GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 9. MAIU 1896.

SUMARUL

1. Asupra cantităților complexe . . . . . *D. Emmanuel*
2. Instrumente logaritmice.—Rigla de calcul. *Z.*
3. O proprietate a cercurilor ortogonale . . *A. Jijie*
4. Probleme rezolvite 16, 40, 41, 45, 47, 48, 49, 50, 60, 64.
5. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacția *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane:

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanța, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Țițeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

ASUPRA CANTITĂȚILOR COMPLEXE

(Conferință ținută la Școala Normală Superioară).

Afară de cantitățile pozitive și negative, cărora li se pot aplica operațiunile aritmetice cunoscute, se pot introduce o infinitate de alte cantități cărora să li se aplice diferite operațiuni după definițiunea și ipotezele făcute asupra lor.

Să introducem cantitatea $a+bi$, unde i este un simbol abstract, absolut nedeterminat, iar a și b două numere reale aritmetice. Expresiunea $a+bi$ poartă numele de cantitate complexă, și i se zice că este o unitate diferită de unitatea reală. Să alegem expresiunea precedentă așa în cît calculele aritmetice să se aplice acestor cantități. Ast-fel fiind, nu poate exista o relațiune:

$$m+ni=0,$$

fără ca

$$m=0,\ n=0,$$

căci, ar urma ca i să se poată exprima cu unități reale.

Așa dar, prin definițiune $a+bi$ este egală cu zero, cînd:

$$a=0,\ b=0.$$

Să definim acum operațiunile făcute cu aceste cantități.

Adunarea.— Definim adunarea a două cantități complexe $a+bi$ și $a'+b'i$ prin următoarea egalitate:

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i.$$

De aci rezultă imediat, că daca A și B sînt două cantități complexe, avem:

$$A+B\equiv B+A,$$

adică, adunarea acestor cantități, este ca și acea a cantităților reale, o operațiune *comutativă*.

Scăderea. — In acelaș mod, definim scăderea prin egalitatea:

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i.$$

Deci, pentru două cantități complexe A și B, avem identitatea:

$$(A-B)+B\equiv A.$$

Pănă acum, în cele două operațiuni precedente, n'am făcut nici o restricție asupra lui i.

Imulțirea.— Avem prin definițiune:

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+(ab'+ba')i+bb'i^2.$$

Pănă acum, suma și diferința a două cantități complexe au fost

de acelaș fel cu acele cantități. Să facem ca și produsul să fie de acelaș fel. Pentru aceasta va trebui, ca:

$$(1) \qquad i^2=\alpha+\beta i,$$

unde α și β sînt cantități reale. Deci:

$$(2) \qquad (a+b)(a'+b'i)=aa'+bb'\alpha+(ab'+ba'+bb'\beta)i.$$

Alegerea cantităților α și β caracterizează unitatea i. Acele cantități α și β nu sînt cu totul arbitrare; ele sînt supuse la o condițiune. In adevăr, dacă considerăm ecuațiunea dedusă din (1)

$$i^2-\beta i-\alpha=0,$$

va trebui ca ea să aibă rădăcinile imaginare, căci alt-fel, i s'ar putea exprima cu cantități reale. Avem deci condițiunea:

$$(3) \qquad \beta^2+4\alpha < 0,$$

de unde rezultă că α este o cantitate negativă.

Egalitatea (2) arată că dacă permutăm factorii, produsul nu se schimbă.

Să arătăm acum, că un produs de doui factori nu este nul de cît dacă unul din factori este nul.

In adevăr, pentru ca produsul (2) să fie nul va trebui ca:

$$aa'+b\alpha.b'=0,$$
$$ba'+(a+b\beta)b'=0.$$

Ca să demonstrăm proprietatea, ar trebui să arătăm că egalitățile precedente nu sînt satisfăcute, de cît dacă $a=0$, $b=0$, sau dacă $a'=0$, $b'=0$. Pentru aceasta ar trebui ca determinantul:

$$\begin{vmatrix} a & b\alpha \\ b & a+b\beta \end{vmatrix} = a^2+ab\beta-b^2\alpha,$$

să fie diferit de zero pentru ori-ce valori ale lui a și b, afară de

$$a=0,\ b=0.$$

Va trebui deci, ca:

$$b^2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\beta\frac{a}{b}-\alpha\right] \neq 0,$$

deci:

$$\beta^2+4\alpha<0,$$

adică tocmai condițiunea (3). Așa dar, dacă condiția (3) este satisfăcută, un produs de doi factori nu e nul de cît dacă unul din ei este nul.

Consecințe.— A, B, C fiind niște cantități complexe, avem:

$$(AB)C=(AC)B,$$

și

$$(A+B)\,C=AC+BC.$$

Așa dar, înmulțirea este o operațiune *comutativă* și *distributivă*.

Impărțirea.— Dacă vrem ca citul să fie de aceiași formă, împărțirea este definită de egalitatea:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=c+di,$$

de unde

$$a+bi=(ca'+db'\alpha)+(cb'+da'+db'\beta)i,$$

și de aci

$$a'c+\alpha b'd=a,$$
$$b'c+(a'+\beta b')d=b.$$

Aceste ecuațiuni dau un sistem unic de valori pentru c și d căci determinantul

$$\begin{vmatrix} a' & \alpha b' \\ b' & a'+\beta b' \end{vmatrix}$$

este diferit de zero, în virtutea inegalității (3).

Rezultatul împărțirei intră deci în același tip ca și termenii săi.

Observațiune.— 1° Putem particulariza, și să alegem pentru α și β cari caracterizează unitatea complexă, niște valori simple.

In particular, dacă

$$\beta=0 \text{ și } \alpha=-1,$$

valori pentru cari inegalitatea (3) este satisfăcută, unitatea este definită de

$$i^2=\alpha+\beta i=-1,$$

adică tocmai cantitățile imaginare ordinare. In acest caz rezultatele sînt mai simple.

2°.— Gauss a fost primul, care a încercat să generalizeze cantitățile imaginare. După aceasta, Weierstrass, a considerat mai general cantități complexe cu n unități. Fie e_1, e_2,..., e_3, n simboale; o cantitate complexă va fi de forma:

$$a_1e_1+a_2e_2+.....+a_ne_n.$$

Pentru aceste cantități operațiunile și proprietățile lor se complică, și iau un caracter cu totul deosebit de acela al cantităților reale.

D. Emmanuel.

INSTRUMENTE LOGARITMICE.—RIGLA DE CALCUL

(Urmare)

4) Cuburi și rădăcini cubice.

