# GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 10.—IUNIE 1896.

## SUMARUL

1. Asupra echilibrului indiferent . . . . . *A. G. Ioachimescu*
2. Sofismă matematică . . . . . *I. Ionescu*
3. Probleme rezolvite 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 65.
4. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacția *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

| | |
|---|---|
| Alexandrini Octav, . . . . . | *Inginer.* |
| Constantinescu Tancred, . . . | » |
| Cristescu Vasile, . . . . . | » |
| Davidescu Emanoil, . . . . . | » |
| Ghibaldan Ioan, . . . . . | *Profesor*, lic. în mat. |
| Ioachimescu Andrei, . . . . . | *Inginer*, lic. în mat. |
| Ionescu Ion, . . . . . | » |
| Kinbaum Mauriciu, . . . . . | » |
| Nicolescu Nicolae, . . . . . | » |
| D-ra Pompilian Constanța, . . | Lic. în matematici. |
| Roco Mihail, . . . . . | *Inginer.* |
| Țițeica Gheorghe, . . . . . | *Profesor*, lic. în mat. |
| Zottu G. Ion, . . . . . | *Inginer.* |

# ASUPRA ECHILIBRULUI INDIFERENT

1. Fiind dat un sistem de $n$ puncte materiale, supus la acțiunea unui sistem de forțe date, și la un număr oare-care de legături, care pot fi exprimate prin ecuațiuni în termeni finiți între coordonatele punctelor sistemului și timp; se știe, că dacă legaturile sînt perfecte (fără frecări), pentru ca un asemenea sistem să fie în echilibru, este necesar și suficient ca suma travaliurilor virtuale să fie nulă, pentru toate deplasările compatibile cu legăturile sistemului.

Dacă se presupune în particular că forțele ce solicită sistemul derivă dintr'o funcțiune de forțe $U(x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots x_n, y_n, z_n)$, și ecuațiunele de legături nu coprind timpul explicit; condițiunele care exprimă că sistemul este în echilibru, sînt aceleași, ca și acelea care exprimă că funcțiunea de forțe poate fi un maximum sau un minimum, *ținînd seama și de legături.* Se demonstră încă că dacă pentru un sistem de valori ale parametrelor, de care depinde poziținea sistemului, funcțiunea de forțe este în realitate un maximum, poziținea corespunzătoare a sistemului, este o poziține de echilibru stabil [1]).

2. Aceste generalități reamintite, problema ce-mi propun a rezolva este următoarea:

*Fiind dat un sistem de n puncte materiale, în condițiunele specificate mai sus, supus la un număr determinat de legături: cum trebue să fie aceste legături, pentru ca sistemul să fie în echilibru, în fie-care din pozițiile pe care el le poate ocupa în spațiu?*

Rezoluția acestei probleme rezultă imediat din teorema următoare:

*Fiind dat un sistem de n puncte materiale, supus la acțiunea unor forțe ce derivă dintr'o funcțiune de forțe U, și la un număr h de legături, ce pot fi exprimate prin ecuațiuni în*

---

[1]) Această teoremă, enunțată întâi de Lagrange, a fost demonstrată riguros de Lejeunne-Dirichlet, și este cunoscută sub numele acestui din urmă geometru; în fine de curînd D. Francesco Siacci a anunțat a fi în posesia unei demonstrații riguroase a reciprocei acestei teoreme.

*termeni finiți între coordonatele punctelor sistemului, dar care nu coprind timpul explicit; pentru ca un asemenea sistem să fie în echilibru, în fie-care din pozițiile sale, este necesar și suficient ca legăturile sistemului să fie ast-fel, că ținînd seama de aceste legături, funcțiunea de forțe să se reducă la o constantă* [1]).

In adevăr sistemul fiind supus la $h$ legături poziţiunea sa va depinde de $3n—h=k$ parametre arbitrare; fie $q_1, q_2 \ldots q_k$ aceste parametre. Cele $3n$ coordonate $x_1, y_2, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n$, sînt funcţiuni de aceste parametre; înlocuindu-le în funcţiunea de forţe U ea devine o funcţiune: $U(q_1, q_2 \ldots q_k)$.

