GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 8. APRILIE 1896.

SUMARUL

1. Soluțiunile chestiunilor date la concursul în scris pentru catedrele de matematice (Galați, Caracal, Tîrgoviște și Tulcea) . *G. Țițeica*
2. Media și extrema rație . . . . . *A. Iliovici*
3. O demonstrație a teoremei lui Pitagora . ***
4. Probleme rezolvite 7, 30, 36, 37, 39, 44, 46.
5. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacţia *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanţa, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

SOLUȚIUNILE CHESTIUNILOR DATE LA CONCURSUL ÎNSCRIS PENTRU GAZETELE DE MATEMATICE (Galați, Caracal, Tîrgoviște și Tulcea).

(București, Februarie 1896.)

Aritmetică.

Se dă șirul

(1) A, 2A, 3A,....., BA,

A și B fiind două numere întregi. Se cere a se găsi cîte numere din șir sînt divizibile cu B.

I-a metodă.— De oare-ce toate numerile din șirul dat sunt divizibile cu A, cestiunea revine la găsirea multiplilor comuni lui A și B cuprinși în șirul (1). Insă se știe că toți acești multipli comuni sînt multiplii ai celui mai mic comun multiplu al lor. Multiplii lui μ din șirul (1) sînt

(2) $\mu, 2\mu, 3\mu, \ldots\ldots, \partial\mu$

∂ fiind cîtul produsului AB prin cel mai mic comun multiplu al numerilor A și B; numărul lor este ∂. Pe de altă parte se știe, că cîtul dintre produsul a două numere și cel mai mic comun multiplu al lor este cel mai mare comun divizor. Așa dar, numărul numerilor din șirul (1) divizibile cu B, este cel mai mare comun divizor al lui A și B.

II-a metodă.—Fie ∂ cel mai mare comun divizor al numerilor A și B, q și q' cîturile lor prin ∂, adică :

$$A=\partial q$$
$$B=\partial q'$$

Se știe, că cîturile q și q' sunt prime între ele. Șirul dat se poate scrie :

$$\partial q, 2\partial q, 3\partial q, \ldots\ldots \partial q' \times \partial q$$

Este evident că primul număr din acest șir divizibil cu $B=\partial q'$ este $\partial qq'$.

Cei-l'alți multipli ai lui B sunt multiplii lui $\partial qq'$ până la $AB=\partial^2 qq'$, adică :

$$\partial qq', 2\partial qq', 3\partial qq', \ldots\ldots, \partial\partial qq'$$

așa că numărul lor este ∂.

Cazuri particulare. — 1°. Dacă numerile sînt prime între ele, $\partial=1$; așa dar un singur număr din șir: AB, este divizibil cu B.

2°. Dacă A este divizibil cu B, δ=B; așa dar toate B numerile cari compun șirul (1) sînt divizibile cu B.

Algebră.

1°. *Se înscrie un dreptunghiu într'un cerc mare al unei sfere cu raza r. Se ia acest dreptunghiu ca bază a unei prizme drepte ale cărei fețe determină pe sferă un patrulater curbiliniu. Să se studieze variațiunea suprafeței acestui patrulater.*

2°. *Să se găsească patru numere formînd o proporție, în care suma extremilor este 13, suma mediilor 11 și suma cuburilor tutulor terminilor 1368.*

1°. Fie A, B, C, D vîrfurile dreptunghiului. Se vede ușor că prizma determină pe sferă două patrulatere egale, de arie S. Așa că avem egalitatea evidentă:

(1) aria sferei = 2S + (ALB) + (BMC) + (CND) + (DPA);

(ALB),.... însemnînd aria calotei sferice proiectate în ALC,....

Din (1), observînd că (ALB) = (CND), (BMC) = (DPA), se scoate

$$S = \frac{1}{2}\text{aria sferei} - (ALB) - (BMC)$$

Punînd $AB = 2x$ și $BC = 2y$, avem:

$$(ALB) = 2\pi r\,(r - y),$$
$$(BMC) = 2\pi r\,(r - x),$$

Deci:

$$S = 2\pi r\,(x + y) - 2\pi r^2.$$

Variațiunea patrulaterului se reduce deci la variațiunea cunoscută a sumei $x+y$, cînd între variabilele x și y avem relațiunea imediată de pe figură:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Așa dar patrulaterul este un maximum, cînd dreptunghiul este un patrat, și atunci:

$$S = 2\pi r^2\,(\sqrt{2} - 1).$$

Notă. — Dacă se observă că perimetrul P al patrulaterului în cestiune este format din semicirconferințe de raze x și y, avem:

$$P = 2\pi\,(x + y).$$

Acest perimetru variază, după cum se poate vedea ușor, între $2\pi r$ și $2\pi r\sqrt{2}$.

2°. Dacă însemnăm cu x, y, z, t numerile căutate, avem:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t},$$

$$x+t=13,$$
$$y+z=11,$$
$$x^3+y^3+z^3+t^3=1369.$$

Din aceste ecuațiuni se scoate: $x=10$, $y=6$, $z=5$, $t=3$.

Geometria.

Să se înscrie într'un cerc un triunghiu ale cărui înălțimi să treacă printr'un punct dat. Să se găsească învelitoarea comună laturilor tuturor triunghiurilor cari îndeplinesc această condițiune.

Construcțiunea triunghiului.—Este evident că avem o infinitate de triunghiuri cari împlinesc condițiunea dată. Să construim unul din aceste triunghiuri alegîndu-ne unul din vîrfurile sale, A spre exemplu. H fiind punctul dat de întîlnire al înălțimilor, dreapta AH este o înălțime a triunghiului, deci dreapta BC este determinată ca direcțiune. Pentru ca s'o definim complect, observăm că,

$$OM=\frac{AH}{2},$$

O fiind centrul cercului dat, și M mijlocul laturei BC. Așa dar: pentru ca să construim triunghiul cînd unul din vîrfuri A este ales, ducem prin O o paralelă la AH și luăm $OM=\frac{AH}{2}$, apoi coborînd din M o perpendiculară pe AH, punctele B și C unde această perpendiculară întîlnește cercul dat, sînt celelalte două vîrfuri ale triunghiului căutat. Singura condițiune pe care trebue s'o îndeplinească datele, este ca dreapta BC să taie efectiv cercul dat, adică:

$$OM < R,$$

sau:

$$AH < 2R,$$

R fiind raza cercului O.

