GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 7. MARTIE 1896.

SUMARUL

1. Cîte-va proprietăți ale triunghiului de arie maximă înscris în elipsă, (Urmare) . . . . *Bogdan Ionescu*
2. Despre lănțișorul sferic. . . . . *Al. Proca*
3. Instrumente logaritmice.—Rigla de calcul. *Z.*
4. Chestiuni algebrice demonstrate geometricește . . . . . ***
5. Chestiuni propuse la concursuri în scris.
6. Probleme rezolvite 19, 21, 30, 35, 37, 38, 43.
7. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacţia *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanţa, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

CITE-VA PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI DE ARIE MAXIMA INSCRIS IN ELIPSA.

(Urmare)

In cele ce urmează, pentru ușurarea vorbirei, vom admite notațiunea următoare: punctul O_A să însemne, punctul avînd ca coordonate segmentele, ce dreapta A interceptează pe axele elipsei.

V. Punctele O_{BC}, O_{CD}, O_{DB} se mișcă pe *curba cruce* (*Kreuzcurve*):

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

Ecuațiunile dreptelor BC, CD, DB sînt:

$$\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{a}x+\frac{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{b}y=1,$$

$$-\frac{2\cos\alpha}{a}x+\frac{2\sin\alpha}{b}y=1,$$

$$\frac{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{a}x-\frac{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{b}y=1;$$

deci coordonatele punctelor O_{BC}, O_{CD}, O_{DB} sînt:

$$\frac{a}{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha},\ \frac{b}{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha};\ -\frac{a}{2\cos\alpha},\ \frac{b}{2\sin\alpha};$$

$$\frac{a}{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha},\ -\frac{b}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha},$$

și se verifică ușor că aceste coordonate satisfac ecuațiunei:

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

VI. Fie P′, P″, P‴ polarele punctelor O_{BC}, O_{CD}, O_{DB} în raport cu elipsa; punctele $O_{P'}$, $O_{P''}$, $O_{P'''}$ descriu elipsa E′ cu ecuațiunea:

$$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1,$$

și triunghiul $O_{P'}O_{P''}O_{P'''}$ e simetricul triunghiului de arie maximă înscris în E′, în raport cu centrul elipsei E′.

Coordonatele punctelor O_{BC}, O_{CD}, O_{DB} le avem din teorema V și deci putem scrie ecuațiunile dreptelor P′, P″, P‴ adică:

$$\frac{x}{a(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)}+\frac{y}{b(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)}=1,$$

$$-\frac{x}{2a\cos\alpha}+\frac{y}{2b\sin\alpha}=1,$$

$$\frac{x}{a(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)}-\frac{y}{b(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)}=1,$$

și prin urmare coordonatele punctelor $O_{P'}$, $O_{P''}$, $O_{P'''}$ sînt:

$$\begin{cases} a(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) & \text{sau} & -2a\cos(240^0-\alpha), \\ b(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha) & » & -2b\sin(240^0-\alpha), \\ -2a\cos\alpha & \text{și} & 2b\sin\alpha, \\ a(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha) & \text{sau} & -2a\cos(120^0-\alpha), \\ -b(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha) & » & -2b\sin(120^0-\alpha). \end{cases}$$

Se vede că dacă schimbăm semnele coordonatelor vîrfurilor $O_{P'}$, $O_{P''}$, $O_{P'''}$ dăm peste coordonatele vîrfurilor triunghiului de arie maximă înscris în elipsa E'.

VII. Insemnăm cu π_1, π_2, π_3 polarele centrului elipsei în raport cu cercul circumscris triunghiului BCD, cercul lui Euler și cercul lui Brocard; centrul de gravitate al triunghiului $O_{\pi_1}O_{\pi_2}O_{\pi_3}$ descrie *curba cruce:*

$$\frac{9c^4}{4a^4b^4} = \frac{1}{a^2x^2} + \frac{1}{b^2y^2}.$$

Ecuațiele celor trei cercuri sînt:

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{2a}\cos3\varphi\, x - \frac{c^2}{2b}\sin3\varphi\, y - \frac{a^2+b^2}{2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2\cos3\varphi}{4a}x + \frac{c^2\sin3\varphi}{4b}y - \frac{a^2+b^2}{8} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{c^4\cos3\varphi}{4a(a^2+b^2)}x - \frac{c^4\sin3\varphi}{4b(a^2+b^2)}y - \frac{c^4}{8(a^2+b^2)} = 0,$$

în care φ e anomalia excentrică a unuia din vîrfurile triunghiului BCD.

Prin urmare putem scrie ecuațiunile dreptelor π_1, π_2, π_3:

$$\frac{c^2\cos3\varphi}{2a}x + \frac{c^2\sin3\varphi}{2b}y + a^2 + b^2 = 0,$$

$$\frac{c^2\cos3\varphi}{a}x + \frac{c^2\sin3\varphi}{b}y - (a^2+b^2) = 0,$$

$$\frac{\cos3\varphi}{a}x - \frac{\sin3\varphi}{b}y - 1 = 0.$$

Urmează imediat coordonatele punctelor O_{π_1}, O_{π_2}, O_{π_3}:

$$\frac{-2a(a^2+b^2)}{c^2\cos3\varphi}, \frac{2b(a^2+b^2)}{c^2\sin3\varphi}; \frac{a(a^2+b^2)}{c^2\cos3\varphi}, \frac{b(a^2+b^2)}{c^2\sin3\varphi}; \frac{a}{\cos3\varphi}, \frac{-b}{\sin3\varphi}.$$

Deci coordonatele ξ și η ale centrului de gravitate al triunghiului $O_{\pi_1}O_{\pi_2}O_{\pi_3}$ sînt:

$$\xi = -\frac{2ab^2}{3c^2\cos 3\varphi}; \eta = -\frac{2ba^2}{3c^2\sin 3\varphi},$$

care satisfac la ecuaţiunea *curbei cruce* indicată.

VIII. Centrul radical a celor trei cercuri din teorema precedentă descrie *curba cruce:*

$$\frac{\left[a^2b^2 + a^2\frac{a^2+b^2}{2}\right]^2}{\frac{c^8}{a^2}x^2} + \frac{\left[a^2b^2 + b^2\frac{a^2+b^2}{2}\right]^2}{\frac{c^8}{b^2}y^2} = 1.$$

In adevăr, calculînd axul radical al primului cerc cu al doilea şi al celui de al doilea cu al treilea, obţinem ecuaţiunile:

$$\frac{c^2}{a}x\cos 3\varphi + \frac{c^2}{b}y\sin 3\varphi + \frac{a^2+b^2}{2} = 0,$$

$$\frac{c^2b^2}{a}x\cos 3\varphi + \frac{c^2a^2}{b}y\sin 3\varphi - a^2b^2 = 0;$$

eliminînd pe φ, obţinem ecuaţia curbei indicată în enunciu.