Să presupunem că aceasta nu s'ar reduce identic la o constantă. Ecuaţiunele de echilibru ale sistemului fiind:

$$(1) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2}=0 \ldots . \quad \frac{\partial U}{\partial q_k}=0$$

aceste ecuaţiuni nu vor fi identic satisfăcute, deci va exista un sistem de valori ale parametrelor $q_i$, pentru care ele nefiind satisfăcute, sistemul nu va fi în echilibru.

Condiţiunea de mai sus este evident suficientă, căci dacă vom avea:

$$U(q_1, q_2, \ldots q_k) \equiv a$$

vom avea de asemenea:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} \equiv 0 \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} \equiv 0$$

şi sistemul va fi în echilibru ori-care ar fi $q_i$, adică în toate poziţiunele pe care legăturile lui 'i permite să le ocupe în spaţiu: *Sistemul va fi deci într'o stare de echilibru indiferent.*

3. Pentru a găsi explicit ecuaţiunele, la care trebue să satisfacă funcţiunele de legătură, se poate proceda în două moduri: 1) exprimînd coordonatele punctelor sistemului în funcţiune de numărul minim de parametre de care depinde poziţia sa; 2) introducînd

---

[1]) Această teoremă de şi foarte simplă n'am văzut'o demonstrată în nici una din cărţile de mecanică, pe care le cunosc eu; singur în cartea D-lui *Boussinescq, Leçons syntetiques de Mécanique générale,* la pag. 28, se menţionează, că dacă funcţiunea de forţe se reduce la o constantă, echilibrul este indiferent.

forțele de legătură. Voi întrebuința primul mod fiind mai comod pentru aplicații.

Fie deci:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \ldots q_k)$$
$$y_1 = y_1(q_1, q_2 \ldots q_k)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$z_n = z_n(q_1, q_2 \ldots q_k)$$

introducînd aceste valori în funcțiunea de forțe, va trebui să avem:

$$U(x_1, y_1, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) = U(q_1, q_2, \ldots q_n) = C^{te}$$

Luînd derivata acestei expresii în raport cu fie-care din parametrele independente $q_i$, avem:

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial q_i} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial q_i} = 0.$$

In acest sistem de $k$ ecuațiuni, $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial U}{\partial z_n}$ sînt componentele forțelor aplicate diferitelor puncte ale sistemului, adică niște cantități cunoscute, și sistemul (2) reprezintă ecuațiunile la care trebue să satisfacă funcțiunile $x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n$ de $q_1, q_2 \ldots q_k$. Numărul funcțiunelor necunoscute este în aparență de $3n$, în realitate însă el este numai de $3n-k$, căci nimic nu împedică a lua ca parametre independente, $k$ din cantitățile $x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n$. Sistemul (2) fiind de $k$ ecuațiuni rezultă că problema va fi în general imposibilă, determinată sau nedeterminată, dupe cum:

$$3n-k < k, \quad 3n-k = k, \quad 3n-k > k$$

sau

$$k > \frac{3n}{2}, \quad k = \frac{3n}{2} = h, \quad k < \frac{3n}{2}.$$

**Observație.** Considerațiele de mai sus se aplică în particular în cazul unui solid indeformabil. Poziținea unui asemenea sistem depinde de 6 parametre, s. ex. coordonatele unui punct invariabil legat cu corpul, și cele trei unghiuri ale lui *Euler*, pe care un sistem de axe invariabil legate cu el, le face cu niște axe de direcție invariabilă în spațiu. Funcțiunea de forțe va depinde și ea de aceste parametre: $U(x_1, y_1, z_1, \theta, \varphi, \psi)$. Numărul legăturilor ce putem impune sistemului, pentru ca el să fie în echilibru indiferent este, dupe formula generală:

$$k = h = \frac{3n}{2} = 3$$

căci în cazul acesta $n=2$. Putem presupune s. ex. că luăm pe $x_1, y_1, z_1$ ca parametre independente; sistemul (2) devine:

$$3)\quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial 0}\frac{\partial 0}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_1}=0 \\ \frac{\partial U}{\partial 0}\frac{\partial 0}{\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial x_2}=0 \\ \frac{\partial U}{\partial 0}\frac{\partial 0}{\partial x_3}+\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}+\frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_3}+\frac{\partial U}{\partial x_3}=0 \end{cases}$$

sistemul acesta dă:

$$0=0(x_1, y_1, z_1)$$
$$\varphi=\varphi(x_2, y_2, z_2)$$
$$\psi=\psi(x_1, y_1, z_1),$$

care reprezintă ecuaţiunele de legătură. Introducîndu-le în funcţiunea de forţe, aceasta devine:

$$U(x_1, y_1, z_1)=a$$

care reprezintă o suprafaţă, pe care va trebui să se afle punctul considerat.

4. Reiau acelaşi sistem de puncte materiale, pe care l'am considerat la început, şi presupun în particular că $n-1$ din punctele sistemului descriu cîte o curbă dată. Ce va trebui să descrie al $n$-lea punct, pentru ca sistemul să fie în echilibru în fie-care din poziţiile sale?

Dacă funcţiunea de forţe este cunoscută, soluţiunea acestei probleme este imediată, fără nici o integrare. In adevăr $n-1$ din punctele sistemului descriind curbe cunoscute, cele $3n-3$ coordonate ale acestor puncte, sînt funcţiuni cunoscute de un parametru $q$. Introducînd aceste expresii în funcţiunea de forţe, aceasta devine o funcţiune: $U(x_n, y_n, z_n, q)=a$, cum însă putem presupune în totdea-una că am luat ca parametru independent una din cantităţile $x_n, y_n$, sau $z_n$, expresiunea de mai sus devine:

$$(4)\qquad U(x_n, y_n, z_n)=a$$

ce reprezintă o suprafaţă pe care va trebui să rămîe aşezat cel de al $n$-lea punct al sistemului.

Dacă sistemul este plan, una din coordonate s. ex. $z$ nu intră în expresia lui U, şi aceasta devine:

$$U(x_n, y_n)=a$$

care reprezintă curba descrisă de al $n$-lea punct.

O aplicație imediată a generalităților de mai sus, este problema cunoscută sub numele de *Pont-levis al lui Belidor.*

Intr'un plan vertical, o bară omogenă OA, este mobilă în jurul unei extremități O, care este fixă; un fir atîrnat în A trece printr'un scripet infinit mic B, situat pe verticala lui O, și poartă la extremitatea sa o contra-greutate Q, alunecînd fără frecare pe o curbă C situată în același plan vertical. Cum trebue să fie această curbă pentru ca sistemul să fie în echilibru indiferent?

Fie M masa barei, $M_1$ masa contragreutății, $z$ și $z_1$ distanțele centrelor lor de greutate sub un plan orizontal ce trece prin O. Funcțiunea de forțe este în cazul acesta $Mz+M_1z_1$. Pentru ca sistemul să fie în echilibru indiferent va trebui să avem:

(5) $$Mz+M_1z_1=\text{C-tă}.$$

Am putea zice că aceasta reprezintă ecuațiunea curbei descrisă de Q, căci toate punctele sistemului afară de unul (contra greutatea), descriu curbe cunoscute (arcuri de cerc cu centrul în O); expresiunea de mai sus determină curba descrisă de cel de al $n$-lea punct al sistemului. Se poate însă lesne găsi ecuațiunea acestei curbe în coordonate polare.