Să punem $OH=d$. Se vede ușor că, dacă:

$$d+R < 2R,$$

sau:

$$d < R,$$

adică, dacă punctul H este interior cercului O, se poate construi un triunghiu în condițiunile enunțiului ori-care ar fi vîrful A ales pe circonferința O, Și din contra, dacă:

$$d-R > 2R,$$

sau:

$$d > 3R,$$

nu se pote construi nici unul. In fine cînd:

$$R < d < 3R,$$

există un arc pe circonferința O unde se poate lua vîrful A pentru ca să se poată construi triunghiul.

Învălitoarea laturilor.— I-a metodă.— Fie A' și A'' punctele unde înălțimea AH întîlnește respectiv latura BC și cercul O. Am văzut mai sus că $OM=\frac{AH}{2}$, și se știe de altminteri că HA'=A'H'', așa că avem :

$$OM \times HA' = \frac{1}{2} HA \times HA' = \frac{1}{4} HA \times HA'' = \text{const.}$$

pentru că produsul HA×HA'' este puterea punctului fix H în raport cu cercul O. Așa dar produsul distanțelor punctelor fixe O și H la dreapta mobilă BC este constant. Se știe că în acest caz dreapta BC rămîne tangentă la o conică cu centru, avînd punctele O și H ca focare.

II-a metodă.—Se știe că locul proiecțiunilor focarelor unei conice pe tangentele sale este cercul principal al acelei conice. Invers, dacă proiecțiunile a două punte fixe pe o dreaptă mobilă descriu un cerc, dreapta mobilă rămîne tangentă la o conică avînd punctele fixe ca focare și cercul lor ca cerc principal.

Acestea fiind amintite, observăm că dacă unim M cu mijlocul M' al segmentului AH, avem :

$$OM=\frac{AH}{2}=AM',$$

și, însemnînd cu O' punctul de întîlnire al dreptelor MM' și OH,

$$OO'=O'H, \quad O'M=O'M'.$$

Pe de altă parte din triunghiurile HO'M și HOA, avem :

$$O'M'=O'M=\frac{OA}{2}=\frac{R}{2},$$

deci proiecția M a punctului O pe BC descrie un cerc K de centru O' și de rază $\frac{R}{2}$. Se poate vedea în acelaș mod, că proiecția A' a punctului H descrie același cerc K, ca și punctul M. Așa dar, în virtutea celor amintite la început, învăluitoarea căutată este o conică avînd ca focare punctele O și H și ca cerc principal cercul K. Se poate determina și genul acestei conice. Să ne amintim

pentru aceasta, că la elipsă cercul principal cuprinde în interior focarele, iar la iperbolă le lasă în afară. Așa, că dacă :

$$d < R,$$

sau dacă punctul H e interior cercului O, învăluitoarea este o elipsă ; și dacă :

$$d > R,$$

sau cînd punctul H este exterior cercului O, învăluitoarea este o iperbolă.

Observațiune.—Se poate vedea alt-fel că punctele M și A′ descriu un cerc. In adevăr, cercul celor nouă puncte al triunghiului variabil ABC este fix, căci centrul său O′ este fix și raza sa $\frac{R}{2}$ constantă. Punctele mobile M și A′ fiind situate pe cercul celor nouă punte, acest cerc este chiar locul comun al proiecțiilor lui O și H pe BC.

Trigonometrie.

Se dă lungimea bisectriței unghiului A al unui triunghiu ABC și suma celor două laturi adiacente acestui unghiu. Să se studieze variațiunea suprafeței triunghiului, variațiunea unghiului A și a celor două laturi AB și AC.

Fie A′ punctul unde bisectrița interioară a unghiului A întîlnește latura opusă BC. Avem identitatea :

$$(ABA') + (A'AC) = (ABC),$$

(ABA'),... însemnînd aria triunghiului ABA',.... Inlocuind ariile din egalitatea precedentă cu valorile lor avem, după înlăturarea factorului $\frac{1}{2}$:

$$c\alpha \sin\frac{A}{2} + b\alpha \sin\frac{A}{2} = bc \sin A,$$

α fiind lungimea bisectriței; sau:

$$(1) \qquad (b+c)\alpha = 2bc\cos\frac{A}{2}.$$

Suma $b+c$ este dată constantă; să punem :

$$(2) \qquad b+c = 2l.$$

(1) devine :

$$(3) \qquad \alpha l = bc\cos\frac{A}{2}.$$

Variația unghiului A. — Din (3) avem :

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\alpha l}{bc}, \tag{4}$$

de unde se vede că $\cos\frac{A}{2}$ variază în sens invers cu produsul bc. In virtutea egalității (2), produsul bc are un maximum egal cu l^2. Prin urmare $\cos\frac{A}{2}$ descreşte de la 1 pînă la minimum $\frac{\alpha}{l}$. Dacă însemnăm cu θ arcul positiv şi mai mic ca $\frac{\pi}{2}$ al cărui cosinus este $\frac{\alpha}{l}$, A variază de la zero la 2θ. Aşa dar, A admite un maximum egal cu 2θ.

Egalitatea (4) presupune că în tot timpul variațiunei avem :

$$bc \geq \alpha l, \tag{5}$$

de unde :

$$l^2 > \alpha l;$$

de unde rezultă următoarea condiție între date :

$$\alpha < l.$$

Variațiunea suprafeței triunghiului. — Să însemnăm cu S aria triunghiului ABC. Avem în virtutea egalității (3) :

$$2S=bc\sin A=2bc\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=2\alpha l\sin\frac{A}{2},$$

de unde :

$$S=\alpha l\sin\frac{A}{2},$$

$\frac{A}{2}$ avînd un maximum θ mai mic ca $\frac{\pi}{2}$, S variază în același sens ca $\sin\frac{A}{2}$ şi admite un maximum egal cu $\alpha l \sin\theta=\alpha l\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $=\alpha l\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{l^2}}=\alpha\sqrt{l^2-\alpha^2}$. Aşa dar S variază de la zero la maximum $\alpha\sqrt{l^2-\alpha^2}$.

Notă. — A şi S sînt maxime în același timp cu bc pentru $b=c$, adică în cazul triunghiului isoscel.