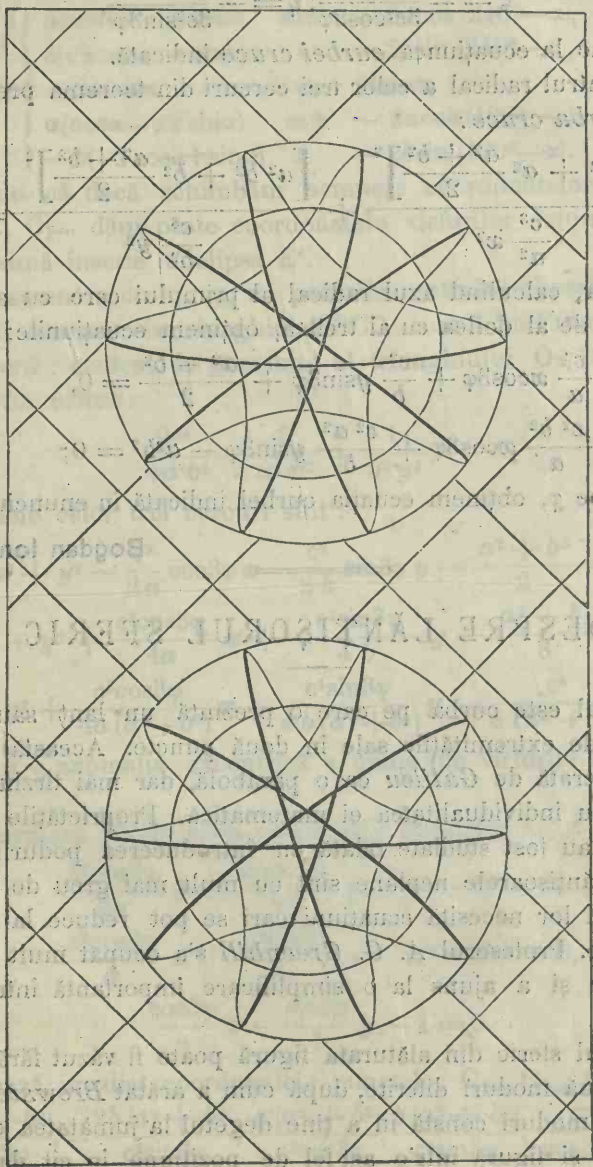
Bogdan Ionescu.

DESPRE LĂNŢIŞORUL SFERIC

Lănţişorul este curba pe care o prezintă un lanţ sau un fir suspendat de extremităţile sale în două puncte. Această curbă a fost considerată de *Galileu* ca o parabolă, dar mai tîrziu dînsul îi recunoscu individualitatea ei matematică. Proprietăţile lănţişorului plan au fost studiate odată cu întroducerea podurilor suspendate. Lănţişoarele neplane sînt cu mult mai greu de studiat, căci studiul lor necesită ecuaţiuni cari se pot reduce la integralele eliptice. Profesorul *A. G. Greenhill* s'a ocupat mult timp cu studiul lor şi a ajuns la o simplificare importantă într'un caz special.

Lănţişorul sferic din alăturata figură poate fi văzut fără stereoscop în două moduri diferite, după cum a arătat *Brewster.* Unul din aceste moduri constă în a ţine degetul la jumătatea distanţei dintre ochi şi figură într'o ast-fel de poziţiune în cît dacă vom închide ochiul stîng, vîrful degetului să se vază coincidînd cu centrul figurei din stînga, şi dacă vom închide ochiul drept, vîrful

degetului să se vază coincidînd cu centrul figurei din dreapta



(Figura se va privi despre pagina 141).

Privind lung la deget și îndepărtîndu-l de odată, se va vedea un

glob plin în mărimea jumătăţei figurei, însă resucit şi întors; liniile groase cari au fost destinate a indica — poate cam exagerat — pe cele mai aproape de ochi, se îndepărtează, pe cînd cele subţiri par că înaintează către ochi. Celalt metod constă în a fixa ochii ca pentru a privi un obiect depărtat de 6 pînă la 9 metri înapoia diagramei, avînd grijă ca axa figurilor să se întîlnească cu axa ochilor; sfera se va vedea atunci în mărime naturală. Cel mai bun mijoc e de a întrebuinţa un stereoscop.

Un metod simplu constă în a întrebuinţa două lentile de cîte 15 cm. distanţă focală puse într'un cadru, ast-fel ca distanţa dintre centrele lor să fie 8 cm., şi care să se poată regula după ochi cu ajutorul unei tije. Cadru trebue ţinut în mînă cînd se priveşte diagrama.

Ecuaţiunea lănţişorului steric se poate găsi uşor prin metoadele staticei :

$$\psi = \int \frac{A dz}{(1-z^2)\sqrt{Z}},$$

în care ψ este longitudinea, z sinlatitudinea A o constantă, $Z=(1-z^2)\times(h-z)^2-A^2$, h înălţimea planului director dedesuptul centrului sferei.

Dăcă lănţişorul se închide de la sine şi are un număr oare-care de bucle, această integrală eliptică de al treilea grad, devine pseudo-eliptică, adică ea este egală cu suma unei integrale eliptice de întăiul grad şi a unei funcţiuni circulare inverse. Primul termin îl putem face să dispară anulîndu-i coeficientul. Rezolvarea acestei ecuaţiuni ne dă parametrul de substituit în ultimul termin, care ne va da atunci rezultatul complect. In acest caz trebue să examinăm bine întorsăturile, căci se poate ca unele porţiuni din lănţişor să devină imaginare. Rezultatul e unic şi curba este algebrică. Coeficienţii terminilor, după teoria integralelor pseudo-eliptice vor trebui să satisfacă ecuaţiunile de forma :

$$\left.\begin{aligned}(1-z^2)^{\frac{5}{2}}\cos 5\psi &= Hz^5+H_1z^4+H_2z^3+H_3z^2+H_4z+H_5\\ (1-z^2)^{\frac{5}{2}}\sin 5\psi &= (Lz^3+L_1z^2+L_2z+L_3)\sqrt{Z}\end{aligned}\right\}$$

Calculul lui H . . . . şi L . . . . este foarte complicat, în cît e imposibil de a-i găsi prin metodele ordinare de eliminaţiune ; însă profesorul *Greenhill* a întrebuinţat o altă metodă în care formula depinde de teoria generală a funcţiunilor eliptice. Ast-fel se

ajunge a determina raportul $\frac{H}{L}$, cu ajutorul căruia s'a putut deduce toți ceilalți coeficienți, cu ajutorul cărora s'a construit figura de mai sus :

$$\psi = \frac{1}{5} \arccos \frac{-48\sqrt{51}z^5 + 120\sqrt{51}z^3 + 200z^2 - 65\sqrt{51}z - 150}{864(1-z^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$\frac{1}{5} \arcsin \frac{120\sqrt{15}z^3 + 60\sqrt{85}z^2 - 70\sqrt{15}z - 39\sqrt{85}}{432(1-z^2)^{\frac{5}{2}}} \times$$

$$\sqrt{(1-z^2)\left(\frac{\sqrt{51}}{6} - z\right)^2 - \frac{1}{60}}.$$

Cercul cel mic în emisfera de jos indică punctele unde presiunea este zero ; de acolo lănțișorul rămîne continuu în interiorul sferei. Planul cadrilat ne indică pozițiunile planului director orizontal. Tensiunea în fie-care punct al lănțișorului e constantă ca și într'un lănțișor plan. Cu toate că integrarea primei ecuațiuni (supusă la condițiunile indicate în cele două ecuațiuni de mai sus) este foarte dificilă, totuși rezultatele finale se pot verifica în cîte-va minute prin diferențiare.