Cubul unui număr se află efectuînd operațiunea

$$A^2 \times A = A^3,$$

adică, după ce se aduce liniuța cu indexul stîng sau drept, în dreptul numărului dat A, citit pe scara inferioară a liniei, cubul A^3 se citește pe scara superioară a liniei, în dreptul numărului A citit pe scara superioară a liniuței. (fig. 26, planșa I din No. 6 al *Gazetei Matematice*).

Se va aduce indexul drept al liniuței în dreptul numărului dat, ori de cîte ori numărul dat este mai mare ca $\sqrt[3]{100}=4{,}64$, în care caz rezultatul ar cădea dincolo de al treilea index al scării superioare, dacă am întrebuința indexul stîng.

Pentru a ști numărul cifrelor cubului unui număr, avem următoarea regulă:

Dacă n este numărul cifrelor numărului dat A, atunci cubul său A^3 va avea :

$3n-2$ cifre, dacă cubul se citește pe întâia scară superioară a liniei
$3n-1$ » » » » » » a doua » » » »
$3n-0$ » dacă întrebuințăm indexul drept al liniuței, în care caz cubul se citește pe a doua scară superioară.

Tabloul următor clarifică și mai mult această regulă:

[1]) Intrebuințind indexul stîng, rezultatul se citește pe întâia scară superioară.

Numărul dat A	Num. cifrelor num. dat	Numărul cifrelor cubului.	Cubul A^3
20	2	$3\times2-2=4$	8000
2	1	$3\times1-2=1$	8
0.2	0	$3\times0-2=-2$	0.008
0.02	$\overline{1}$	$3\times(-1)-2=-5$	0.000008
0.002	$\overline{2}$	$3\times(-2)-2=-8$	0.000000008

[2]) Intrebuințînd indexul sting, rezultatul se citește pe a doua scară superioară.			
40	2	3×2 —1= 5	64000
4	1	3×1 —1= 2	64
0.4	0	3×0 —1=—1	0.064
0.04	$\overline{1}$	3×(-1)—1=—4	0.000064
0.004	$\overline{2}$	3×(-2)—1=—7	0.000000064

[3]) Intrebuințînd indexul drept al liniuței			
50	2	3×2 = 6	125000
5	1	3×1 = 3	125
0.5	0	3×0 = 0	0.125
0.05	$\overline{1}$	3×(-1)=—3	0.000125
0.005	$\overline{2}$	3×(-2)=—6	0.000000125

Pentru extragerea rădăcinei cubice se face operația inversă celei precedente, adică se aduce cursorul în dreptul numărului dat citit pe scara superioară a liniei și apoi se deplasează liniuța pînă cînd citim, în acelaș timp, același număr atît pe scara superioară a liniuței în dreptul cursorului, cît și pe scara inferioară a liniei în dreptul indexului sting sau drept al liniuței. Pentru a ști pe care din cele două scări superioare trebue să citim numărul dat și în dreptul cărui index al liniuței să citim rezultatul, avem următoarea regulă:

Se împarte numărul dat în grupe de cîte 3 cifre începînd de la dreapta spre stînga la numerile întregi, și de la virgulă spre dreapta la cele zecimale fără întregi; dacă prima grupă de la stînga (la numerile întregi, iar la cele zecimale, prima grupă după virgulă, formată din cifre însemnătoare) este formată dintr'o singură [1]) cifră, (unimi) atunci vom însemna cu cursorul, numărul dat pe întăia scară superioară a liniei, și vom citi rezultatul în dreptul indexului sting; dacă prima grupă e formată din două cifre (unimi și zecimi) vom însemna numărul dat pe a doua scară superioară, iar rezultatul

[1]) Trebue să se dea atenție la socotirea numărului cifrelor primei grupe, ast-fel:

Prima grupă a numerilor 600000, 0.000600, și 0.000650, e formată din trei cifre (unimi, zecimi, sutimi); prima grupă a numerilor 60000, 0.00006 și 0.000065 e formată din două cifre (unimi, zecimi); iar prima grupă a numărului 0.000006 e formată dintr'o singură cifră (unimi).

îl vom citi tot în dreptul indexului stîng ; iar dacă prima grupă e formată din 3 cifre (unimi, zecimi și sutimi), atunci vom însemna numărul dat pe a doua scară superioară, iar rezultatul îl vom citi în dreptul indexului drept al liniuței.

Numărul cifrelor rădăcinei cubice, va fi egal cu numărul grupelor în care s'a împărțit numărul dat, considerînd, ca și la rădăcini pătrate, fie-care grup de cîte 3 zeruri, de la dreapta virgulei numerilor zecimale, ca un grup negativ, grup care ne dă prin urmare o cifră negativă la rădăcină.

Următorul tablou clarifică această regulă :

Numărul dat A	Grupe	Numărul dat se va însemna pe scara	Rezultatul se va citi în dreapta indexului	Grupe = numărul cifrelor rezultatului	Rezultatul $\sqrt[3]{A}$
640000	640'000	a doua	drept	2	86,3
64000	64'000	» »	stîng	2	40
6400	6'000	întăia	»	2	18,6
640	640	a doua	drept	1	8,63
64	64	» »	stîng	1	4
6.4	6'.400	întăia	»	1	1,86
0.64	0'.640	a doua	drept	0	0.863
0.064	0'.064	» »	stîng	0	0.4
0.0064	0 .006'.400	întăia	»	0	0.186
0.00064	0 .000' 640	a doua	drept	—1	0.086
0.000064	0 .000' 064	» »	stîng	—1	0.04
0.0000064	0 .000'006'400	întăia	»	—1	0.018

5) Puterea și rădăcina a patra.

Puterea a patra a unui număr A se află efectuînd operația :

$$(A \times A)^2 = A^4$$

adică puterea a patra se citește pe scara superioară în dreptul rezultatului înmulțirei A×A, efectuată pe scara inferioară (fig. 27).

Se înțelege că această înmulțire se face, conform regulelor date, întrebuințînd indexul stîng sau drept al liniuței (fig. 28).