Variațiunea laturilor b şi c.—Intre b şi c avem relațiunile (2) şi (5). Scoțînd din (2) valoarea lui c şi ducînd-o în (5) obținem :

$$b^2-2lb+\alpha l\leq o,$$

de unde :

$$l-\sqrt{l^2-\alpha l} \leq b \leq l+\sqrt{l^2-\alpha l}$$

Așa dar, b admite un maximum și un minimum :

$$\text{Max. } b=l+\sqrt{l^2-\alpha l}.$$

$$\text{Min. } b=l-\sqrt{l^2-\alpha l}.$$

Latura c are aceiași variațiune ca b.

Observațiuni.—1°. Se poate studia ușor variațiunea laturei a treia. In adevăr, avem:

$$a^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

sau :

$$a^2=bc-\frac{a^2bc}{4l^2},$$

de unde :

$$a^2=4l^2-\frac{4\alpha^2l^2}{bc},$$

cea-ce arată că a și bc variază în acelaș sens. Așa dar a variază de la minimum$=2\sqrt{l^2-\alpha l}$ pînă la maximum$=2\sqrt{l^2-\alpha^2}$.

2°.—Se poate trata în același mod problema : *Se dă bisectrița exterioară a unghiului A și diferința laturilor AB și AC, să se studieze etc....*

Cosmografie.

Intr'un loc a cărui latitudine este 38°58'53" s'a observat o stea cu teodolitul și s'a găsit distanța zenitală $z=69°42'30"$, azimutul $a=300°10'30"$. Care sînt valorile distanței polare și unghiului orar al stelei în momentul observațiunei? Distanța zenitală dată este presupusă corijată de refracție.

Să însemnăm latitudinea cu λ, distanța polară cu δ și unghiul orar cu H.

In triunghiul sferic ZPA format de zenit, pol și stea, avem :

$$\text{cotg}z\cos\lambda=\text{cotg}H\sin a-\sin\lambda\cos a$$

de unde, punînd :

$$\text{tg}\varphi=\frac{\text{cotg}z}{\cos a}$$

scoatem :

$$\text{cotg}H=\frac{\sin(\lambda+\varphi)}{\text{tg}a\cos\varphi}.$$

Făcînd calculele se găsește, $\varphi=36°20'17"$, $H=304°55'26"$.

Apoi, în același triunghiu sferic, avem:

$$\cos\delta = \sin\lambda \cos z - \cos\lambda \sin z \cos a,$$

și:

$$\frac{\sin\delta}{\sin a} = \frac{\sin z}{\sin H}$$

Din ultimele două relațiuni se scoate:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin a \sin z}{\sin H (\sin\lambda \cos z - \cos\lambda \sin z \cos a)},$$

sau:

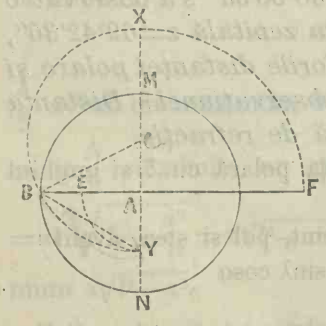
$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\operatorname{tg} a \cos\varphi}{\sin H \cos(\lambda - \varphi)},$$

de unde se găsește $\delta = 98^{\circ}31'47''$.

G. Țițeica.

MEDIA ȘI EXTREMA RAȚIE

A împărți o dreaptă în medie și extremă rație, va să zică a o despărți în două părți, ast-fel că cea mai mare din aceste părți să fie medie proporțională între cea mai mică parte și linia întreagă. Soluțiunea acestei chestiuni se găsesce în toate tratatele de geometrie. Vom da aci un alt mod de a rezolvi această chestiune și anume:



In punctul A al dreptei date AB, ridicăm perpendiculara XY, pe care luăm $AC = \frac{1}{2} AB$. Din C ca centru cu raza CB descrim un arc de cerc, care taie dreapta XY în punctele X și Y. Din A ca centru cu raza AY descrim un arc care taie dreapta AB în punctul E, care împarte dreapta AB în medie și extremă rație. [1])

[1]) Această construcțiune e mai simplă și mai exactă ca construcțiunea clasică. In adevăr formulele respective ale acestor construcțiuni sînt: $R_1\ P_1\ D_1\ A_7$ și $R_2\ P_2\ D_2\ A_7$. Se vede că coeficientul de construcție e mai mic cu 2 la prima ca la a doua, coeficientul de neexactitate mai mic cu 1 iar numărul liniilor sau multiplcitatea e mai mică cu 1. (I. I.)

Pentru a justifica această construcțiune să unim punctul B cu C. Triunghiul dreptunghiu ABC ne va da:

$$1) \qquad \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2.$$

Dar BC=AY ca raze, și AY=AC+AY=AC+AE, de oare-ce AE=AY ca raze.

Deci: $\overline{BC}^2=(AC+AE)^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2,$

De unde:

$$\overline{AC}^2+2\,AC.\ AE+\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2,$$

sau:

$$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-2AC.\ AE.$$

Dar prin construcțiune: 2AC=AB. Deci:

$$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-AB.\ AE=AB\,(AB-AE)=AB\times BE.$$

c. c. e. d. d.

Putem găsi ușor expresiunea algebrică a lui AE. Inlocuind în (1) pe AB prin 2AC; vom avea:

$$\overline{BC}^2=4\overline{AC}^2+\overline{AC}^2=5\overline{AC}^2,$$

de unde:

$$BC=AC\sqrt{5},$$

deci:

$$AE=CY-AC=BC-AC=AC(\sqrt{5}-1),$$

și dacă însemnăm cu a lungimea AB vom avea:

$$AE=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Observare. Dacă din A cu raza AX descrim un arc, acest arc taie prelungirea dreptei AB în punctul F, care îndeplinește condițiunea ca distanța de la acest punct la punctul A să fie medie proporțională între distanța de la același punct la B și între distanța AB, adică proprietate analoagă cu a punctului E. Demonstrația e analoagă cu cea dată mai sus și se va putea stabili ușor relațiunile:

$$\overline{AF}^2=AB.\ BF.$$

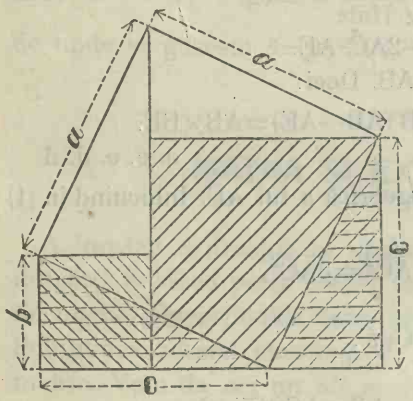
$$AF=\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

A. Iliovici.

Notă. Construcțiunea indicată mai sus justifică următoarea construcțiune cunoscută pentru a înscrie decagonul și pentagonul regulat. Fie cercul cu

raza AB. Ducem două diametre perpendicalare BB' și MN. Din mijlocul C al razei AM descrim cu raza AB un arc care taie raza MN în punctul Y. AY e latura decagonului înscris iar BY e latura pentagonului înscris în cercul AB, de oare-ce se știe că latura pentagonului e ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu care are drept catete raza și latura decagonului.