Iau B ca pol și BO ca axă polară; fie $l$ lungimea firului, $a$ lungimea barei, $h$ distanța OB, $r$ raza polară BM și $\theta$ unghiul polar OBM. Avem:

$$z=-\frac{a}{2}\cos ABO$$

$$z_1=r\cos\theta-h,$$

iar în triunghiul AOB avem:

$$(l-r)^2=h^2+a^2-2ah\cos AOB.$$

Eliminînd între (5) și aceste 3 relații, pe $z$, $z_1$ și cosAOB, se obține o expresie de forma:

(6) $$r^2-r(\alpha+\beta\cos\theta)+\gamma=0$$

care reprezintă *ovalele lui Descartes,* sau în cazul particular cînd $\gamma=0$, *un melc al lui Pascal.*

**Observație.** Consider cilindrul cu generatricele perpendiculare pe planul curbei (6) și a cărei directrice este această curbă. Ori-ce

curbă trasată pe acest cilindru este o soluțiune a problemei; căci pentru ori-ce poziţiune ar ocupa contra-greutatea Q pe cilindru, funcţiunea de forţe este constantă, deci poziţiunea corespunzătoare a sistemului va fi o poziţiune de echilibru indiferent. Bine înţeles, aceasta este exact numai atunci, cînd lungimea firului şi dispoziţiunea scripetelui B, ar permite contra-greutăţei să ocupe ori-ce poziţiune pe cilindru.

A. G. Ioachimescu.

## SOFISMĂ MATEMATICĂ

*Totul e mai mic ca suma cîtor-va din părţile sale.*

Pentru a demonstra aceasta să considerăm două cercuri tangente în punctul O, şi avînd centrele în C şi C′. Prin punctul O ducem 2 secante POQ, ROS, punctele P,R fiind pe circonferenţa C iar punctele Q,S pe circonferenţa C′. Ducem dreptele PR şi QS cari se vor tăia în un punct M. Prin punctul O ducem dreptele OX şi OY paralele cu QS şi PR. In fine ducem razele CP,CR,CO, C′Q,C′S,C′O.

Dreptele CO şi CO′ sînt în prelungire, căci linia centrelor trece prin punctul de contact. In cele ce urmează vom stabili egalităţi numai între unghiuri.

Triunghiurile CPR, C′QS′ ne dau :

1) $CPR+CRP+RCP=180^0$, şi $C'QS+C'SQ+SC'Q=180^0$.

Dar avem :

2) $OPM=OPC-RPC$, şi $OSM=OSC'-QSC'$.

Să înlocuim în aceste egalităţi unghiurile CPR şi C′SQ prin valorile lor deduse din egalităţile 1) şi apoi să le adunăm; vom obţine:

3) $OPM+OSM=OPC-(180^0-CRP-RCP)+OSC'-(180^0-C'QS-SC'Q)$,

care se mai poate scri:

4) $OPM+OSM=(PRC+PCR)+(C'QS+QC'S)+OPC+OSC'-360^0$.

Să evaluăm parentezele. Unghiurile CRM,C′QM fiind exterioare triunghiurilor RCP, QSC′ ne dau :

5) $CRM=CPR+RCP$, şi $C'QM=C'SQ+SC'Q$.

Dar triunghiurile CPR, C′SQ sînt isoscele de oare-ce au cîte două laturi egale ca raze, deci :

6) $CPR=CRP, \qquad C'QS=C'SQ.$

Rezultă de aci că membrele 2-lea ale egalităţilor (5) sînt respectiv egale cu parentezele din egalitatea (4). Deci egalitatea (4) se poate scri:

7) $OPM+OSM=CRM+C'QM+OPC+OSC'-360^0.$

Dar avem:

8) $CRM=360^0-CRO-ORM$ şi $C'QM=360^0-OQC'-OQM.$

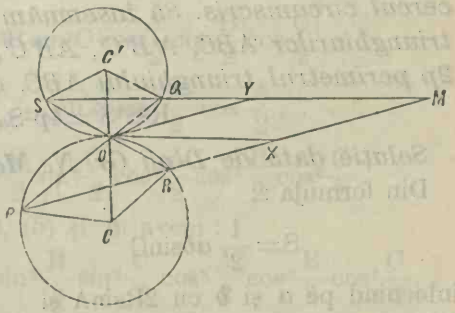
Substituind aceste valori în egalitatea (7) obţinem:

9) $OPM+OSM=360^0-CRO-ORM+360^0-C'QO-OQM+OPC+OSC'-360^0$

care se mai poate scrie:

10) $OPM+OSM=(360^0-ORM-OQM)+(C'SO-C'QO)+(CPO-OQC')$

Triunghiurile OPC,OQC' fiind isoscele şi avînd cîte un unghiu la bază egale ca opuse la vîrf, rezultă că şi cele-lalte două unghiuri ale lor CPO' OQC' vor fi egale. In acelaşi mod putem arăta că şi unghiurile CRO,C'SO sînt egale. Prin urmare ultimele 2 parenteze din egalitatea (10) sînt nule şi ne rămîne:




11) $OPM+OSM=360^0-ORM-OQM.$

Patrulaterul ORMQ ne dă:

12) $ORM+RMQ+MQO+QOR=360^0,$

de unde:

13) $360^0-ORM-OQM=RMQ+ROQ.$

Comparînd egalităţile 11) şi 13) deducem:

14) $OPM+OSM=ROQ+RMQ,$

de unde:

15) $ROQ=OPM+OSM-RMQ,$

şi prin urmare:

16) $ROQ<OPM+OSM.$

Dar paralele PM,OY tăiate de secanta PQ, şi paralele QM,OX tăiate de secanta SR ne dau:

17) $OPM=QOY$ și $OSM=ROX$.

Deci înlocuind în (16) aceste valori ale lui OPM și OSM vom avea:

18) $ROQ<QOY+ROX$

Această din urmă neegalitate justifică propoziţiunea enunţată la început, căci neegalitatea (18) ne arată că unghiul ROQ care se compune din ROX,XOY și QOY, este mai mic ca suma a două din părţile sale: ROX și QOY.

(Va urma) I. Ionescu.

# PROBLEME REZOLVITE

***Problema 51.**— *Fie A', B', C' punctele unde bisectriţele interioare ale unghiurilor unui triunghiu ABC întîlnesc cercul circumscris. Să însemnăm cu S, S', $S_a$, $S_b$, $S_c$, ariile triunghiurilor ABC, A'B'C', AB'C', BC'A', CA'B'; în fine cu 2p perimetrul triunghiului ABC. Să se demonstreze relaţia:*

$$R^2S^2S'=4p^2S_aS_bS_c.$$ (G. Ţiţeica.)

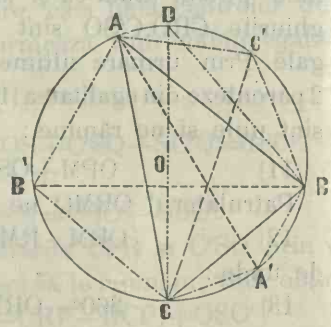
*Soluţie dată de D-nii Gr. N. Makarie și A. Iliovici.*

Din formula:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

înlocuind pe $a$ și $b$ cu $2R\sin A$ și $2R\sin B$ se scoate:

(1) $$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$




Aplicînd această formulă triunghiului A'B'C', găsim:

$$S'=2R^2\sin A'\sin B'\sin C'.$$

însă $A'=\frac{B+C}{2}$, . . . . sau $A'=90^0-\frac{A}{2}$, . . . . . , deci

(2) $$S'=2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Asemenea, aplicînd aceiași formulă triunghiului AB'C' și observînd că:

$$\widehat{B'AC'}=A+\frac{B+C}{2}=90^0+\frac{A}{2},\ \widehat{AB'C'}=\frac{C}{2},\ \widehat{AC'B'}=\frac{B}{2},$$

obținem :

$$S_a = 2R^2 \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \quad (3)$$

In mod analog :

$$S_b = 2R^2 \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \quad (4)$$

$$S_c = 2R^2 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad (5)$$

Mai observăm în fine, că avem după o formulă cunoscută :

$$2p = a+b+c = 2R(\sin A+\sin B+\sin C) = 8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad (6)$$

Formulele (1), (2), (3), (4), (5) și (6) ne vor demonstra relațiunea propusă.