Daca n este numărul cifrelor numărului dat, atunci regula pentru aflarea numărului cifrelor puterei a patra se poate rezuma în următorul tablou :

Dacă întrebuinţăm indexul	şi rezultatul (puterea a patra) cade pe:	Atunci numărul cifrelor puterei a patra este egal cu:
stîng al liniuţei	întăia scară superioară	$4n-3$
» » »	a doua » »	$4n-2$
drept » »	întăia » »	$4n-1$
» » »	a doua » »	$4n-0=4n$

Tabloul următor clarifică această regulă :

Numărul dat A	Se va întrebuinţa indexul	Rezultatul cade pe scara	Numărul cifrelor		Puterea a patra A^4
			numărului dat	rezultatului	
15	stîng	I-a	2	$4\times2-3=5$	50625
1,5	»	I-a	1	$4\times1-3=1$	5,0625
0.3	stîng	II-a	0	$4\times0-2=-2$	0,0081
0.03	»	II-a	1	$4\times(-1)-2=-6$	0,00000081
50	drept	I-a	2	$4\times2-1=7$	6250000
0,5	»	I-a	0	$4\times0-1=-1$	0,0625
7	drept	II-a	1	$4\times1=4$	2401
0,007	»	II-a	2	$4\times(-2)=-8$	0.000000002401

Pentru aflarea rădăcinei a patra a unui număr (fig. 29) se face operaţiunea inversă celei precedente ($M=\sqrt[4]{A}$), adică se aduce cursorul în dreptul numărului dat A^4, citit pe scara superioară a liniei, şi apoi se deplasează liniuţa pănă cînd citim, în acelaş timp, acelaş număr — rădăcina căutată — atît pe scara inferioară a liniuţei în dreptul cursorului, cît şi pe scara inferioară a liniei în dreptul unuia din cele două indexe (stîng saŭ drept) ale liniuţei.

Pentru a şti pe care din cele două scări superioare ale liniei trebue să citim numărul dat, precum şi de care din cele două indexe ale liniuţei trebue să ne servim pentru aflarea rădăcinei, pe de o parte, ear pe de alta de a şti numărul cifrelor rădăcinei, avem următoarea regulă:

Se împarte numărul dat în grupe de câte patru cifre, după aceleași norme, ca la rădăcini pătrate și cubice. Numărul cifrelor rădăcinei a patra, va fi egal cu numărul grupelor ast-fel separate, ear :

Dacă Numărul cifrelor primului grup de la stânga este	Numărul dat se va însemna cu cursorul pe	Iar rezultatul se va citi în dreptul indexului
1	întâia scară superioară	sting al liniuței
2	a doua « «	« « «
3	întâia « «	drept « «
4	a doua « «	« « «

Tabloul următor clarifică și mai mult această regulă:

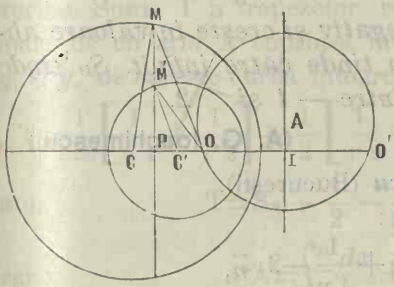
Numărul dat A	GRUPE	Numărul cifrelor primului grup	Numărul dat se va însemna cu cursorul pe scara	Rezultatul se citește în dreptul indexului	Numărul cifrelor rezultatului	Rezultatul $M=\sqrt[4]{A}$
50625	5'0625	1	întâia	sting	2	15
0,00050625	0,0005'0625	1	«	«	0	0.15
810000	81'0000	2	a doua	sting	2	30
0,00000081	0,00 0'0081	2	«	«	1	0.03
625	625	3	întâia	drept	1	5
0.0625	0,'0625	3	»	«	0	0.5
0,2401	0,'2401	4	a doua	drept	0	0.7
0.00002401	0,0000'2401	4	«	«	1	0.07

(Va urma) Z.

O PROPRIETATE A CERCURILOR ORTOGONALE

Să considerăm două cercuri C, C' interioare unul altuia, ale căror raze sînt R, r și fie O și O' cele două puncte fixe, situate pe linia centrelor, pe unde trec toate cercurile ce taie ortogonal cele două

cercuri date C, C'. Să considerăm apoi punctele M și M' unde o perpendiculară oare-care, dusă la linia centrelor CC', întîlnește cele două cercuri date și să unim punctele M și M' cu unul din cele două puncte fixe O și O, cu punctul O spre exemplu.



Triunghiul OCM ne dă:

$$\overline{OM}^2=\overline{OC}^2+R^2-2OC\times CP$$
$$=\overline{OC}^2+R^2-2OC\,(OC-OP),$$

sau $\overline{OM}^2=R^2-\overline{OC}^2+2OC\times OP$. (1)

Insă după o propietate cunoscută a cercurilor ortogonale, avem:

$$R^2=OC\times O'C,$$

și înlocuind în (1) obținem:

$$\overline{OM}^2=OC\,(O'C-OC+2OP)=OC\,(OO'+2OP). \quad (2)$$

Dacă I este mijlocul segmentului OO', avem:

$$OO'+2OP=2IO+2OP=2\,(IO+OP)=2IP,$$

și prin urmare egalitatea (2) devine:

$$\overline{OM}^2=2OC\times IP. \quad (3)$$

Triunghiul OC'M' ne va da în mod analog:

$$\overline{OM'}^2=2OC'\times IP. \quad (4)$$

Impărțind egalitatea (3) prin (4), obținem:

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2}=\frac{OC}{OC'}=\text{const.} \quad (5)$$

In mod identic se poate stabili de asemenea că:

$$\frac{\overline{O'M}^2}{\overline{O'M'}^2}=\frac{O'C}{O'C'}=\text{const.} \quad (6)$$

Putem deci enunța următoarea teoremă [1]):

Pe linia centrelor a două cercuri interioare unul altuia, există două puncte, și numai două, așa că distanțele fie-cărui din ele la extremitățile unei coarde comune MM' perpendiculară pe linia centrelor, sînt într'un raport constant.

A. Jijie.

[1]) Această teoremă reesă din o problemă de algebră publicată în *Giornale di Matematiche* de sub direcția lui *G. Battaglini.*

PROBLEME REZOLVITE

Problema 16.— Fie:

$$(1) \qquad S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Să se arate: 1) *Că S_n este negativ și crește în valoare absolută cînd n crește;* 2) *dacă n tinde către infinit, S_n tinde către o limită finită cuprinsă între* -1 *și* 2.

(A. G. Ioachimescu.)

Soluție dată de D-l I. Stroescu (București).