O DEMONSTRAȚIE A TEOREMEI LUI PITAGORA



Din privirea figurei se vede că pătratul construit pe ipotenuză ca latură, din cauza egalității triunghiurilor nehașurate cu triunghiul dat, poate fi înlocuit prin figura hașurată compusă din suma patratelor construite pe cele două laturi ale triunghiului.

Așa dar relațiunea care există între laturile triunghiului dreptunghiu e :

$a^2 = b^2 + c^2$.

***

PROBLEME REZOLVITE

Problema 7.— *Să se simplifice expresiunea :*

$$\left[1+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{5}-5}}\right]^{\frac{1}{6}}+\left[1-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{5}-5}}\right]^{\frac{1}{6}}.$$

(I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-l Gr. N. Makarie, (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Să însemnăm cu A valoarea acestei expresiuni. Observînd că fracțiunile din parenteze se pot scrie :

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{5}-5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{-1}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = i\,\mathrm{tg}\,54^{\circ},$$

vom avea :

$$A=(1-i\operatorname{tg}54^0)^{\frac{1}{6}}+(1+i\operatorname{tg}54^0)^{\frac{1}{6}},$$

sau :

$$A=\frac{(\cos 54^0-i\sin 54^0)^{\frac{1}{6}}+(\cos 54^0+i\sin 54^0)^{\frac{1}{6}}}{\cos^{\frac{1}{6}}54^0}$$

Aplicînd formulele lui *Moivre* vom avea:

$$A=\frac{2\cos\frac{2k\pi+54^0}{6}}{\cos^{\frac{1}{6}}54^0}.$$

Expresiunea admite deci următoarele valori distincte :

$$A'=\pm\frac{2\cos 9^0}{\cos^{\frac{1}{6}}54^0},\quad A''=\pm\frac{2\cos 69^0}{\cos^{\frac{1}{6}}54^0},\quad A'''=\pm\frac{2\cos 51^0}{\cos^{\frac{1}{6}}54^0}.$$

Aceste valori s'au obținut luînd pentru k aceleași valori pentru ambele radicale, pentru a avea rezutatul real. Dacă acum înlocuim $\cos 9^0$, $\cos 69^0$, $\cos 51^0$ și $\cos 54^0$ prin valorile lor cunoscute, vom obține valorile căutate ale lui A. Vom avea deci :

$$A'=\pm\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt[4]{2}\sqrt[12]{5-\sqrt{5}}}.$$

$$A''=\pm\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt[4]{2}\sqrt[12]{5-\sqrt{5}}}.$$

$$A'''=\pm\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt[4]{2}\sqrt[12]{5-\sqrt{5}}}.$$

***Problema 30.**— *Generalizare.* Fiind dat un poliedru convex, care are f fețe și v vîrfuri, dacă pe fie-care față să ia cîte un punct și se unesc punctele situate în două fețe alăturate, două cîte două, se va obține evident un nou poliedru convex, înscris în cel dintăi și care va avea v fețe și f vîrfuri. Dacă primul poliedru este regulat, și punctele luate coincid cu centrele fețelor, din cauza simetriei, poliedrul înscris va fi asemenea regulat, el va avea atîtea fețe cîte unghiuri are cel dintăi și reciproc, astfel:

La un	*tetraedru* [1]	corespunde un	*tetraedru*	înscris
» »	*exaedru*	»	» *octaedru*	»
» »	*octaedru*	»	» *exaedru*	»
» »	*dodecaedru*	»	» *icosaedru*	»
» »	*icosaedru*	»	» *dodecaedru*	»

Din acest tablou se vede că poliedrele regulate pot fi considerate ca *conjugate* (reciproce) două cîte două, și se poate pune, relativ la fie-care din ele, o problemă analogă cu cea de sus. Imi propun a rezolva această problemă în cazul general.

Fie P un poliedru regulat dat, Q, P′, Q′... poliedrele obținute prin înscriere succesivă. Poliedrele P, P′... sînt asemenea între ele, din cauza reciprocității ce există între poliedrele regulate; de asemenea Q, Q′... Fie a, b, a', b'... laturile poliedrelor P, Q, P′, Q′..., O centrul comun al acestor poliedre, C_1 și C_2 centrele a două fețe alăturate din P; un plan dus prin O, C_1 și C_2 tae muchia comună celor două fețe considerate într'un punct A. In triunghiul C_1C_2A, avem:

$$\overline{C_1C_2}^2=\overline{C_1A}^2+\overline{C_2A}^2-2\overline{C_1A}\times\overline{C_2A}\cos A.$$

A reprezintă înclinarea I a două fețe alăturate; acest unghiu e dat prin relația:

$$(1)\qquad \sin\frac{I}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}}\ ^{2})$$

în care m reprezintă numărul muchilor unui unghiu poliedru, iar n numărul laturilor fie-cărei fețe.

Dar
$$\overline{C_1A}=\overline{C_2A}=ap.\ fe\text{ț}ei=\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n},$$
$$C_1C_2=b,$$

deci:

$$(2)\qquad b=2\overline{C_1A}\sin\frac{I}{2}=a\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

[1]) Nefiind vorba de cît de poliedre regulate, acest cuvînt rămîne sub înțeles în cele ce urmează.

[2]) A se vedea *Rouché et Comberousse*. Traité de Géométrie, seconde partie, pag. 245.