Partea matematică a subiectului se datorește profesorului *A. G. Greenhill* și a apărut în *Procedings of the London Mathematical Society*. Calculele numerice și diagramele au fost făcute de către D-l *T. I. Dewar*. Un model de lănțișor a fost expus la o serată a societății *„Royal Society“*. O descriere a lănțișorului se află în revista *„Enginering“* de care ne-am servit și noi.

Mulți s'ar putea întreba de ce atîta timp cheltuit și atîta muncă pentru o chestiune care nu are nici o aplicațiune practică. Se știe însă că matematicele complectează de multe ori științele practice. O mulțime de cercetări se fac numai în scopul de a lărgi cunoștințele noastre asupra unui subiect abstract de matematici pure, care mai pe urmă ne pot servi a explica unele din cele mai simple fenomene cari se observă în practică.

Al. Proca.

INSTRUMENTE LOGARITMICE—RIGLA DE CALCUL

(Urmare)

2) Partea superioară a liniei și liniuței.— (Scara pătratelor).

Pe această parte a liniei și liniuței, diviziunile sînt trasate cu o unitate de lungime *pe jumătate* cît unitatea de lungime cu care sînt trasate diviziunile de pe partea inferioară; așa că între cele două indexe extreme, pe care le vom numi aci I-iul și al III-lea (fig. 1, planșa I din No. 6 al *Gazetei*), în loc să fie o singură scară logaritmică, ca pe partea inferioară, sînt *două* scări, puse una în urma celeilalte. Vom numi al II-lea index, punctul de separație între aceste două scări.

Toate operațiunile pe care le am arătat, că se fac cu ajutorul părței inferioare a liniei și liniuței, se pot efectua și cu ajutorul părței superioare, ba chiar cu mai mare înlesnire, atunci cînd rezultatele la care ajungem nu au un număr prea mare de cifre. Aceasta din cauză că nu trebue să deplasăm liniuța pentru ca să aducem, sau indexul stîng, sau pe cel drept, în dreptul unui număr, ci din contră, citim rezultatul imediat pe scara superioară în dreptul celui mai apropiat dintre cele trei indexe. Așa de exemplu putem întrebuința foarte bine scara superioară, pentru exemplul de la fig. 7.

a. — Imulțiri și împărțiri repetate.

Aceste operațiuni se fac cu ajutorul părței superioare a liniei și liniuței.

Productul unui șir de factori:

$$a \times b \times c \times d \times \ldots \ldots \times k$$

se află în modul următor:

Se face mai întăi produsul primilor doi factori $a \times b$, însemnîndu-se rezultatul cu cursorul metalic; apoi, aducînd I-iul index al liniuței în dreapta cursorului se face $(a \times b) \times c$ și așa mai departe.

Diviziunile repetate, sau repetarea ambelor operațiuni combinate, se face absolut în acelaș mod, cu ajutorul cursorului.

In ultimul caz—al operațiunilor combinate—este bine să *luăm totdeauna un factor și un divizor împreună*, cît timp aceasta e posibil și atunci operațiunea:

$$\frac{a \times b \times c \times d \times e}{f \times g \times h \times i},$$

se efectuează sub forma:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{a}{f} \times b}{g} \times c}{h} \times d}{i} \times e.$$

Pentru a ști numărul cifrelor rezultatului avem următoarea regula generală:

Numărul cifrelor rezultatului este egal cu diferența, dintre suma numerilor cifrelor factorilor de la numărător și suma numerilor cifrelor factorilor de la numitor, mărită cu de atîtea ori unitatea, de cîte ori rezultatul unei diviziuni cade, pe aceiași scară [1]) *și la stînga rezultatului precedent și micșorată, cu de atîtea ori unitatea, de cîte ori rezultatul unei înmulțiri cade pe aceiași scară și la dreapta rezultatului precedent.*

Exemple: 1°.— $4 \times 0{,}8 \times 2 \times 50 \times 0{,}015 = 4{,}8.$

Numărul cifrelor rezultatului $= [1+0+1+2+(-1)]-2 = +1.$

In adevăr, din suma cifrelor factorilor trebuesc scăzute două unități, de oare-ce la a doua și la ultima înmulțire (cu 2 și cu 0,015) rezultatul cade pe aceiași scară și la dreapta rezultatului precedent.

2°.— $\frac{0{,}34}{6{,}9} \times \frac{0{,}0115}{14} \times \frac{42}{85} = 0{,}00002.$

Numărul cifrelor rezultatului $= [(0+(-1)+2)-(1+2+2)]-1+1 = -4.$

Scădem o unitate, de oare-ce la înmulțirea cu 0,0115 rezultatul cade pe aceiași scară și la dreapta rezultatului precedent, și adaogăm una, de oare-ce la împărțirea cu 14 rezultatul cade pe aceiași scară și la stînga rezultatului precedent.

3°.— $\frac{31}{15{,}5 \times 32 \times 2{,}5} = \frac{31}{15{,}5} \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{2{,}5} = 0{,}025.$

Numărul cifrelor rezultatului $= [(2)-(2+2+1)]+2 = -1.$

[1]) Această regulă se aplică numai cînd întrebuințăm, după cum am spus partea superioară a riglei, căci numai atunci, dacă rezultatul unei înmulțiri cade la dreapta și în scara următoare, sau al unei împărțiri la stînga și în scara precedentă, aceasta nu are nici o influență asupra numărului cifrelor rezultatului.

Scădem două unităţi, de oare-ce la împărţirea cu 15,5 şi cu 2,5 rezultatul cade pe aceiaşi scară şi la stînga rezultatului precedent.

Aplicarea acestei reguli, în practică, este foarte simplă ; trebue observat numai să nu facem greşeală ca, scriind ca în exemplul 3, să credem că unitatea ar da o cifră în suma cifrelor factorilor, de oare-ce se ştie că unitatea nici nu înmulţeşte, nici nu împarte, şi prin urmare nu schimbă întru nimic rezultatul.

3) Patrate şi rădăcini patrate.

Diviziunile scărei inferioare sînt duble ca diviziunile scărilor superioare ale liniei şi liniuţei, de oare-ce, după cum am văzut, ele sînt trasate cu o unitate de lungime îndoită. — Rezultă din această împrejurare *că distanţa 1B* (egală cu logB), de pe scara superioară (fig. 19), echivalează cu *de două ori distanţa 1A* de pe scara inferioară (B şi A fiind, după cum se vede în figură două diviziuni ce se corespund), ceea ce se traduce prin egalitatea :

$$\log B = 2 \log A, \text{ sau } \log B = \log A^2,$$

sau cu alte vorbe că B este patratul lui A.

Patratul B al unui număr dat A, se va citi, deci, *pe scara superioară a liniei*, în dreptul numărului A citit pe scara inferioară; această citire se face cu ajutorul cursorului sau a indexului stîng sau drept al liniuţei.