In adevăr, din (1) și (2) scoatem :

$$R^2S^2S' = 8R^8 \sin^2A \sin^2B \sin^2C \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

sau, înlocuind pe sinA, . . . . cu $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, . . . .

$$R^2S^2S' = 8^3R^8 \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}. \quad (7)$$

Pe de altă parte, din (3), (4), (5) și (6) avem :

$$4p^2 S_a S_b S_c = 8^3 R^8 \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}. \quad (8)$$

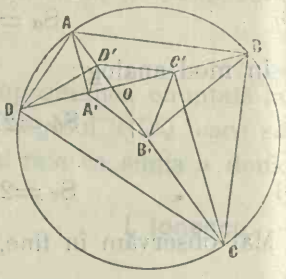
Egalitățile (7) și (8) ne dau relația enunțată.

***Problema 52.**— *Se consideră patrulaterul* A'B'C'D' *format prin intersecțiunile diagonalelor* AC,BD *ale unui patrulater inscriptibil* ABCD, *cu perpendicularele scoborîte din vîrfurile* B,D *și* A,C *respectiv opuse diagonalelor* AC *și* BD. *Să se demonstreze :* 1) *Că patrulaterul* A'B'C'D' *este și el inscriptibil;* 2) *Că există relația* $S' = S\cos^2\varphi$ *în care* S *a aria patrulaterului* ABCD, S' *aria patrulaterului* A'B'C'D' *și* $\varphi$ *unghiul diagonalelor* AC,BD. **(Bogdan Ionescu.)**

*Soluție dată de D-nii A. Iliovici,* (Elev în Clasa VII de la Liceul din Iași) și *N. Negoescu* (Rîmnicul-Vîlcei).

1) Fie A',C' și B',D' picioarele perpendicularelor scoborîte din vîrfurile A,C și B,D pe diagonalele BD și AC, al căror punct de

intersecție este punctul O. Unghiurile AA'B, AB'B fiind drepte, patrulaterul AA'B'B este inscriptibil. De asemenea patrulaterul BC'B'C este inscriptibil pentru un motiv analog. Unghiurile BAC, B'A'C' sînt egale, fiind-că ambele sub-întind aceiași coardă în patrulaterul inscriptibil AA'B'B. Unghiurile ACB, A'C'B' sînt de asemenea egale, căci ambele sînt suplimentare cu unghiul BC'B'. Rezultă atunci ca triunghiurile ABC, A'B'C' sînt asemenea. În mod analog se poate stabili că triunghiurile ADC, A'D'C' sînt și ele asemenea. Patrulaterele ABCD, A'B'C'D' fiind compuse dar fie-care din două triunghiuri asemenea, și asemenea așezate, sînt asemenea [1]). Dacă patrulaterul ABCD e inscriptibil, rezultă atunci că și patrulaterul A'B'C'D' va fi inscriptibil.




2) Patrulaterele A'B'C'D', ABCD fiind asemenea, avem:

$$\frac{S'}{S}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}. \qquad (1)$$

Insă triunghiurile OA'B', OAB fiind asemenea, ne dau:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=\cos\varphi$$

și prin urmare egalitatea (1) devine:

$$S'=S\cos^2\varphi. \qquad (2)$$

După cum rezultă din demonstrația precedentă, relația (2) are loc chiar dacă patrulaterul ABCD nu e inscriptibil.

***Problema 53.**— *A se verifica identitatea*

$$\left(\cos\frac{32\pi}{17}+\cos\frac{26\pi}{17}\right)\left(\cos\frac{30\pi}{17}+\cos\frac{18\pi}{17}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{22\pi}{17}+\cos\frac{20\pi}{17}\right)\left(\cos\frac{28\pi}{17}+\cos\frac{24\pi}{17}\right)$$

**(I. Ghibaldan.)**

[1]) Se pot aduce laturile patrulaterului A'B'C'D' să fie respectiv paralele laturilor patrulaterului ABCD, prin o rotație de 180° a planului patrulaterului A'B'C'D' în jurul bisectriței unghiului BOC.

*Soluție dată de D-nul I. P. Rădulescu* (Focșani).