In acelaș mod se va deduce și a' din b; avem:

$$a' = b \operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}}.$$

(m și n se schimbă între ei, căci în poliedrul Q, fie-care față are atîtea laturi cîte muchii aveau unghiurile lui P și reciproc);

sau

$$(3) \qquad a' = a\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Poliedrele P, P', P'' . . . fiind asemenea între ele, și raportul între laturile omoloage fiind egal cu: $\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}$, raporturile între volumele lor vor fi egale cu

$$\operatorname{cotg}^6\frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}^6\frac{\pi}{n}.$$

Acelaș raport există evident și între volumele poliedrelor Q și Q'. Deci însemnînd cu V și V_1 volumele lui P și Q, vom avea pentru suma volumelor tuturor poliedrelor obținute, prin înscriere succesivă:

$$S = (V+V_1)\left[1+\operatorname{cotg}^6\frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}^6\frac{\pi}{n}+\operatorname{cotg}^{12}\frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}^{12}\frac{\pi}{n}+\ldots\right]$$

sau:

$$(4) \qquad S = (V+V_1)\frac{1}{1-\operatorname{cotg}^6\frac{\pi}{n}\operatorname{cotg}^6\frac{\pi}{m}}.$$

Volumul unui poliedru regulat este dat prin expresia:

$$V = f \times s \times \frac{r}{3},$$

în care:

f reprezintă numărul fețelor, s suprafața unei fețe, și r raza sferei înscrise, și care poate fi dedusă din triunghiul: C_1OC_2. Unghiul din O fiind $\pi - I$, se găsește:

$$r = \frac{b}{\cos\frac{I}{2}} = a\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{n}-\cos^2\frac{\pi}{m}}}.$$

Pe de altă parte între numĕrul total al muchilor M, numărul fețelor f și numărul vîrfurilor unui poliedru, exista relația lui Euler:

$$M + 2 = f + v.$$

Poliedrul fiind regulat, avem de asemenea:

$$2M = nf = mv.$$

Din relațiile precedente se deduce:

$$f = \frac{4m}{2m - n(m-2)}.$$

Aria unei fețe este:

$$s = \frac{na^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n},$$

deci:

$$(5) \qquad V = \frac{1}{6} \times \frac{mn}{2m - n(m-2)} a^3 \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{n} \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m}}}.$$

V' se deduce din V schimbînd pe a în b pe n in m și reciproc. Se găsește:

$$(6) \qquad V' = \frac{1}{6} \frac{mn}{2n - m(n-2)} \frac{a^3}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}} \times \frac{\cos^5 \frac{\pi}{n} \cos^4 \frac{\pi}{m}}{\sin^6 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{m}}.$$

Formulele (2), (3), (4) (5) și (6) rezolvă problema în cazul general.

(A. G. I.)

* **Problema 36.**— *Într'un triunghiu ABC în care unghiul ABC=30°, se prelungește latura AB dincolo de B cu BD=BC, și unim punctul A cu mijlocul E al dreptei CD. Se cere a se determina raportul lui BC către AB, cînd dreapta AE e perpendiculară pe CB.*

(C. S. Stănulescu.)

Soluțiune dată de D-l A. Iliovici, (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași).

Fie F punctul în care se întîlnesc dreptele AE și BC. Laturile triunghiului BCD fiind tăiate de transversala AE avem:

$$\frac{EC}{ED} \times \frac{AD}{AB} \times \frac{FB}{FC} = 1.$$

Dar avem prin construcție:

$$CE = ED.$$

Prin urmare egalitatea precedentă se reduce la:

$$\frac{AD}{AB}\times\frac{FB}{FC}=1, \text{ sau } \frac{AD}{AB}=\frac{FC}{FB}.$$

De aci deducem:

$$\frac{AD+AB}{AB}=\frac{FC+FB}{FB}.$$

Dar: $AD=AB+BD=AB+BC$, și $FC+FB=BC$,

căci prin construcție am luat $BD=BC$. Proporția de mai sus devine prin urmare:

$$(1)\quad \frac{2AB+BC}{AB}=\frac{BC}{FB}.$$

Să evaluăm acum lungimea FB. Pentru aceasta observăm că triunghiul ABF este jumătatea unui triunghiu echilateral în care AB e latura și BF înălțimea, căci unghiul BAF fiind complimentar cu ABF (30^0) valorează 60^0. Deci AF e jumătatea laturei, și prin urmare:

$$AF=\frac{AB}{2}.$$

Triunghiul dreptunghiu BAF ne dă:

$$AF=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{\overline{AB}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}}=AB\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Inlocuind această valoare în (1) avem:

$$\frac{2AB+BC}{AB}=\frac{2BC}{AB\sqrt{3}},$$

sau: $$2\sqrt{3}\ AB=(2-\sqrt{3})\ BC,$$

de unde: $\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\ (2+\sqrt{3})=6+4\sqrt{3}=12{,}928\ldots\ldots$

Soluțiune dată de D-nii N. Negoescu, (Rîmnicul Vîlcei), și *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași).

Ducem dreapta BE ce va fi mediana triunghiului isoscel BCD. Prin urmare vom avea:

$$BD\sin\widehat{BDE}=BE,$$

care se poate scrie (observînd că $BC=BD$):

$$\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sin\widehat{BDE}}\times\frac{BE}{AB}.$$

Triunghiul ABE ne dă:

$$\frac{BE}{AB}=\frac{\sin\widehat{BAE}}{\sin\widehat{BEA}},$$

și prin urmare vom avea:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\widehat{BAE}}{\sin BDE\,\sin\widehat{BEA}}.$$

In triunghiul dreptunghiu AFB unghiul din B fiind de 30°, unghiul BAE va fi de 60°. De asemenea unghiurile BEA, BCD sînt egale ca avînd laturile perpendiculare, și prin urmare unghiurile BDE și BEA sînt egale. Dar în triunghiul isoscel CBD, unghiul din B fiind suplimentul unghiului ABC, va fi de 150°. Deci celelalte unghiuri ale acestui triunghiu isoscel vor fi de $\frac{180^0-150^0}{2}=15^0$. Prin urmare expresiunea precedentă se poate scrie:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\sin 60^0}{\sin 15^0\sin 15^0}=\frac{2\sin 60^0}{1-\cos 30^0}=\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=6\times 4\sqrt{3}.$$

***Problema 37** [1]).— *Soluțiune elementară dată de D-l Gr. N. Makarie,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Se stabilește în mod analog cu cel dat în No. 7, că volumul are ca expresiune:

$$V=nr^3\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Partea variabilă a volumului este produsul $n\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$. Să căutăm mai întâi a vedea de la ce valoare a lui n înainte putem fi siguri că acest produs descrește necontenit.