Pentru a şti numărul cifrelor pătratului unui număr, avem următoarea regulă generală:

Dacă n este numărul cifrelor unui număr A, patratul său B va avea:

$2n$ cifre dacă'l citim pe a doua scară superioară,

$2n-1$ cifre dacă'l citim pe întăia scară superioară.

Pentru extragere de rădăcini vom face operaţiunea inversă a celei pentru ridicare la patrat.

La toate operaţiunile, de pînă acum, s'a simţit necesitate să se cunoască numai reguli pentru determinarea numărului cifrelor rezultatului; la extragere de rădăcini, mai nainte de aceasta, trebue să ştim pe care din cele două scări superioare (întăia sau a doua, fig. 2) trebue să citim numărul dat, pentru ca în dreptul lui şi pe scara inferioară să-i găsim rădăcina ?

Pentru aceasta avem următoarea regulă :

Se împarte numărul dat în grupe de cîte două cifre, începînd

de la dreapta spre stînga la numerile întregi, (ultima grupă de la stînga poate fi de o singură cifră) și de la virgulă spre dreapta la numerile zecimale fără întregi (daca ultima grupă de la dreapta acestor din urmă are o singură cifră, 'i putem adaoga un zero la dreapta).

După cum prima grupă de la stînga, la numerile întregi, sau prima grupă după virgulă, care nu e formată numai din zerori, la numerile zecimale fără întregi, este formată *dintr'o singură cifră* (unimi) *sau din două cifre* (unimi și zecimi), vom citi rădăcina numărului dat *sub întăia sau a doua scară* superioară.

Pentru numerile întregi această regulă se reduce la următoarea, mult mai simplă:

Vom citi rădăcina sub întăia sau a doua scară superioară după cum numărul dat are un număr *impar sau par* de cifre (fig. 20).

Numărul cifrelor rădăcinei unui număr întreg va fi egal cu numărul grupelor ast-fel separate.

La numerile zecimale fără întregi însă, vom considera fie-care grup de cîte două zerori, de la dreapta virgulei, ca un grup negativ, care ne dă o cifră negativă la rădăcină; așa că rădăcina unui număr zecimal fără întregi va avea atîtea zerori la dreapta virgulei, pînă la prima cifră însemnătoare, cîte grupe de cîte două zerori au tost la dreapta virgulei în numărul dat.

Tabloul următor clarifică și mai mult această regulă:

Numărul dat	Grupe	Număr de cifre	Rădăcina se citește sub t scara	Numărul cifrelor rădăcinei	Rădăcina
49000	4,90,00	impar	I	3	221
4900	49,00	par	II	2	70
490	4,90	impar	I	2	22,1
49	49	par	II	1	7
4,9	4,90	impar	I	1	2,21
0,49	0,49	—	II	0	0,7
0,049	0,04,90	—	I	0	0,221
0,0049	0,00,49	—	II	$\overline{1}$	0,07
0,00049	0,00,04,90	—	I	$\overline{1}$	0,0221
0,000049	0,00,00,49	—	II	$\overline{2}$	0,007
0,106	0,10,60	—	II	0	0,325
0,0106	0,01,06	—	I	0	0,103
0,00106	0,00,10,60	—	II	$\overline{1}$	0,0325
0,9	0,90	—	II	0	0,95
0,09	0,09	—	I	0	0,3
0,009	0,00,90	—	II	$\overline{1}$	0,095
0,0009	0,00,09	—	I	$\overline{1}$	0,03

In genere patratele și rădăcinile patrate se găsesc în felul cum am arătat, cu ajutorul părței superioare a riglei.

Putem însă efectua aceste operațiuni și numai cu ajutorul scării inferioare și chiar vom preferi acest metod, ori de cîte ori vom voi să avem rezultate mai exacte, de oare-ce diviziunile fiind îndoite ca sus, putem citi mai multe cifre.

Ridicarea la pătrat se face după regulile îmmulțirei, patratul unui număr fiind produsul a doui factori egali cu numărul dat. ($A^2=A\times A=M$), fig. 21.

Pentru a afla rădăcina unui număr, se însemnează cu cursorul pe linie, numărul dat; apoi se deplasează liniuța pînă cînd citim în acelaș timp *același număr* — rădăcina numărului dat — atît pe liniuță în dreptul cursorului, cît și pe linie în dreptul indexului stîng sau drept al liniuței. ($\sqrt{M}=A$, fig. 21).

Vom întrebuința indexul stîng sau drept, după cum prima grupă de la stînga numărului e formată dintr'o singură cifră sau din două. Numărul cifrelor se determină ca și în metoda precedentă, după numărul grupelor.

Ca aplicațiune directă a rădăcinilor, vom căuta media proporțională între două numere date $C=\sqrt{A\times B}$. — Pentru aceasta se face înmulțirea $A\times B$ întrebuințînd scara superioară a riglei, iar în dreptul produsului aflat, citim, cu ajutorul cursorului, pe scara inferioară media proporțională căutată C. — Numărul cifrelor se determină conform regulelor precedente.

Cu regulele date pînă acum se pot efectua o mulțime de operațiuni combinate și anume, cu ajutorul părței inferioare a riglei se pot efectua toate operațiunile de forma :

$$x=ay;\ x=\frac{y}{a};\ x=\frac{a}{y};\ x=\frac{b}{a}\,y;\ x=\frac{a\times b}{y},\ x=y^2;\ x=\sqrt{y},$$

în care y poate primi o serie de valori.

Cu ajutorul părței inferioare și superioare se pot efectua toate operațiunile de forma:

$$x=y^2\ ;\ x=\sqrt{y};\ x=ay^2;\ x=\sqrt{\frac{y}{a}};\ x=\sqrt{\frac{a}{y}};\ x=\frac{a}{y^2};\ x=b\sqrt{\frac{y}{a}};$$

$$x=y\sqrt{a}\ ;\ x=\frac{\sqrt{a}}{y};\ x=\frac{y\sqrt{a}}{c};\ x=\frac{k\sqrt{a.b}}{c.d};\ x=\frac{b^2y}{a^2};\ x=a^2y\ ;\ x=\frac{y}{a^2};$$

$x=\frac{y^2}{a}$; $x=\sqrt{a.y}$ (medie proporţională); $x=\frac{a^2}{y}$; $x=\frac{a^2b}{y}$; $x=\frac{by^2}{a}$;

$x=\sqrt{\frac{a\times y}{b}}$; $x=\frac{a^2y}{b}$; $x=\frac{by}{a^2}$.

In special figurile 22, 23, 24 şi 25, arată poziţiunile liniei şi liniuţei pentru exemplele:

$\overline{1,5^2}\times 3,2=7,2$; $\frac{\overline{18^2}\times 6}{24}=81$;

$0,25\sqrt{\overline{15}}=0,968$ şi $0,20\sqrt{\overline{15}}=0,775$;

şi $0,028\sqrt{\overline{1500}}=1,085$.

Se înţelege că numărul cifrelor rezultatelor tuturor acestor operaţiuni se determină cu ajutorul regulelor date pentru fie-care operaţiune în parte.