1) Formînd pe S_{n-1} se vede că:

$$S_n = S_{n-1} + 2\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n},$$

Insemnînd cu:

$$u_n = 2\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n},$$

avem:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} - 2\sqrt{1} = u_1,$$

$$S_2 = S_1 + u_2 = u_1 + u_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(2) \qquad S_n = S_{n-1} + u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Adică S_n poate fi considerat ca suma unui șir de termeni a căror expresie generală este:

$$(3) \qquad u_n = \frac{2\sqrt{n(n-1)} - (2n-1)}{\sqrt{n}}$$

Se observă, că numărătorul acestei fracțiuni, este diferența între media geometrică și media aritmetică a numerilor pozitive $2n$ și $2n-2$, diferență tot-deauna negativă, după cum se știe. Toți termenii șirului (2) sînt < 0, așa dar S_n este negativ și crește în valoare absolută, cînd n crește; valoarea lui S_1 fiind -1 rezultă:

$$(4) \qquad |S_n| > 1.$$

2) Numitorul lui u_n din (3) crește evident împreună cu n. Numărătorul scade în valoare absolută, cînd n crește și $\lim. u_n = 0$, cînd n tinde către infinit, lucru ce se poate ușor demonstra. In acest din urmă caz, șirul (2) devine o serie, a cărei convergență se poate arăta, *indirect*, în modul următor.

Consider în coordonate rectangulare ramura de curbă:

$$y=\frac{1}{+\sqrt{x}}.$$

Duc ordonatele y_1, y_2,.....,y_n corespunzătoare absciselor $x=1$, $x=2$,.... $x=n$, și unesc două cîte două extremitățile ordonatelor vecine. Suma T a trapezelor rectilinii, astfel formate, este mai mare de cît aria A coprinsă între axa $0x$ și ordonatele extreme y_1 și y_n, de oare-ce curba întoarce convexitatea către axa $0x$. Insă:

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]+....+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

sau:
$$T=S_n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+2\sqrt{n}.$$

ear:
$$A=\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{n}-2.$$

Prin urmare:
$$S_n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+2\sqrt{n}>2\sqrt{n}-2,$$

sau:
$$S_n>-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

și *a fortiori:*
$$S_n>-\frac{3}{2},$$

sau : (5)
$$|S_n|<\frac{3}{2}.$$

Așa dar cînd n tinde către infinit, valoarea absolută a lui S_n crește mereu, rămînînd însă inferioară cantității $\frac{3}{2}$. Rezultă dar ca S_n are o limită finită și această limită este coprinsă după (4) și (5) între -1, și $-\frac{3}{2}$.

Metoda foarte elegantă întrebuințată de D-l Stroescu pentru a arăta convergența seriei (2), este bazată pe teorema lui Cauchy, relativă la aplicarea integralelor definite pentru a stabili convergența sau divergența serielor. Se poate însă ajunge la acelaș rezultat și *direct.*

In adevăr se poate lesne verifica ca pentru ≥ 2, avem :

$$n-\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}<\sqrt{n(n-1)}<n-\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}$$

prin urmare:

$$\frac{1}{4n\sqrt{n}}<-u_n<\frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Seria al cărui termen general este : $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ este convergentă, deci și seria S_n va fi convergentă. Pe de altă parte avem :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} < \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Deci :

$$\frac{1}{4(\sqrt{2}-1)} < -S_n < \frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

sau : $$0{,}44\ldots < -S_n < 1{,}78\ldots$$

Metoda D-lui Stroescu dă pentru S_n limite mai apropiate 1 și $\frac{3}{2}$.

Notă. — Chestiunea de mai sus, este un caz particular al problemei următoare : *Să se determine valoarea asimptotică a seriei divergente :*

$$1^{\lambda} + 2^{\lambda} + 3^{\lambda} + \ldots + n^{\lambda} + \ldots \qquad (\lambda > -1.)$$

Studiul acestei serii face obiectul unui articol, ce se va publica ulterior în *Gazeta Matematică*. Chestiunea de mai sus corespunde cazului cînd $\lambda = -\frac{1}{2}$.

(A. G. I.)

Problema 40. — *Să se calculeze valoarea integralei definite :*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}. \qquad 0 < p < n.$$

(A. G. Ioachimescu.)

Soluțiune și generalizare date de D-l Bogdan Ionescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București.)

Consider integrala :

$$I' = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\ldots(x-x_n)^{p_n}};$$

în care: $x_1, x_2 \ldots x_n$ sînt niște cantități reale sau complexe, din care nici una nu se află pe partea pozitivă a axei Ox; $p_1, p_2 \ldots p_n$ sînt niște numere întregi pozitive, a căror sumă este mai mare ca p. Integrala I' este evident finită și bine determinată, gradul numitorului fiind cel puțin cu două unități mai mare ca al numărătorului.

Pentru determinarea valorei lui I′ aplic metoda lui *Cauchy*. Consider funcțiunea :

$$f(z)=\frac{z^{p-1}}{(z-x_1)^{p_1}(z-x_2)^{p_2}\ldots(z-x_n)^{p_n}},$$

și iau integrala acestei funcțiuni în lungul unui contur închis format din : Axa $0x$ de la 0 la ∞ (I′), un cerc descris din origină ca centru cu o rază infinit mare (I_1), Axa $0x$ de la ∞ la 0 (I″), în fine un cerc descris din origină ca centru cu rază infinit mică (I_2); avem:

$$I'+I_1+I''+I_2=2\pi i\sum Rez.$$

Or :

$$I_1=0,$$

$$I_2=0.$$

căci: $lim.\ zf(z)=0$ pentru $z=0$ și $z=\infty$.

Numitorul lui $f(z)$ este o funcțiune uniformă, iar numărătorul, dacă p este fracționar, nu este uniform, cînd z descrie un contur închis în jurul originei; argumentul lui z crește cu 2π, iar al lui z^{p-1} cu $(p-1)2\pi$. Avem deci :

$$I''=\int_{\infty}^{o}\frac{e^{2p\pi i}x^{p-1}dx}{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\ldots(x-x_n)^{p_n}}=-e^{2p\pi i}.I'.$$

Prin urmare :

$$(1-e^{2p\pi i})\,I'=2\pi i\sum Rez.$$

Pentru a determina suma reziduurilor, corespunzătoare polurilor:

$$z=x_2,\quad z=x_2\quad\ldots\quad z=x_n$$

respective de ordinul de multiplicitate : $p_1, p_2 \ldots p_n$; pun:

$$A_1=(z-x_1)^{p_1}f(z),$$

$$A_2=(z-x_2)^{p_2}f(z),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n=(z-x_n)^{p_n}f(z),$$

și vom avea :

$$Rez\ f(z)_{z=x_1}=\frac{1}{(p_1-1)!}\left(\frac{\partial^{p_1-1}A_1}{\partial z^{p_1-1}}\right)_{z=x_1}$$

$$Rez\ f(z)_{z=x_2} = \frac{1}{(p_2-1)!}\left(\frac{\partial^{p_2-1} A_2}{\partial z^{p_2-1}}\right)_{z=x_2}$$