Pentru aceasta va trebui să rezolvim inegalitatea:

---

[1]) A se vedea **Gazeta Matematică**, No. 7, pag. 155.

1) $$n \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} > (n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1}.$$

Știm însă că avem neegalitățile:

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

cînd arcul x nu trece peste un cadran. Dar de la $n=4$ în sus avem $\frac{2\pi}{n} < 90^0$. Prin urmare neegalitatea 1) va fi satisfăcută de valorile lui $n > 4$, cari satisfac neegalitatea:

2) $$n\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{8\pi^3}{6n^3}\right)\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}\right) > (n+1)\frac{2\pi}{n+1}\cdot\frac{\pi}{n+1},$$

căci această neegalitate are membrul I mai mic de cît membrul I al neegalității 1), iar membrul II al neegalității 2) e mai mare ca membrul II a neegalității 1). Numărul n fiind pozitiv, putem goni numitorii, și ordonînd în raport cu puterile lui n vom avea:

3) $$18n^4 - 15\pi^2 n^3 - 15\pi^2 n^2 + 2\pi^4 n + 2\pi^4 > 0.$$

In locul acestei neegalități să rezolvim inegalitatea:

4) $$18n^4 - 15.10.n^3 - 15.10.n^2 + 2.9.n > 0.$$

Valorile lui n cari vor satisface această neegalitate vor satisface *a fortiori* inegalitatea 3) căci din membrul I al neegalității 3) s'a suprimat $2\pi^4$, s'a înlocuit în termenul pozitiv $2\pi^4 n$, coeficientul π^4 prin numărul mult mai mic 9, iar în termenii negativi s'a înlocuit coeficientul π^2 prin numărul mai mare 10. Din membrul I a neegalității 4) suprimînd factorul comun pozitiv $6n$, ne rămîne a rezolvi neegalitatea:

5) $$3n^3 - 25n^2 - 25n + 3 > 0,$$

care se mai poate scrie:

6) $$3(n^3+1) - 25(n+1)n > 0.$$

Suprimînd factorul pozitiv $n+1$, ne rămîne a rezolvi neegalitatea:

$$3(n^2 - n + 1) - 25n > 0,$$

sau:

7) $$3n^2 - 28n + 3 > 0.$$

In locul acestei neegalități să rezolvim neegalitatea:

8) $$3n^2 - 28n > 0,$$

dedusă din 7) suprimînd termenul 3. Aceasta se mai poate scrie:

$$3n - 28 > 0,$$

sau în fine:

$$n > \frac{28}{3}.$$

Deci de la $n=10$ în sus, necegalitatea 8) e satisfăcută, și prin urmare *a fortiori* necegalitățile (7), (4), (2) și (1). Rămîne a examina valorile lui V pentru n cuprins între 3 și 10. Avem făcînd calculele:

$$V_3=2{,}25r^3;\ V_4=2{,}82r^3;\ V_5=2{,}79r^3;\ V_6=2{,}59r^3;\ V_7=2{,}36r^3;$$
$$V_8=2{,}16r^3;\ V_9=1{,}97r^3 \text{ și } V_{10}=1{,}81r^3.$$

De aci rezultă că poligonul care dă maximul lui V este patratul.

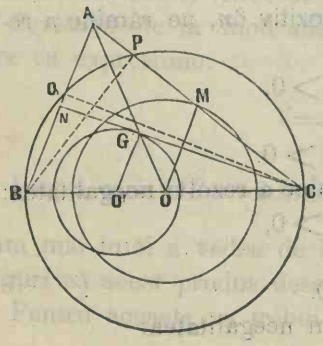
***Problema 39.**—*Într'un triunghiu ABC, puntele B și C sînt fixe, iar BA de lungime constantă. Să se găsească locul mijocului laturei AC și locul punctului de întîlnire al medianelor; în fine locul picioarelor înălțimilor corespunzătoare laturilor AB și AC.*

(G. Țițeica.)

Soluție dată de D-nii A. Iliovici, (Elev în Clasa VII de la Liceul din Iași), *I. Bucurescu,* (Elev al Școalei Normale superioare din București), *G. Iliovici,* (Elev în clasa V de la Liceul din Iași) și *Gr. N. Makarie,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

1°. Fie M mijlocul laturei AC și O al laturei BC. Dreapta OM unind mijlocurile laturilor BC și AC este paralelă cu AB, și încă:

$$OM=\frac{AB}{2}=\text{const.}$$



Așa dar, punctul M descrie un cerc de centru O și avînd o rază egală cu jumătatea lui AB.

2°. Fie G punctul de întîlnire al medianelor. Se știe, că:

$$\frac{OG}{OA}=\frac{1}{3}.$$

Să ducem prin G o paralelă la AB, care întîlnește pe BC în O'. Avem:

$$\frac{OO'}{OB}=\frac{1}{3}.$$

deci puntul O' este fix; și pentru-că:

$$\frac{O'G}{AB}=\frac{1}{3},$$

de unde: $O'G=\frac{AB}{3}=\text{const.}$

rezultă, că punctul G descrie o circonferință de centru O' și de rază $\frac{AB}{3}$.

3°. Fie P și Q picioarele înălțimilor în cestiune. Unghiurile BPB și BQC fiind drepte și punctele B, C fixe, rezultă că locul punctelor P și Q este un același cerc descris pe BC ca diametru.

Observațiune. — Punctul C fiind fix și punctul A descriind o curbă oare-care, un punct care împarte pe CA într'un raport constant descrie o curbă omotetică cu cea descrisă de A, centrul de omotetie fiind în C.

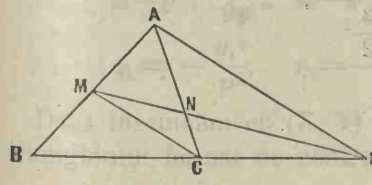
Notă. D-nii *C. S. Stănulescu* și *N. Trandafirescu* au rezolvit problema cu ajutorul geometriei analitice. O soluțiune analitică a fost dată și de D-l *Gr. N. Makarie.*

***Problema 44.** — *Se dă un triunghiu ABC. Se prelungește latura BC cu o lungime CC'=BC. Se unește punctul C' cu mijlocul M al laturei AB. Dreapta MC' întîlnește pe AC în N. Să se determine raportul* $\frac{AN}{NC}$.