(Va urma) **Z.**

CHESTIUNI ALGEBRICE DEMONSTRATE GEOMETRICEŞTE

Vom demonstra geometriceşte următoarele relaţiuni algebrice:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab, \quad (1)$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab, \quad (2)$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b), \quad (3)$$

relaţiuni care corespund respectiv următoarelor chestiuni geometrice, pe care le vom demonstra bazîndu-se numai pe substituţiuni de figuri egale [1]).

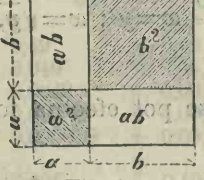


Fig. 1.

1. *Cunoscîndu-se patratele de latură a şi b, se cere a se evalua patratul de latură* $(a+b)$.

Din simpla inspecţiune a figurei, se vede că pătratul de latură $(a+b)$ este echivalent cu suma patratelor de latură a şi b, plus de 2 ori dreptunghiul cu laturile a şi b.

[1]) Interpretarea geometrică a acestor relaţiuni e chestiune cunoscută. Le dăm aci ca nefiind destul de cunoscute la noi. (N. R.)

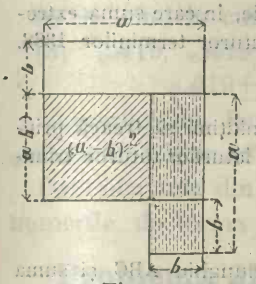


Fig. 2

2. *Cunoscîndu-se patratele de latură a și b, se cere a se evalua pătratul de latură* $(a-b)$.

Din simpla privire a figurei se vede că dacă din suma (a^2+b^2) a celor două pătrate de laturi a și b, scădem dreptunghiurile ab (cel orizontal nehașurat) și ab (cel vertical hașurat), ne rămîne pătratul construit pe latura $(a-b)$.

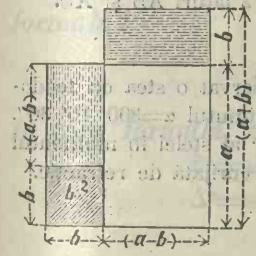


Fig. 3

3. *Cunoscîndu-se patratele de latură a și b se cere a se evalua diferența acestor două patrate.*

Din privirea figurei se vede că dacă scădem din pătratul de latură a, pătratul de latură b, și dacă partea hașurată cu linii întrerupte din pătratul a o așezăm în locul părței hașurate deasupra pătratului a, după cum se arată în figură, vedem că diferența acestor două patrate este egală cu suprafața dreptunghiului de laturi $(a-b)$ și $(a+b)$.

Din aceste exemple se vede, că demonstrațiile geometrice simple sînt foarte expresive și concretizează mult mai bine unele propoziții, de cît convingerea abstractă a calculului.

* * *

Chestiunile date la concursul înscris pentru ocuparea catedrelor de matematici de la Liceul din Galați și de la Gimnaziile din Caracal, Tîrgoviște și Tulcea.

(București, Februarie 1896)

Aritmetică.

Se dă șirul:

A, 2A, 3A, ... BA,

A și B fiind două numere întregi. Se cere a se găsi cîte numere din acest șir sînt divizibile cu B.

Algebră.

1° Se înscrie un dreptunghiu într'un cerc mare al unei sfere cu raza r. Se ia acest dreptunghiu ca bază a unei prizme drepte ale cărei fețe determină pe sferă un patrulater curbiliniu. Să se studieze variațiunea suprafeței acestui patrulater.

2° Să se găsească patru numere formînd o proporţie, în care suma extremilor este 13, suma mediilor 11 şi suma cuburilor tuturor terminilor 1368.

Geometrie.

Să se înscrie într'un cerc un triunghiu ale cărui înălţimi să treacă printr'un punct dat. Să se găsească învălitoarea comună laturilor tuturor triunghiurilor care îndeplinesc această condiţiune.

Trigonometrie.

Se dă lungimea bisectriţei unghiului A al unui triunghiu ABC şi suma celor două laturi adiacente acelui unghiu. Să se studieze variaţiunea suprafeţei triunghiului, variaţiunea unghiului A şi a celor 2 laturi AB şi AC.

Cosmografie.

Într'un loc a cărui latitudine este 38° 58' 53" s'a observat o stea cu teodolitul şi s'a găsit distanţa zenitală $z=69°\,42'\,30''$, azimutul $\alpha=300°\,10'\,30''$. Care sînt valorile distanţei polare şi a unghiuiui orar al stelei în momentul observaţiunei? Distanţa zenitală dată este presupusă corijată de refracţie.

Timpul acordat pentru fie-care chestiune 3 ore.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 19.** *Numerile de forma $\mathscr{M}19+10$ nu pot fi nici patrate nici cuburi perfecte, $\mathscr{M}$însemnînd un multiplu.*

(I. Ionescu.)

Soluţiune dată de D-l A. Iliovici, (Elev în Clasa VII a Liceului din Iaşi).

In raport cu divizorul 19, un număr oare care nu poate fi de cît de una din următoarele forme:

(1) $\mathscr{M}19$, $\mathscr{M}19\pm1$, $\mathscr{M}19\pm2$, $\mathscr{M}19\pm3$, $\mathscr{M}19\pm4$, $\mathscr{M}19\pm5$, $\mathscr{M}19\pm6$, $\mathscr{M}19\pm7$, $\mathscr{M}19\pm8$, $\mathscr{M}19\pm9$.

a) Dacă ridicăm la pătrat aceste numere, şi separăm multiplii de 19 din rezultat, vom găsi următoarele valori corespondente şirului (1):

(2) $\mathscr{M}19$, $\mathscr{M}19+1$, $\mathscr{M}19+4$, $\mathscr{M}19+9$, $\mathscr{M}19+16$, $\mathscr{M}19+6$, $\mathscr{M}19+17$, $\mathscr{M}19+11$, $\mathscr{M}19+7$, $\mathscr{M}19+5$.

Nici unul din aceste numere nu este multiplu de 19 plus 10. Deci numerile de forma $\mathscr{M}19+10$ nu pot fi patrate perfecte.

b) Ridicînd la cub numerile din șirul (1) vom avea ca rezultate:

(3) $\mathscr{M}19$, $\mathscr{M}19\pm1$, $\mathscr{M}19\pm8$, $\mathscr{M}19\pm8$, $\mathscr{M}19\pm7$, $\mathscr{M}19\pm11$, $\mathscr{M}19\pm7$, $\mathscr{M}19\pm1$, $\mathscr{M}19\pm18$, $\mathscr{M}19\pm7$.

Numerile de forma $\mathscr{M}19+10$ se pot pune și sub forma $\mathscr{M}19-19+10=\mathscr{M}19-9$.

Dar nici una din aceste 2 forme nu se găsesc în șirul (3). Deci numerile de forma $\mathscr{M}19+10$ nu pot fi cuburi perfecte.