. . . . . .

$$Rez\ f(z)_{z=x_n} = \frac{1}{(p_n-1)!}\left(\frac{\partial^{p_n-1} A_n}{\partial z^{p_n-1}}\right)_{z=x_n}$$

Iar :
$$I' = \frac{2\pi i}{1-e^{2p\pi i}}\left[\frac{1}{(p_1-1)!}\left(\frac{\partial^{p_1-1} A_1}{\partial z^{p_1-1}}\right)_{x_1} + \ldots + \frac{1}{(p_n-1)!}\left(\frac{\partial^{p_n-1} A_n}{\partial z^{p_n-1}}\right)_{x_n}\right]$$

Dacă facem :

$$x_1 = -1,\quad x_2 = -2, \ldots x_n = -n,$$
$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1:$$

a) $$I' = I = \frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{1}{(n-1)!}\left[1^{p-1} - \frac{n-1}{1}2^{p-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3^{p-1} - \ldots + (-1)^{n-1}n^{p-1}\right]$$

Dacă p este un număr întreg metoda aceasta nu se mai poate aplica, $f(z)$ este atunci o funcțiune uniformă de z, și $I''=I'$, formula (a) devine iluzorie: $\sin p\pi = 0$, cantitatea din parenteză se anulează asemenea [1]). In cazul acesta se poate calcula valoarea integralei I', prin descompunerea lui $f(z)$ în elemente simple. Aplicînd această descompunere pentru cazul integralei I se găsește, pentru p întreg pozitiv mai mic ca n :

$$I = \frac{(-1)^p}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{1.2.3\ldots(i-1)}\,i^p \log i.$$

D-l D. Negulescu a rezolvit aceiași chestiune, însă numai în cazul cînd p este întreg.

***Problema 41.**— *Un tren e compus din o locomotivă care are 4 roate de cîte 1,734^m diametru și două roate de cîte 1,139^m diametru; din un tender ale cărui roate au 1,216^m diametru, și din vagoane ale căror roate au 1,476^m dia-*

[1]) Problema 65 din No. 6 al *„Gazetei Matematice“*.

Biblioteca Universității Iași

metru. Trenul fiind în mișcare cu o viteză uniformă de 60 klm. pe oră, se consideră (la un moment dat) punctele de contact ale roatelor cu șinele. Se cere a se ști peste cît timp toate punctele de contact considerate se vor găsi din nou pe șine în același timp. (I. Ionescu.)

Soluție dată de D-nii D. Ioachimescu (Ploești); *A. Iliovici* și *C. N. Răileanu,* (Elevi în Clasa VII a Liceului din Iași) și *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași).

Să căutăm mai întâi spațiul percurs de la o coencidență la alta. Acest spațiu va trebui să fie divizibil prin lungimile circonferențelor diferitelor roate. Rezultă de aci că spațiul căutat va fi cel mai mic comun multiplu al lungimilor circonferențelor diferitelor roate. Pentru a ne debarasa de fracțiuni zecimale, să luăm ca unitate de măsură a lungimilor milimetrul.

Circonferențele roatelor vor avea atunci:

1734π, 1139π, 1216π, 1476π, milimetri.

Descompunînd numerele în factori primi vom găsi respectiv:

$2.3.17^2.\pi$, $17.67.\pi$, $2^6.19.\pi$, $2^2.3^2.41.\pi$.

Cel mai mic comun multiplu al acestor numere va fi:

$$2^6.3^2.17^2.19.41.67.\pi.$$

Trenul mergînd cu viteza de 60 klm pe oră sau $60000000^{mm.}$ pe oră, în a suta parte din o secundă va percurge $\frac{60000000}{60\times60\times100}=\frac{1000}{6}$ mm.

Deci distanța de mai sus va fi percursă în

$$\frac{2^6.3^2.17^2.19.41.67.6.\pi.}{1000}$$ sutimi de secundă.

Această expresiune se reduce la următoarea, dacă efectuăm calculele numerice:

$52129533{,}312\pi$. sutimi de secundă.

Dacă voim a avea rezultatul cu o eroare mai mică de cît o unitate întreagă, adică de cît a suta parte din o secundă, vom aplica regula lui *Oughtred* pentru înmulțirea prescurtată. Observînd că numărul produselor parțiale este mai mare ca 10, va trebui să luăm la π un număr de zecimale egal cu $3+7=10$. Dispoziținea deînmulțitului și înmulțitorului va fi:

$$\begin{array}{r} 3{,}1415926535 \\ 21333592125 \\ \hline \end{array}$$

Efectuînd calculele vom găsi 163769759 sutimi de secunde, ceea ce face :

18 zile, 22 ore, 54 minute, 57 secunde și 59 sutimi de secundă.

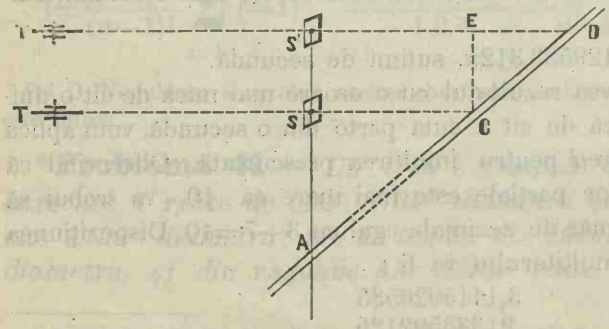
* **Problema 45.** — *Două tunuri T și T' așezate paralel, au gurile lor pe aceiași linie perpendiculară liniei de tragere. In fața fie-cărui tun și la 10380 m. distanță de la gurile lor se află așezate două ținte S și S'. Dincolo de ținte se află un drum. Acest drum întîlnește linia SS' de partea lui S într'un punct A și linia TS într'un punct C, așa fel că AS=300 m. și SC=400 m. Pe acest drum merge o persoană cu viteza de 5 klm. pe oră. Se trag tunurile T și T' în același moment. Dacă acea persoană ar fi stat pe loc, ar fi fost lovită de tunul T, însă ea mergînd a fost lovită de tunul T'. Se cere care era distanța între acele două tunuri și distanța percursă de acea persoană din momentul tragerei pînă în momentul lovirei. Se va admite că viteza proiectului este de 600 m. pe secundă.* (C. Ionescu și C. Virgiliu.)