(G. Țițeica.)

Soluție dată de D-nii I. Bucurescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București); *A. Iliovici, C. Popovici* și *C. N. Răileanu,* (Elevi în Clasa VII de la Liceul Național din Iași); *N. Negoescu,* (Rîmnicul-Vîlcei); *C. Popescu,* (Elev în Clasa IV a Școalei Normale de Institutori din Bucuresci); *C. Ionescu* și *C. Virgiliu,* (Sergenți în Regimentul I de Geniu); *C. S. Stănulescu* și *N. Trandafirescu,* (Elevi ai Școalei de Poduri și Șosele).

Să unim punctul A cu C'. In triunghiul ABC' dreptele AC și MC' sînt mediane. Punctul lor de intersecție N, fiind centrul de greutate al triunghiului ABC', avem:



$$\frac{AN}{NC}=2.$$

Soluție dată de D-nii A. Iliovici, (Elev în Clasa VII de la Liceul din Iași); *C. Mateiescu,* (Elev în Clasa VI de la Liceul din Craiova) ; *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V de la Liceul din Iași) ; *I. P. Rădulescu,* (Focșani) ; *N. Trandafirescu,* (Elev în anul preparator al Școalei de Poduri și Șosele) și *I. Tutuc,* (Student, București).

Se aplicăm teorema lui *Menelaus* la triunghiul ABC tăiat de transversala MNC'. Avem :

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CC'}{C'B}\cdot\frac{BM}{MA}=1. \qquad (1)$$

Insă : $\frac{CC'}{C'B}=\frac{1}{2}$, $\frac{BM}{MA}=1.$

Deci (1) devine : $\frac{AN}{NC}=2.$

Soluție dată de D-nii I. Penescu, (Elev în Clasa II, gradul II, de la Școala Comercială din București); *C. Popescu,* (Elev în Clasa IV a Școalei Normale de Institutori) și *Al. Bărcăcilă,* (Elev în Clasa VI de la Seminariul Nifon din București).

Să unim punctul C cu M și C' cu A. Dreptele MC, AC' sînt paralele și prin urmare triunghiurile asemenea NMC, NC'B și ABC'. MBC ne dau :

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AC'}{MC}, \text{ și } \frac{AC'}{MC}=\frac{BC'}{BC}=2.$$

Deci : $\frac{AN}{NC}=2.$

Soluție dată de D-l Gr. N. Makarie, (Elev al Școalei de Poduri și Șosele). Fie P mijlocul laturei AC. Să punem $BC=a$, $AC=b$. Triunghiurile asemenea NCC', NPM ne dau :

$$\frac{NC}{a}=\frac{\frac{b}{2}-NC}{\frac{a}{2}},$$

de unde: $NC=\frac{b}{3}.$

Prin urmare : $$\frac{AN}{NC}=\frac{b-\frac{b}{3}}{:\frac{b}{3}}=2.$$

Problema 46.— *Pe o parabolă dată ce iau trei puncte A, B, C, astfel că normalele în aceste puncte să se întîlnească într'un punct N. Să se determine locul centrului de greutate al triunghiului format de centrele de curbură ale parabolei în punctele A, B și C cînd punctul N se mișcă pe un cerc cu centrul în focarul parabolei și cu o rază egală cu parametrul ei.*

R_1, R_2, R_3 *fiind razele de curbură în A, B, C, să se demonstreze relația :*

$$\pm\sqrt{\left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}\pm\sqrt{\left(\frac{R_2}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}\pm\sqrt{\left(\frac{R_3}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}=0,$$

p fiind parametrul parabolei.

(Bogdan Ionescu.)

Soluție dată de D-l Demetru Negulescu, (Student, București).

Fie $y^2=2px$ ecuația parabolei, (α, β) coordonatele punctului N și (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) coordonatele punctelor *A, B, C.* Condiția ca normala într'un punct (x, y) a parabolei să treacă prin punctul N (α, β), ne dă egalitatea

$$\beta-y=-\frac{y}{p}\left(\alpha-\frac{y^2}{2p}\right), \quad \text{sau} \quad y^3-2p(\alpha-p)y-2p^2\beta=0. \qquad (1)$$

Ordonatele y_1, y_2, y_3, fiind rădăcini ale ecuației (1), avem:

$$\left.\begin{array}{c} y_1+y_2+y_3=0, \\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=-2p(\alpha-p), \\ y_1y_2y_3=2p^2\beta. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Coordonatele centrelor de curbură în *A, B, C* au ca valori:

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_1=p+\frac{3y_1^2}{2p}, & \xi_2=p+\frac{3y_2^2}{2p}, & \xi_3=p+\frac{3y_3^2}{2p} \\ \eta_1=-\frac{y_1^3}{p^2}, & \eta_2=-\frac{y_2^3}{p^2}, & \eta_3=-\frac{y_3^3}{p^2}. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Dacă însemnăm cu (X, Y) coordonatele centrului de greutate a triunghiului format de centrele de curbură în A, B, C, avem :

$$X=p+\frac{1}{2p}(y_1^2+y_2^2+y_3^2), \quad Y=-\frac{1}{3p^2}(y_1^3+y_2^3+y_3^3).$$

Cu ajutorul egalităţilor (2) găsim :

$$y_1^2+y_2^2+y^2{}_3=4p(\alpha-p), \qquad y_1^3+y_2^3+y_3^3=6p^2\beta,$$

şi prin urmare vom avea :

$$X=2\alpha-p, \qquad Y=-2\beta. \tag{4}$$

Ecuaţia cercului pe care se mişcă punctul N fiind :

$$\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^2+\beta^2=p^2, \tag{5}$$

locul căutat se va obţine eliminînd pe α şi β între ecuaţiele (4) şi (5), ceea ce ne dă cercul :

$$X^2+Y^2=4p^2.$$

Expresia razei de curbură în punctul (x, y) al parabolei date, este :

$$R=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

de unde scoatem :

$$y=\pm p\sqrt{\left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}.$$

Aplicînd această formulă la punctele A, B, C, şi observînd că suma ordonatelor lor e zero, obţinem :

$$\pm\sqrt{\left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}\pm\sqrt{\left(\frac{R_2}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}\pm\sqrt{\left(\frac{R_3}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-1}=0.$$

PROBLEME PROPUSE

*94. Să se construească un triunghiu conoscîndu-se diferenţa unghiurilor B şi C, distanţa de la vîrful A la punctul de întîlnire al înălţimilor şi diferenţa segmentelor determinate pe latura BC de către înălţimea ce pleacă din A.