Să însemnăm primul membru al acestei identități cu A. Dacă efectuăm înmulțirile terminilor din primul membru și transformăm apoi produsele de cosinuri în sume de cosinuri, după formula:

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

obținem:

$$2A = \cos\frac{62\pi}{17} + \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{50\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17} + \cos\frac{56\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{44\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17}.$$

Dar:

$$\cos\frac{62\pi}{17} = \cos\left(4\pi - \frac{6\pi}{17}\right) = \cos\frac{6\pi}{17},$$

$$\cos\frac{14\pi}{17} = \cos\left(2\pi + \frac{14\pi}{17}\right) = \cos\frac{48\pi}{17},$$

$$\cos\frac{56\pi}{17} = \cos\left(4\pi - \frac{12\pi}{17}\right) = \cos\frac{12\pi}{17} = \cos\left(2\pi + \frac{12\pi}{17}\right) = \cos\frac{46\pi}{17}.$$

Să înlocuim în (1) și să aranjăm termenii precum urmează:

$$2A = \left(\cos\frac{50\pi}{17} + \cos\frac{6\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{46\pi}{17} + \cos\frac{2\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{48\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{44\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17}\right).$$

Dacă transformăm sumele de cosinuri în produse, obținem:

$$A = \cos\frac{28\pi}{17}\cos\frac{22\pi}{17} + \cos\frac{24\pi}{17}\cos\frac{22\pi}{17} + \cos\frac{28\pi}{17}\cos\frac{20\pi}{17} + \cos\frac{24\pi}{17}\cos\frac{20\pi}{17},$$

sau:

$$A = \left(\cos\frac{22\pi}{17} + \cos\frac{20\pi}{17}\right)\left(\cos\frac{28\pi}{17} + \cos\frac{24\pi}{17}\right),$$

adică tocmai membrul al doilea. c.c.e.d.d.

D-nii *N. Negoescu* și *Gr. N. Makarie* au rezolvit problema arătînd că ambii membri ai identității propuse se pot reduce la o aceiași expresiune.

**Problema 54.**— *In ori-ce elipsoid există o sferă de rază concentrică cu elipsoidul și tangenta la ori-ce plan secant ce trece prin extremitățile a 3 diametre rectangulare. Chestiunea analogă pentru elipsă.* **(D. Negulescu.)**

*Soluție dată de D-l C. Lupu* (București).

A) *Elipsoid. Soluțiunea I.*

Raportăm elipsoidul la planurile sale principale; ecuațiunea sa va fi:

(1) $$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$$

Fie $p$ lungimea normalei duse din origina 0 a coordonatelor pe un plan oare-care; dacă însemnăm prin A, B și C lungimile $OP_1$, $OP_2$ și $OP_3$ a muchiilor unui triedru *tridreptunghiu* oare-care avînd vîrful în O și limitat de acest plan și prin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unghiurile normalei cu direcțiile $OP_1$, $OP_2$ și $OP_3$, vom avea:

$$A\cos\alpha=B\cos\beta=C\cos\gamma=p,$$

(2) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Ecuațiunile dreptei $OP_1$ vor fi:

$$\frac{x}{\cos\alpha_1}=\frac{y}{\cos\beta_1}=\frac{z}{\cos^2\gamma}=\rho,$$

$\alpha_1$ $\beta_1$ $\gamma_1$ însemnînd unghiurile direcțiunei $OP_1$ cu axele coordonate și $\rho$ distanța de la punctul $x$, $y$, $z$ la O.

Fie $x_1, y_1, z_1$ coordonatele punctului $P_1$ cînd acest punct se află pe elipsoid; vom avea:

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z_1}{\cos\gamma_1}=A,$$

și ducînd valorile lui $x_1$ $y_1$ $z_1$ scóse din aceste ecuațiuni în ecuațiunea (1):

$$A^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2\cos^2\alpha_1+c^2a^2\cos^2\beta_1+a^2b^2\cos^2\gamma_1}$$

deci: $$p^2=A^2\cos^2\alpha=\frac{a^2b^2c^2\cos^2\alpha}{b^2c^2\cos^2\alpha_1+c^2a^2\cos^2\beta_1+a^2b^2\cos^2\gamma_1}.$$