Soluțiune dată de D-nii A. Iliovici, C. Popovici și *C. N. Răileanu,* (Elevi în Clasa VII a Liceului din Iași); *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași). *C. Popescu,* (Elev în Clasa IV a Școalei Normale de Institutori din București) și *Gr. N. Makarie,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Fie D punctul unde se întîlnesc dreptele T'S' și AC. Triunghiul dreptunghiu ASC ne dă:

$$AC=\sqrt{\overline{AS}^2+\overline{CS}^2}=\sqrt{300^2+400^2}=500.$$

Din punctul C lăsăm perpendiculara CE pe dreapta S'D. Să



însemnăm cu x distanța între tunuri și cu y distanța percursă de persoană (CD). Asemănarea triunghiurilor D E C, ASC ne dă:

$$\frac{DC}{AC}=\frac{DE}{SC}=\frac{CE}{AS'}$$

sau înlocuind liniile prin valorile lor, vom avea:

$$\frac{y}{500}=\frac{DE}{400}=\frac{x}{300},$$

de unde:

$$DE=\frac{4}{3}x, \text{ și } 3y=5x. \qquad (1)$$

Timpul în care proectilul a percurs distanța T'D fiind egal cu timpul în care persoana aceia a venit din C în D, vom avea egalitatea:

$$\frac{T'D}{600}=\frac{CD}{\frac{5000}{3600}},$$

sau înlocuind liniile prin valorile lor avem:

$$\frac{T'S'+S'E+ED}{600}=\frac{36y}{50}.$$

Dar: $T'S'=TS=10380$, $S'E=SC=400$m., $ED=\frac{4}{3}x$.

Inlocuind vom avea:

$$\frac{10380+400+\frac{4}{3}x}{600}=\frac{367}{50},$$

sau reducînd:

$$5390+\frac{2}{3}x=216y.$$

Inlocuind pe y prin valoarea sa scoasă din (1) avem:

$$5390+\frac{2}{3}x=216.\frac{5}{3}y,$$

de unde:

$$16170=1078x,$$

și prin urmare:

$$x=15\,m.$$

Egalitatea (1) ne dă:

$$y=\frac{5}{3}x=25m.$$

Deci distanța dintre tunuri e 15 m, iar drumul percurs de persoană e 25 m.

***Problema 47.**— *Să se determine între ce limite poate varia x pentru ca să avem:*

$$3>\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-3}>0.$$

(A. G. Ioachimescu.)

Soluție dată de D-nii N. Negoescu (Rîmnicul-Vîlcei), *A. Iliovici* (Liceul Național, Iași), *Ioan P. Rădulescu* (Focșani) și *Gr. N. Makarie* (București).

Fie:

$$y = \frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-3} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-3)}.$$

Pentru ca: $y>0$ trebue ca numărătorul și numitorul să fie de același semn. Numărătorul și numitorul sînt în acelaș timp pozitivi pentru: $x>5$ sau $x<-1$.

Numărătorul este negativ, pentru:

$$2<x<5,$$

iar numitorul, pentru:

$$-1<x<3,$$

Prin urmare avem: $y>0$, pentru:

$$(1)\qquad \begin{cases} -\infty<x<-1, & \text{sau} \\ 2<x<3, & \text{sau} \\ 5<x<+\infty. \end{cases}$$

Consider acum inegalitatea:

$$y = \frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-3} > 3,$$

sau ceea ce este același lucru, trecînd pe 3 în membrul întăi și aducînd la același numitor:

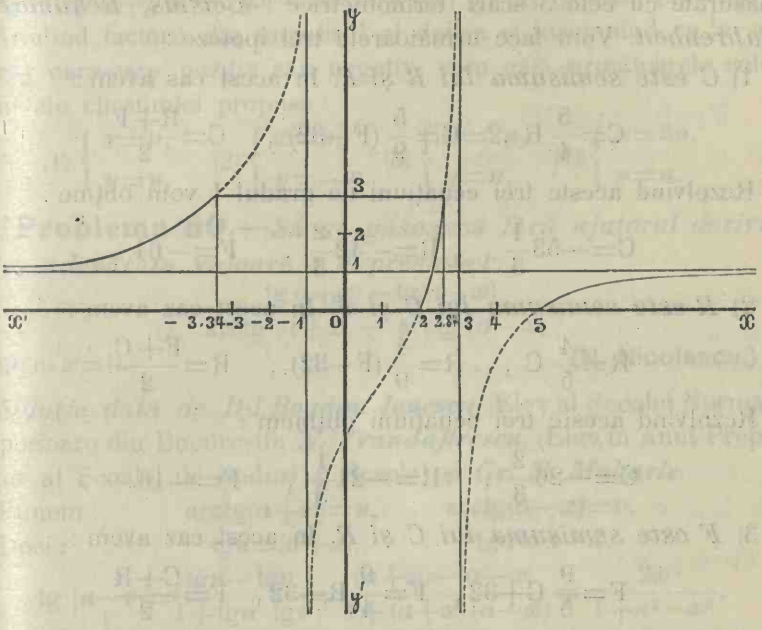
$$\frac{2x^2+x-19}{x^2-2x-3} = \frac{2\left(x+\frac{1-\sqrt{153}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{153}}{2}\right)}{(x+1)(x-3)} > 0.$$

Această inegalitate este satisfăcută pentru:

$$(2)\qquad \begin{cases} -\infty<x<-\frac{1+\sqrt{153}}{2} & \text{sau} \\ \frac{1+\sqrt{153}}{2}<x<+\infty \end{cases}$$

Valorile lui x căutate, care satisfac în același timp uneia oarecare din inegalitățile (1) și uneia din inegalitățile (2), sînt:

$$(3)\qquad \begin{cases} -\infty<x<-\frac{1+\sqrt{153}}{2} = -3,343 \\ 2<x<\frac{-1+\sqrt{153}}{2} = 2,843 \\ 5<x<+\infty \end{cases}$$



Interpretarea geometrică a variațiunei funcțiunei:

$$y=\frac{x^2-7x-10}{x^2-2x-3}$$

este reprezentată prin figura alăturată. Părțile reprezentate cu linii pline, corespund porțiunei de curbă, ale cărei abscise satisfac chestiunei; iar abscisele părței punctate, nu satisfac.

Această reprezentare geometrică este dată de D-l *Gr. Makarie.*

* **Problema 48.**—*O temperatură a fost măsurată cu cele 3 scări termometrice. Celsius, Réaumur și Fahrenheit. Unul din numerile găsite este semisuma celorlalte două. Care poate fi acea temperatură?* (I. Ionescu.)