***Problema 21.** *Să se demonstreze că bisectrița interioară a unghiului A a unui triunghiu sferic* ABC *este dată de formula:*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\delta}{\Delta}\cdot\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin B\sin C}{\cos B+\cos C},$$

în care formulă, ca de obiceiu, avem:

$$\delta^2=\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$
$$\Delta^2=\sin\varepsilon\sin(A-\varepsilon)\sin(B-\varepsilon)\sin(C-\varepsilon),$$
$$a+b+c=2p,$$
$$A+B+C-\pi=2\varepsilon.$$

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l A. Iliovici, (Elev în Clasa VII de la Liceul Național din Iași).

Pentru a demonstra această problemă, vom pleca de la egalitatea [1]):

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin a}\left(\frac{\cos b}{\sin B}+\frac{\cos c}{\sin C}\right). \qquad (1)$$

Insă: $$\sin C=\frac{\sin c}{\sin b}\sin B,$$

și înlocuind în egalitatea (1) obținem:

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin(b+c)}{\sin a\sin c\sin B}. \qquad (2)$$

Avem: $$\sin(b+c)=2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2},$$

iar formulele lui *Delambre* ne dau:

$$\sin\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\sin\frac{a}{2},\quad \cos\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{a}{2},$$

[1]) A se vedea **Gazeta Matematică** No. 2 pag. 26.

și prin urmare:

$$\sin(b+c)=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

sau:

$$\sin(b+c)=\sin a\frac{\cos B+\cos C}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

Dacă în egalitatea (2) înlocuim pe $\sin(b+c)$ prin această valoare, avem:

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\cos B+\cos C}{2\sin\frac{A}{2}\sin B\sin C}, \quad (3)$$

Insă:

$$\sin B=\frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin c\sin a}=\frac{2\delta}{\sin c\sin a},$$

și înlocuind în (3) obținem:

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\sin a(\cos B+\cos C)}{4\delta\sin\frac{A}{2}}; \quad (4)$$

iar:

$$\sin a=\frac{2\sqrt{\sin\varepsilon\sin(A-\varepsilon)\sin(B-\varepsilon)\sin(C-\varepsilon)}}{\sin B\sin C}=\frac{2\Delta}{\sin B\sin C}.$$

Introducînd această valoare în egalitatea (4) obținem în definitiv:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\delta}{\Delta}\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}.$$

***Problema 30.** — *Fiind dat un cub, se unesc centrele fețelor sale două cîte două; să se arate că se va obține ast-fel un octaedru regulat. Unind centrele fețelor octaedrului se obține un cub, în care se poate înscrie un nou octaedru și așa mai departe indefinit. Să se găsească suma volumelor tuturor cuburilor și octaedrilor ast-fel formați.*

(A. G. Ioachimescu.)

Soluțiune dată de D-nii A. Iliovici (Elev Clasa VII Liceul Național, Iași), C. Stănulescu (Elev al Scoalei de Poduri și Sosele) și Al. Bărcacilă (Elev Clasa VI Seminarul Nifon).

Cubul avînd 6 fețe și 8 unghiuri poliedre, unind centrele fețelor alăturate două cîte două, se va obține evident un poliedru cu 8 unghiuri și 6 fețe, care va fi regulat din cauza simetriei: adică un octaedru regulat. In acelaș mod se vede că unind centrele fețelor acestui octaedru, se va obține un cub.

Fie a latura cubului dat, b latura octaedrului înscris, se poate lesne vedea că b este ipotenusa unui triunghiu dreptunghiu isoscel ale cărui laturi sunt egale cu $\frac{a}{2}$, adică:

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Distanța între două vîrfuri opuse ale octaedrului fiind a, volumul său va fi:

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 a = \frac{a^3}{6}.$$

Fețele octaedrului fiind triunghiuri echilaterale, centrele lor sînt centrele cercurilor circumscrise, ele sunt depărtate de vîrful triunghiului cu $\frac{2}{3}h$, h fiind înălțimea triunghiului. Una din fețele cubului înscris, obținută unind centrele a 4 fețe concurente ale octaedrului, va fi de asemenea depărtată de fața corespunzătoare a cubului dat de cantitatea: $\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$; fața opusă aceștia, fiind de asemenea depărtată de cea l'altă față a cubului, dat, cu $\frac{a}{3}$, rezultă că și distanța între ele, adică latura cubului înscris va fi tot $\frac{a}{3}$. Latura celui de al doilea cub, fiind $\frac{1}{3}$ din latura primului cub, volumul său va fi $\frac{1}{3^3}$ din volumul primului; de asemenea pentru celelalte cuburi înscrise. Prin urmare vom avea pentru suma tuturor cuburilor:

$$S_1 = a^3\left[1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \ldots\ldots\right] = a^3\,\frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}a^3.$$

Este evident că volumul octaedrului înscris în cel de al doilea cub, va fi $\frac{1}{27}$ din volumul celui înscris în primul cub. Vom avea deci pentru suma volumurilor tuturor octaedrilor:

$$S_2 = \frac{a^3}{6}\left[1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \ldots\ldots\right] = \frac{1}{6}S_1,$$

ear pentru suma căutată:

$$S = S_1 + \frac{1}{6}S_1 = \frac{63}{52}a^3.$$

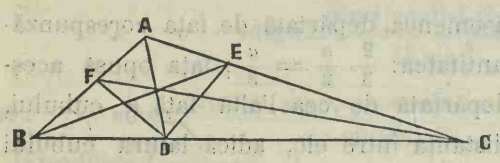
(Va urma)

*** Problema 35.**— *Fie AD bisectrița unghiului A a unui triunghiu ABC. Să se demonstreze: 1) că dacă bisectrițele unghiurilor ABC, ADC se întîlnesc într'un același punct al laturei AC, atunci și bisectrițele unghiurilor ACB, ADB se vor întîlni într'un același punct al laturei AB; 2) să se găsească relațiunea care există între laturile unui triunghiu care se bucură de această proprietate.*

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-nii N. Negoescu (Rîmnicul-Vîlcei), *C. S. Stănulescu,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele) și *A. Iliovici,* (Elev în Clasa VII al Liceului din Iași).

I. Fie E punctul laturei *AC*, unde se întîlnesc bisectrițele unghiurilor *ABC*, *ADC*. Vom avea:



$$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC} \text{ și } \frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EC}$$

Aceste două egalități ne dau egalitatea:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}, \quad (1)$$

care exprimă condiția ca bisectrițele unghiurilor ABC, ADC să se întîlnească într'un același punct al laturei AC.

Insă AD fiind bisectrița unghiului BAC, avem:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC} \quad (2)$$

Impărțind egalitățile (1) și (2), obținem:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{DB}, \quad (3)$$

care e tocmai condiția ca bisectrițele unghiurilor ACB, ADB să se întîlnească într'un același punct al laturei AB.

II. Dacă însemnăm cu a, b, c, $2p$ laturile și perimetrul triunghiului ABC și cu d bisectrița AD, avem:

$$\frac{BD}{c}=\frac{DC}{b}=\frac{a}{b+c},$$

de unde:

$$DB=\frac{ac}{b+c}, \quad DC=\frac{ab}{b+c}.$$

Ducînd aceste valori în egalitățile (1) și (3), ele se reduc și una și alta la egalitatea:

$$bc=d(b+c). \qquad (4)$$

Insă: $$d=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

și introducînd în (4), avem:

$$bc=2\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Ridicînd la patrat, avem:

$$bc=(a+b+c)(b+c-a),$$

de unde obținem relațiunea căutată:

$$a^2=b^2+c^2+bc.$$

Dacă observăm că: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

găsim: $$\cos A=-\frac{1}{2}$$

sau: $$A=120^0.$$

Notă. D-nii *I. Tutuc, C. N. Răileanu* și *G. Iliovici* au demonstrat numai prima parte a problemei, în mod analog cu soluția de mai sus.

