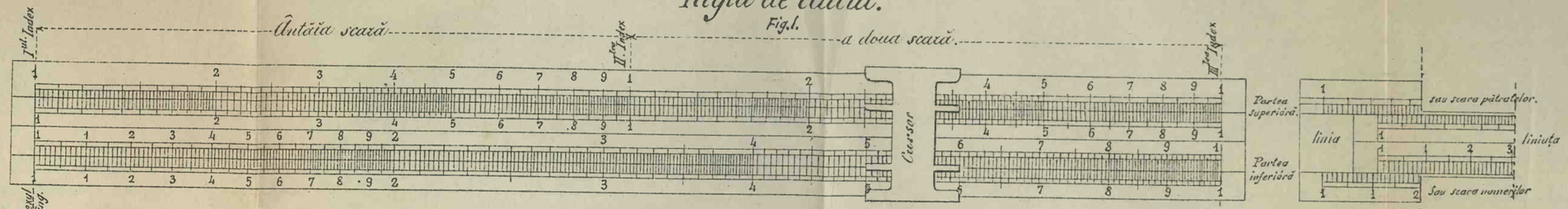
(I. Ionescu).

78. Se dau 3 puncte în spațiu : A (x_1, y_1, λ), B (x_2, y_2, μ), C (x_3, y_3, ν). Să se exprime aria triunghiului plan ABC în funcțiune de coordonatele, $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$, știind că valorile proecțiunilor ariei acestui triunghiu pe planele coordonate (rectangulare) XOY, XOZ, YOZ sînt în progresiune geometrică cu rațiunea q.

(Gr. N. Makarie).

Rigla de calcul.

Fig. I.



SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 a fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.

Problemele însemnate cu * se pot resolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articole trimese de D-nii: *A. Iliovici, Bogdan Ionescu, Alex. Proca* și ***.

2) Probleme propuse de D-nii: *A. Iliovici, Bogdan Ionescu, Gr. N. Makarie, I. P. Rădulescu, C. S. Stănulescu* și *I. Tutuc.*

3) Probleme rezolvite de D-nii: *A. Bărcăcilă* (30, 48); *I. Bucurescu* (38, 39, 44); *A. Iliovici* (19, 21, 30, 35, 36, 39, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 52, 57, 59, 60, 61); *G. Iliovici* (35, 36, 39, 41, 44, 45, 48, 57, 59, 60, 61); *D. Ioachimescu* (41, 55); *Bogdan Ionescu* (37, 38, 49, 50); *C. Ionescu* (44); *Gr. N. Makarie* (60); *C. Mateiescu* (43, 44); *N. Negoescu* (35, 36, 38, 39, 43, 44, 47, 52, 53, 59, 60, 61); *D. Negulescu* (46, 60); *B. Paraschivescu* (48); *I. Penescu* (44); *C. Popescu* (44, 45, 60, 61); *C. Popovici* (44, 45); *I. P. Rădulescu* (43, 44, 47, 49, 53, 59, 60); *C. N. Răileanu* (41, 44, 45, 48, 57, 61); *C. S. Stănulescu* (30, 35, 38, 39, 44, 60); *N. Trandafirescu* (38, 39, 44, 50); *I. Tutuc* (38, 44); *C. Virgiliu* (44).

Probleme nerezolvite: 7, 16, 22—24, 40, 51, 54, 56, 58, 62, 63.

Rectificări.

Problema 7 (corectată). *Să se simplifice expresiunea:*

$$\left(1+\frac{\sqrt{10+\sqrt{2}}}{2\sqrt{\sqrt{5}-5}}\right)^{\frac{1}{6}}+\left(1-\frac{\sqrt{10+\sqrt{2}}}{2\sqrt{\sqrt{5}-5}}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Pagina 89 ecuația (5): în loc de $2mx^2$ se va pune $2xm^2$.

» 100 rîndul 11 de jos în loc de $x_1^2+y_1^2x=$ se va pune $x_1^2+y_1^2=$

» 103 » 14 » » » » » 100000 » » » 1000000

» 100 » 6 » sus » » » $100+a$ » » » $100a$;

» 110 » 2 » jos » » » S^2S' » » » R^2S^2S'.