Soluțiune dată de D-nii: Al. Bărcăcilă, (Elev în Clasa VI a Seminarului Nifon) ; *A. Iliovici* și *C. N. Răileanu,* (Elevi în Clasa VII a Liceului din Iași); *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași) ; *B. Paraschivescu,* (Elev în Clasa VI a Liceului din Ploești) și *C. Mateiescu,* (Elev în Clasa VI de la Liceul din Craiova.)

In cele ce urmează vom însemna cu C, R și F temperaturile

măsurate cu cele 3 scări termometrice : *Celsius*, *Réaumur* și *Fahrenheit*. Vom face următoarele trei ipoteze :

1) *C este semisuma lui R și F.* In acest cas avem :

$$C=\frac{5}{4}R\ ,\quad C=\frac{5}{9}(F-32)\ ,\quad C=\frac{R+F}{2}.$$

Rezolvind aceste trei ecuațiuni de gradul I vom obține :

$$C=-53\frac{1}{3}\ ,\quad R=-42\frac{2}{3}\ ,\quad F=-64.$$

2) *R este semisuma lui C și F.* In acest caz avem :

$$R=\frac{4}{5}C\ ,\quad R=\frac{4}{9}(F+32)\ ,\quad R=\frac{F+C}{2}.$$

Rezolvind aceste trei ecuațiuni obținem :

$$C=-26\frac{2}{3}\ ,\quad R=-21\frac{1}{3}\ ,\quad F=-16.$$

3) *F este semisuma lui C și R.* In acest caz avem :

$$F=\frac{9}{5}C+32\ ,\quad F=\frac{9}{4}R+32\ ,\quad F=\frac{C+R}{2}.$$

Rezolvind aceste trei ecuațiuni obținem :

$$C=-35\frac{5}{9}\ ,\quad R=-28\frac{4}{9}\ ,\quad F=-32.$$

Prin urmare temperatura căutată măsurată cu scara Fahrenheit ar putea fi : -16^0, -32^0, sau -64^0.

***Problema 49.**—*Să se rezolve în numere întregi ecuația:*

$$2y^4-7y^3x+y^2x^2+7yx^3-3x^4=0.$$

(N. Negoescu)

Soluțiune dată de D-nii Bogdan Ionescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București) ; *Gr. N. Makarie,* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele), *D. Negulescu,* (Student, București) și *I. P. Rădulescu,* (Focșani).

Se vede ușor că membrul întâi al ecuației date e divizibil cu $(y-x)$ și $(y+x)$. Făcînd câtul acelui polinom prin $(y+x)(y-x)$ găsim trinomul $2y^2-7yx+3x^2$, ale cărui rădăcini sînt $3x$ și $\frac{x}{2}$.

Deci avem :

$2y^4-7y^3x+y^2x^2+7yx^3-3x^4=(y+x)(y-x)(y-3x)(2y-x)$.

Anulînd factorii din membrul al doilea și însemnînd cu n un întreg oare-care pozitiv sau negativ, vom găsi următoarele soluțiuni ale chestiunei propuse:

(1) $\begin{cases} x=n, \\ y=n, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=n, \\ y=-n, \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=2n, \\ y=n, \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=3n, \\ y=n. \end{cases}$

***Problema 50.**—*Să se găsească fără ajutorul derivatelor adevărata valoare a expresiunei:*

$$\frac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}$$

pentru $x=0$. **(N. Nicolescu.)**

Soluție dată de D-l Bogdan Ionescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București); *N. Trandafirescu,* (Elev în Anul Preparator al Școalei de Poduri și Șosele) și *Gr. N. Makarie.*

Punem: $\operatorname{arctg}(a+x)=u$, $\operatorname{arctg}(a-x)=v$.

Deci: $\operatorname{tg}u=(a+x)$, $\operatorname{tg}a=a-x$.

$$\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}u\ \operatorname{tg}v}=\frac{(a+x)-(a-x)}{1+(a+x)(a-x)}=\frac{2x}{1+a^2-x^2}.$$

Să înmulțim numărătorul expresiunei date cu $\operatorname{tg}(u-v)$ iar numitorul cu cantitatea egală acesteia $\frac{2x}{1+a^2-x^2}$, și să transformăm diferența tangentelor de la numărător în produs, înlocuind și arcele de la numitor cu u și v conform notațiunilor făcute, expresiunea dată se poate scrie:

$$\frac{\sin 2x}{\cos(a+x)\cos(x-a)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(u-v)}{u-v}\cdot\frac{2x}{1+a^2-x^2}=$$

$$\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot\left[\frac{\operatorname{tg}(u-v)}{u-v}\right]\times\left[\frac{1+a^2-x^2}{\cos(a+x)\cos(a-x)}\right].$$

Cînd x tinde către 0, $\frac{\sin 2x}{2x}$ tinde către 1; $\frac{\operatorname{tg}(u-v)}{u-v}$ tinde către 1 căci u și v tind a deveni egali cu $\operatorname{arctg}a$ iar factorul $\frac{1+a^2-x^2}{\cos(a+x)\cos(a-x)}$ tinde către $\frac{1+a^2}{\cos^2 a}$.

Deci adevărata valoare a expresiunei date, pentru $x=0$, este:

$$\frac{1+a^2}{\cos^2 a}.$$

D-l *D. Negulescu* a rezolvit chestiunea cu ajutorul formulei lui *Taylor.*

***Problema 60.**— *Ce valoare trebue să aibă n, ast-fel ca să avem egalitatea:*

$$\text{arc tg}\frac{1}{2n}+\text{arc tg}\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

(I. Ghibaldan.)

Soluție dată de D-nii I. P. Rădulescu, (Focșani); *N. Negoescu,* (Rîmnicul-Vîlcei); *A. Iliovici,* (Elev în clasa VII a Liceului din Iași); *C. S. Stănulescu* și *Gr. N. Makarie,* (Elevi ai Școalei de Poduri și Șosele); *C. Mateiescu,* (Elev în Clasa VI a Liceului din Craiova); *C. Popescu,* (Elev în Clasa IV a Școalei Normale de Institutori din București); *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași) și *D. Negulescu,* (Student, București).