Problema 37.— *Intr'un cerc dat se înscrie un poligon de n laturi. Pe fie-care latură se construește un patrat și se ridică planurile patratelor până devin perpendiculare pe planul cercului; se obține ast-fel o prizmă. Să se găsească maximul volumului acestei prizme, cînd numărul laturilor poligonului înscris variază.*

(Constanța Pompilian.)

Soluție dată de D-l Bogdan Ionescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București).

Fie O centrul cercului și r raza lui, φ unghiul la centru corespunzător laturei $\overline{AB}$ a poligonului înscris. Aria triunghiului AOB, este:

$$\frac{r^2\sin\varphi}{2},$$

iar volumul prizmei construite va fi:

$$V=\frac{nr^2}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\varphi.$$

In triunghiul AOB avem:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\varphi}=\frac{r}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

iar $$\varphi=\frac{2\pi}{n},$$

deci:

$$V=nr^3\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Se cere a se determina maximul lui V cînd n variază, însă numai pentru valori întregi. Avem:

$$V'_n=r^3\sin\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{6\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}-\frac{4\pi}{n}\right].$$

Or pentru $n>4$, $\frac{2\pi}{n}<\frac{\pi}{2}$, deci:

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{6\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}+\frac{6\pi^3}{n^3}=\frac{4\pi}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{3\pi^2}{2n^2}\right).$$

Se poate lesne verifica că pentru $n\geq 6$, avem:

$$\frac{1}{2}+\frac{3\pi^2}{2n^2}<1.$$

Deci cînd n crește de la 6 la ∞, $V'_n<0$, iar V descrește necontenit. Rămîne a da lui n valorile: 3, 4, 5, și a lua cea mai mare valoare ce va rezulta pentru V.

Pentru $n=3$, $V=3r^3\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{9}{4}r^3$

« $n=4$, $V=4r^3\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\,r^3$

« $n=5$, $V=5r^3\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{5\sqrt{5}}{4}r^3$.

Este lesne de văzut că cea mai mare valoare a lui V, din aceste trei, este: $2\sqrt{2}\,r^3$, deci V este maximum pentru $n=4$.

***Problema 38.**— *Să se demonstreze egalitatea:*

$$\log(m+2)^x=\sum_{n=1}^{n=m+1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^x.$$

(I. Ghibaldan.)

Soluție dată de D-nii N. Negoescu (Rîmnicul-Vîlcei), *I. Bucurescu* și *Bogdan Ionescu,* (Elevi ai Școalei Normale Superioare din București), *C. S. Stănulescu,* (Elev în Anul III al Școalei de Poduri și Șosele), *N. Trandafirescu,* (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele), *I. Tutuc,* (Student, București) și *Gr. N. Makarie* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Avem succesiv:

$$\sum_{n=1}^{n=m+1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = \log\left(1+\frac{1}{1}\right)^x + \log\left(1+\frac{1}{2}\right)^x + \log\left(1+\frac{1}{3}\right)^x + \ldots\ldots + \log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^x,$$

$$= x\log\frac{2}{1} + x\log\frac{3}{2} + x\log\frac{4}{3} + \ldots\ldots + x\log\left(\frac{m+2}{m+1}\right),$$

$$= x\left\{\log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \ldots\ldots + \log\left(\frac{m+2}{m+1}\right)\right\}$$

$$= x\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\ldots\frac{m+2}{m+1} = x\log(m+2) = \log(m+2)^x.$$

Altă soluție. Se poate observa că:

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = \log(n+1)^x - \log n^x.$$

Dînd lui n toate valorile de la $m+1$ la $+1$ și făcînd suma tuturor egalităților, vom avea, observînd că în membrul 2 termenii se reduc 2 cîte 2 afară de primul și ultimul:

$$\sum_{n=1}^{n=m+1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = \log(m+2)^x - \log 1^x = \log(m+2)^x - \log 1 = \log(m+2)^x.$$

***Problema 43.** — *Să se simplifice expresiunea :*

$$\frac{2\mathrm{tg}^2a(3-4\sin^2a+3\cos 2a-4\cos 2a\sin^2a)(1-3\mathrm{tg}^2a)}{\sin 2a(4\cos^2a-3)(3-4\mathrm{tg}^2a+\mathrm{tg}^4a)}.$$

(N. Nicolescu.)

Soluție dată de D-nii Ioan P. Rădulescu, (Licențiat în Matematici, Focșani), *A. Iliovici,* (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași) *N. Negoescu* (Rîmnicul-Vîlcei), și *Gr. N. Makarie,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Observînd că:

$$3-4\sin^2a+3\cos 2a-4\cos 2a\sin^2a = (3-4\sin^2a)(1+\cos 2a),$$

$$3-4\mathrm{tg}^2a+\mathrm{tg}^4a = (1-\mathrm{tg}^2a)(3-\mathrm{tg}^2a),$$

expresiunea dată se poate scrie:

$$(1)\qquad \mathrm{tg}a\,\frac{3-4\sin^2a}{4\cos^2a-3}\cdot\frac{1+\cos 2a}{\sin 2a}\cdot\frac{1-3\mathrm{tg}^2a}{3-\mathrm{tg}^2a}\cdot\frac{2\mathrm{tg}a}{1-\mathrm{tg}^2a}.$$

Dar:

$$\mathrm{tg}a\,\frac{3-4\sin^2a}{4\cos^2a-3} = \frac{3\sin a-4\sin^3a}{4\cos^3a-3\cos a} = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \mathrm{tg}3a,$$

$$\frac{1+\cos 2a}{\sin 2a}=\frac{2\cos^2 a}{2\sin a\cos a}=\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{1}{\operatorname{tg} a},$$

$$\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=\operatorname{tg} 2a.$$

Inlocuind în expresiunea (1) obținem:

(2) $$\operatorname{tg} 3a\,\frac{1-3\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a(3-\operatorname{tg}^2 a)}\operatorname{tg} 2a.$$

Dar:

$$\operatorname{tg} 3a=\frac{3\operatorname{tg} a-\operatorname{tg}^3 a}{1-3\operatorname{tg}^2 a}.$$

Inlocuind în (2) expresiunea se reduce la $\operatorname{tg} 2a$, care e valoarea simplificată a expresiunei date.

Soluție dată de D-l C. Mateiescu, (Elev în Clasa VI de la Liceul din Craiova).