(V. CRISTESCU.)

*95. Să se demonstreze că expresiunea :

$$(x+y)^{2x-1}+(x+y)^{2y-1}-2$$

este divizibilă prin $(x+y-1)^2$; x și y fiind două numere întregi pozitive.

(I. MOSCUNA.)

96. Fie P un punct oare-care al dreptei ce unește mijloacele laturilor AB, AC ale unui triunghiu ABC. Dreptele BP, CP întîlnesc laturile AB, AC în punctele α, β. Să se determine învălitoarea dreptei $\alpha\beta$.

(BOGDAN IONESCU.)

*97. Să se arăte că numărul:

$$2^{8n+3}.3.5^{2n+1}+2^{2n+3}.3^{n+1}.7^n+127^n.3^{n+1}.5^{n+2}-2^4.3.5^n-5^2.3^{2n+1}$$

este totdeauna divizibil prin 1896. Numărul întreg n nu poate fi egal cu zero.

(G. ȚIȚEICA.)

*98. Să se determine progresiunea geometrică cu numărul minim de termini, dintre care face parte și $\frac{1}{12}$, și care să aibă ca prim termin pe $\frac{4}{151875}$ și ca ultim termin pe $\frac{11390625}{768}$.

(GR. N. MAKARIE.)

*99. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x^3-xy+y=0.$$

(C. POPOVICI.)

*100. In anul acesta (1896), serbătorile Paștelui au căzut în același timp la toți creștinii. Peste cîți ani se va mai întîmpla această coincidență?

(I. IONESCU.)

*101. Să se afle condiția ce trebue să îndeplinească α, pentru ca sistemul:

$$y^2+z^2=\alpha+x^2+2xy,$$
$$x+y+z+1=0,$$

să aibă o infinitate de soluțiuni întregi, și să se rezolve sistemul.

(BOGDAN IONESCU.)

102. Fie AA' un diametru al unei circonferențe cu centrul O și M un punct al acestei curbe. Prin punctul O se duce o paralelă

la dreapta A'M, care întîlneşte perpendiculara scoborîtă din M pe AA', într'un punct N. Se cere locul punctului N.

(G. Ţiţeica.)

*103. Să se afle limita către care tinde raportul dintre arcele interceptate pe o circonferinţă, de laturile unui unghiu, cînd una din laturile unghiului rămînînd fixă, cealaltă se apropie indefinit de dînsa.

(I. Moscuna.)

*104. Să se afle în mod elementar, valoarea lui x care face ca polinomul:

$$y=x^4-10x^3+25x^2-36$$

să aibă cea mai mare valoare, precum şi care e acea valoare.

(Gr. N. Makarie.)

*105. Să se demonstreze că coarda determinată pe înălţimea corespunzătoare laturei BC a unui triunghiu, de către cercul înscris, e văzută din centrul cercului sub un unghiu 0 dat de formula:

$$\cos\frac{1}{2}0=\pm\frac{\sin B-\sin C}{1+\cos A}.$$

Să se arate cum trebue modificată formula pentru cercurile ex-înscrise, şi să se deducă că corzile determinate pe acea înălţime de cercurile ex-înscrise unghiurilor B şi C sînt proporţionale cu razele acestor cercuri.

(V. Cristescu.)

106. Să se determine distanţa unui punct luminos, la centrul unei sfere (punctul fiind exterior), ast-fel ca produsul cantităţei de lumină primită de sferă, prin suprafaţa luminată, să fie maximum.

(Constanţa Pompilian.)

*107. Să se găsească, fără a se face împărţirea, cîte cifre are perioada fracţiunei zecimale echivalente cu: $\frac{1}{32743}$.

(C. Miclescu.)

Problemele însemnate cu * se pot rezolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior:

1) Articolul trimes de D-l *A. Fijie.*

2) Probleme propuse de D-nii *Bogdan Ionescu, Gr. N. Makarie, C. Miclescu* și *I. Moscuna.*

3) Probleme rezolvite de D-nii: *I. Atanasiadi* (91, 93); *A. Bărcăcilă* (48, 73); *A. Iliovici* (41, 45, 47, 48, 51, 52, 56, 57, 59, 60, 61, 67, 70, 72, 73, 75, 79, 82, 86, 89, 91, 92, 93); *G. Iliovici* (41, 45, 48, 57, 59, 60, 61); *D. Ioachimescu* (41, 55, 73); *Alex. Ionescu* (72); *Bogdan Ionescu* (40, 49, 50, 54, 64, 65, 68, 71, 74, 78, 91); *Gr. N. Makarie* (47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 60, 61, 63, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 93); *M. Mateescu* (69); *C. Mateiescu* (60, 67, 69, 70, 72, 82, 83, 89); *C. Miclescu* (58); *I. Moscuna* (71, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93); *N. Negoescu* (47, 52, 53, 59, 60, 61); *D. Negulescu* (49, 50, 60, 68, 71, 78); *B. Paraschivescu* (48, 66, 69, 72, 89, 93); *I. Penescu* (91, 93); *D. Poenaru* (83); *C. Popescu* (45, 60, 61, 66, 69, 70, 83, 87); *C. Popovici* (45, 57, 66, 70, 73, 79, 86, 89, 93); *C. Rădulescu* (73); *I. P. Rădulescu* (47, 49, 53, 59, 60); *L. I. Rădulescu* (79), *C. N. Răileanu* (41, 45, 48, 57, 61, 73); *L. Scherer* (75); *C. S. Stănulescu* (60); *I. Stroescu* (16, 62); *N. Trandafirescu* (50, 64, 68, 70, 72).

Probleme nerezolvite: 22, 23, 24, 54, 76, 77, 80, 84, 85, 88.

Înștiințare. Din cauza abundenței de materie, am fost nevoiți să întrerupem în numărul acesta continuarea articolului: *Instrumente logaritmice.— Rigla de calcul.*

Erata.—Pagina 160, rîndul 15 de jos, în loc de 91, a se pune *91.

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București, sau D-lui G. Țițeica, Profesor, Calea Rahovei, 46, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 a fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.