Dacă punem: $\text{arctg}\frac{1}{2n}=a$, $\text{arctg}\frac{1}{2n+1}=b$,

atunci avem: $\text{tg}a=\frac{1}{2n}$, $\text{tg}b=\frac{1}{2n+1}$,

iar egalitatea propusă devine:

$$a+b=\frac{\pi}{4};$$

de unde: $\text{tg}(a+b)=\text{tg}\frac{\pi}{4}$,

sau: $$\frac{\text{tg}a+\text{tg}b}{1-\text{tg}a\,\text{tg}b}=1.$$

Dacă înlocuim pe $\text{tg}a$ și $\text{tg}b$ prin valorile lor, avem:

$$\frac{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n(2n+1)}}=1,$$

de unde obținem ecuația:

$$2n^2-n-1=0,$$

pe care rezolvind-o, găsim pentru n valorile:

$$n'=1, \qquad n''=-\frac{1}{2}.$$

***Problema 64.**— *Să se rezolve ecuația:*

$$(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5.$$

(I. P. Rădulescu.)

Soluție dată de D-nii Bogdan Ionescu, (Elev al Școalei Normale Superioare din București) și *N. Trandafirescu,* (Elev în Anul preparator al Școalei de Poduri și Șosele).

Observăm că primul membru al ecuației:

$$(x+a+b)^5-(x^5+a^5+b^5)=0, \qquad (1)$$

este divizibil prin $(a+b)$, $(x+a)$, $(x+b)$. Ridicînd pe $(x+a+b)$ la puterea a 5-a, terminii în x^5, a^5, b^5 dispar și ecuația devine de gradul al 4-lea. Divizînd apoi polinomul rămas prin produsul $(x+a)(x+b)$, căpătăm cîtul:

$$5(a+b)[x^2+(a+b)x+a^2+ab+b^2],$$

și prin urmare ecuația (1) se poate pune sub forma:

$$(x+a)(x+b)[x^2+(a+b)x+a^2+ab+b^2]=0.$$

Ecuația dată admite deci două rădăcini reale:

$$x_1=-a, \qquad x_2=-b,$$

și două rădăcini imaginare date de ecuația:

$$x^2+(a+b)x+a^2+ab+b^2=0.$$

PROBLEME PROPUSE

108. Să se afle volumul determinat într'un cilindru circular drept de două planuri, unul oblic și altul normal pe generatricele cilindrului. (Em. Davidescu.)

*109. Prin vîrfurile A și C ale unui paralelogram ABCD, se duce o circonferență care întîlnește latura CD într'un punct M. Prin punctele M, B și D se duce o a doua circonferență. Să se determine punctul M așa ca raportul razelor celor două circonferențe să fie un număr dat. (G. Țițeica.)

*110. Fie A_1, A_2, A_3, A_4 unghiurile unui patrulater convex. Se consideră expresia:

$$\left(x-\operatorname{tg}\frac{A_1}{2}\right)\left(x-\operatorname{tg}\frac{A_2}{2}\right)\left(x-\operatorname{tg}\frac{A_3}{2}\right)\left(x-\operatorname{tg}\frac{A_4}{2}\right).$$

Dacă se efectuează produsul indicat, se obține o expresie de forma:

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4.$$

Între coeficienții acestui polinom există o relație; să se găsească acea relație.

Aceiași chestiune înlocuind tangentele prin sinusuri.

(A. G. IOACHIMESCU.)

111. Să se găsească:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^4}.$$

(G. ȚIȚEICA.)

*112. Prin punctul de întîlnire al laturilor neparalele ale unui trapez, se duc paralele la diagonalele sale, care paralele determină cu laturile paralele ale trapezului un nou trapez. Să se demonstreze că punctele de întîlnire ale diagonalelor acestor două trapeze coincid.

(O. ALEXANDRINI.)

113. Să se determine funcțiunile f și φ ast-fel ca ecuația:

$$y'^3+f(y)\,y'+\varphi(x)=0$$

să admită o soluție singulară și să se găsească acea soluție.

(A. G. IOACHIMESCU.)

*114. Se dă un triunghiu dreptunghiu ABC și înălțimea lui AD. Se ia pe AD punctul M așa că AM=BC; pe CA un punct N așa că CN=AB; pe BA un punct P așa că BP=AC; pe MA un punct R așa că MR=AD. Se cere: 1) A se găsi expresiunea ariei triunghiului MNP în funcțiune de laturile triunghiului dat ABC; 2) Să se demonstreze că aria MNP este egală cu îndoitul ariei BCR; 3) Cînd punctele M, N, P, R vor fi în linie dreaptă?

(I. IONESCU.)

*115. Fie a, b, c laturile unui triunghiu și a', b', c' distanțele punctului de întîlnire H al înălțimilor la vîrfurile A, B, C. Să se demonstreze că daca punctul H e interior triunghiului, avem:

$$\frac{a'b'}{ab}+\frac{b'c'}{bc}+\frac{c'a'}{ca}=1.$$

Ce convenție trebue făcută asupra semnelor lui a', b', c' pentru ca formula să fie adevărată și în cazul cînd punctul H e exterior triunghiului?

(I. MOSCUNA.)

Problemele însemnate cu * se pot rezolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior :

1) Articolul trimes de D-l *A. Iliovici.*

2) Probleme propuse de D-nii *Bogdan Ionescu, Gr. N. Makarie,* și *I. Moscuna.*

3) Probleme rezolvite de D-nii: *I. Anastasiadi* (91, 93); *A. Bărcăcilă* (73); *A. Iliovici* (51, 52, 56, 57, 59, 61, 67, 70, 72, 73, 75, 79, 82, 86, 89, 91, 92, 93); *G. Iliovici* (57, 59, 61); *D. Ioachimescu* (55, 73, 89, 93); *Alex. Ionescu* (72, 93); *Bogdan Ionescu* (54, 65, 68, 71, 74, 78, 80, 91); *Gr. N. Makarie* (51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 68, 69, 71, 73, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 93, 95, 99, 101, 103); *M. Mateescu* (69); *C. Mateiescu* (67, 69, 70, 72, 82, 83, 89); *C. Miclescu* (58); *I. Moscuna* (71, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 98, 102, 104, 105, 107); *N. Negoescu* (52, 53, 59, 61); *D. Negulescu* (68, 71, 78); *B. Paraschivescu* (66, 69, 72, 89, 93); *I. Penescu* (91, 93); *D. Poenaru* (83); *C. Popescu* (61, 66, 69, 70, 83, 87); *C. Popovici* (57, 66, 70, 73, 79, 86, 89, 93); *C. Rădulescu* (73); *I. P. Rădulescu* (53, 59); *L. I. Rădulescu* (79); *C. N. Răileanu* (57, 61, 73); *L. Scherer* (75); *I. Stroescu* (62); *N. Trandafirescu* (68, 70, 72).

Probleme nerezolvite: 22, 23, 24, 76, 77, 84, 85, 88, 97, 100, 106.

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București, sau D-lui G. Țițeica, Profesor, Calea Rahovei, 46, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 a fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.