Știm că: $\sin a=\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$, $\cos a=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$,

$$\sin 2a=2\sin a\cos a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a},\quad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=\frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}.$$

Inlocuind aceste valori în expresiunea dată, avem:

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 a\left[\frac{6-4\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}-\frac{4\operatorname{tg}^2 a-4\operatorname{tg}^4 a}{(1+\operatorname{tg}^2 a)^2}\right](1-3\operatorname{tg}^2 a)}{\frac{2\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}\left(\frac{1-3\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}\right)(3-4\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{tg}^4 a)}.$$

Efectuind calculele obținem:

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 a(6-2\operatorname{tg}^2 a)\,(1-3\operatorname{tg}^2 a)}{2\operatorname{tg} a(1-3\operatorname{tg}^2 a)\,(3-4\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{tg}^4 a)},$$

sau:

$$\frac{2\operatorname{tg} a(3-\operatorname{tg}^2 a)}{3-4\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{tg}^4 a}=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=\operatorname{tg} 2a.$$

PROBLEME PROPUSE

*79. Să se demonstreze că diferența a două cuburi perfecte nu poate fi multiplu de 3, fără a fi și multiplu de 9.

(I. IONESCU.)

80. Să se determine centrul de greutate al volumului unei jumă-

tăți de sferă neomogenă, a cărei densitate variază proporțional cu a n putere a distanței de la centrul sferei la elementele considerate. Să se arate că ori-care ar fi legea după care variază densitatea, funcțiune numai de distanță, distanța centrului de greutate la centrul sferei este totdeauna mai mică ca jumătatea razei.

(A. G. IOACHIMESCU.)

*81 Să se rezolve ecuația:

$$\alpha(x^2-px+q)^2+\beta(x^2+px+q)^2=x^2.$$

(I. P. RĂDULESCU.)

*82. Se dă înălțimea și una din bazele unui trunchiu de con drept circular cu bazele paralele. Se cere a se determina cealaltă bază, așa fel ca suprafața laterală a trunchiului de con, să fie echivalentă cu suma suprafețelor celor două baze.

(V. CRISTESCU.)

*83. Fie l_a, l_b, l_c, lungimile bisectriților unui triunghiu. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{l_a\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{l_b\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{l_c\sin\frac{C}{2}}=\frac{a+b+c}{S}.$$

(G. TIȚEICA.)

84. Să se probeze că pentru n întreg pozitiv și fără soț, avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt[n]{\cos^2\theta}+\sqrt[n]{\sin^2\theta}\right]^n d\theta=2^{n-2}\pi\sum_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right]^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2n}\pi.$$

(CONSTANȚA POMPILIAN.)

85. Să se studieze variațiunea funcțiunei:

$$y=\left(\sqrt[n]{\cos^2 x}+\sqrt[n]{\sin^2 x}\right)^n,$$

pentru n întreg și pozitiv. (CONSTANȚA POMPILIAN.)

*86. Se dă un cerc în care se înscrie un patrat. In acest patrat se înscrie patratul de suprafață minimă, în care se înscrie iarăși un cerc. Se repetă apoi înscrierile în aceiași ordine. Se cere suma suprafețelor cercurilor și patratelor ast-fel construite, cînd ne oprim la cercul de ordinul $(n+1)$ excluziv.

In cazul particular cînd raza primului cerc este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$, această sumă are ca limită $(\pi+3)$.

(C. S. STANULESCU.)

*87. Pe o dreaptă AB să se construiască o circonferență care să treacă prin punctul A și a cărei centru o pe AB, astfel că perpendiculara pe AB, coborîtă din punctul de atingere a tangentei dusă din punctul B la circonferență, să împartă diametrul circonferenței în medie și extrema rațiune.

(A. ILIOVICI.)

88. Într'un triedru tridreptunghiu se înscriu o serie de sfere. Să se găsească suprafața născută de curba de contact a sferelor cu conurile circumscrise lor și având ca vîrf, vîrful triedrului.

(GR. N. MAKARIE.)

*89. Se împarte o circonferență în 8 părți egale. Fie A_1, A_2..... A_8 punctele de diviziune. Să se găsească lungimea liniei frînte: $A_1\ A_2\ A_4\ A_7\ A_3\ A_8\ A_6\ A_5$, cunoscînd raza circonferenței.

(A. G. IOACHIMESCU.)

*90. Să se găsească maximul sau minimul, funcțiunei:

$$\frac{a^{xy}}{b^{x^2+y^2}}$$

precum și valorile lui x și y corespunzătoare, știind că suma $(x+y)$ e constantă și că a și b sînt 2 numere pozitive.

(BOGDAN IONESCU.)

91. Pe baza AB a unui triunghiu oare-care ABC se ia un punct P. Se unește punctul P cu vîrful opus C și se ia mijlocul N al dreptei CP. Prin punctele A și B se duc paralele la dreptele BN, AN. Se cere a se găsi locul punctului de intersecție a acestor 2 paralele.

(V. CRISTESCU.)

*92. Într'un cerc se dau două diametre dreptunghiulare. O tangentă mobilă întîlnește pe unul din diametre în A și pe altul în B. Se duce prin A o paralelă la OB și prin B o paralelă la OA. Fie M punctul lor de întîlnire. Prin centrul O al cercului se duce apoi o dreaptă OI, simetrică cu OA în raport cu OM, și se ia de o parte sau de alta a punctului O, OI=OM. Se cere locul punctelor I.

(I. P. RĂDULESCU.)

*93. Să se găsească densitatea unei sfere metalice care introdusă într'un vas cu apă și mercur, stă jumătate în apă și jumătate în mercur.

(I. IONESCU.)

Problemele însemnate cu * se pot rezolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior :

1) Articole trimese de D-nii: *A. Iliovici, A. Jijie* și $*^*_*$.

2) Probleme propuse de D-nii *Bogdan Ionescu, Gr. N. Makarie, C. Popovici, N. Trandafirescu* și *I. Tutuc.*

3) Probleme rezolvite de D-nii : *A. Bărcăcilă* (48, 73); *I. Bucurescu* (39, 44); *A. Iliovici* (36, 39, 41, 44, 45, 47, 48, 51, 52, 56, 57, 59, 60, 61, 67, 70, 73); *G. Iliovici* (36, 39, 41, 44, 45, 48, 57, 59, 60, 61); *D. Ioachimescu* (41, 55, 73); *Bogdan Ionescu* (49, 50); *C. Ionescu* (44); *Gr. N. Makarie* (7, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 60); *C. Mateiescu* (44, 60, 69, 70, 72); *N. Negoescu* (36, 39, 44, 47, 52, 53, 59, 60, 61); *D. Negulescu* (46, 49, 60, 68, 71, 78); *B. Paraschivescu* (48, 66, 72); *I. Penescu* (44); *C. Popescu* (44, 45, 60, 61); *C. Popovici* (44, 45, 57, 73); *I. P. Rădulescu* (44, 47, 49, 53, 59, 60); *C. N. Răileanu* (41, 44, 45, 48, 57, 61, 73); *C. S. Stănulescu* (39, 44, 60); *N. Trandafirescu* (39, 44, 50, 64, 68, 70, 72); *I. Tutuc* (44); *C. Virgiliu* (44).

Probleme nerezolvite: 16, 22—24, 40, 54, 58, 62, 63, 65, 74—77.

Rectificare. La pag. 125, rîndul 4 de sus, în loc de:

$$\cos(a-b = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

se va ceti:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, sau D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 a fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.