Tot ast-fel vom obține pentru punctele $P_2$ și $P_3$:

$$p^2=B^2\cos^2\beta=C^2\cos^2\gamma=\frac{a^2b^2c^2\cos\beta^2.}{b^2c^2\cos^2\alpha_2+c^2a^2\cos^2\beta^2+a^2b^2\cos^2\gamma_2}=$$

$$=\frac{a^2b^2c^2\cos^2\gamma}{b^2c^2\cos^2\alpha_3+c^2a^2\cos^2\beta_3+a^2b^2\cos^2\gamma_3}.$$

Triedrul $OP_1P_2P_3$ fiind tridreptunghiu, dacă considerăm unghiurile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ale uneia din axele coordonate $Ox$ cu muchiile $OP_1$ $OP_2$ și $OP_3$, vom avea relațiunea:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,$$

și tot astfel:

$$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1,$$
$$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1.$$

Prin urmare, adunînd numărătorii și numitorii celor trei valori ale lui $p$ și ținînd seamă și de relațiunea (2) obținem:

$$p^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

sau, fiind că $p$ nu poate fi de cît pozitiv:

$$p=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}.$$

Lungimea normalei fiind independentă de poziţiunea planului, acest plan rămîne tangent la o sferă avînd centrul în O şi raza $p$; punctul de contact este chiar piciorul normalei.

*Soluţiunea II.* Se ştie că condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca pe un con de gradul al 2-lea:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2By z+2B'zx+2B''xy=0$$

să se poată aşeza muchiile unui triedru tridreptunghiu este:

$$A+A'+A''=0 \qquad (3)$$

şi că atunci cînd această condiţiune este împlinită există un număr infinit de moduri de a aşeza triedrul pe con. (Veḑi Briot et Bouquet, Géométrie Analytique, 1893 pag. 541 şi 542).

Ecuaţiunea unui con al cărui vîrf este în O şi care are ca directrice curba de intersecţie a elipsoidului (1) cu un plan oarecare P:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \qquad (4)$$

se obţine făcînd ecuaţiunile (1) şi (4) omogene prin ajutorul unei a patra variabile $t$ şi eliminînd apoi această variabilă între ele căci obţinem o ecuaţiune omogenă în $x, y, z$ şi care este verificată de coordonatele punctelor cari verifică în acelaşi timp ecuaţiunile (1) şi (4). Vom avea dar a elimina pe $t$ între

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2-a^2b^2c^2t^2=0$$

şi

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-pt=0.$$

Ecuaţiunea conului căutat va fi deci:

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2-a^2b^2c^2\frac{(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{p^2}=0$$

sau: $b^2c^2(p^2-a^2\cos^2\alpha)x^2+c^2a^2(p^2-b^2\cos^2\beta)y^2+a^2b^2(p^2-c^2\cos^2\gamma)z^2+\ldots=0.$

Dacă planul P trece prin extremităţile a trei diametre rectangulare, se poate aşeza pe con muchiile unui triedru tridreptunghiu, şi vice-versa. Condiţiunea (3) fiind atunci împlinită, vom avea:

$$b^2c^2(p^2-a^2\cos^2\alpha)+c^2a^2(p^2-b^2\cos^2\beta)+a^2b^2(p^2-c^2\cos^2\gamma)=0$$

adică:

$$p=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

de oare-ce $\cos^2\alpha+\cos\beta+\cos^2\gamma=1$.

**Observațiuni.** *a)* Sfera învălită de planul P este înscrisă în cubul înscris în elipsoid, precum și în octaedrul construit pe vîrfurile elipsoidului.

*b)* Proprietatea enunțată mai sus există și pentru hiperboloizi; însă sfera nu va fi reală de cît dacă:

(5) $\begin{cases} b^2c^2+c^2a^2 > a^2b^2 \text{ în cazul unui hiperboloid cu o singură pînză} \\ b^2c^2 > c^2a^2+a^2b^2 \text{ » » » » « două pînze.} \end{cases}$

Cînd $b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2=0$,

sau $b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0$

raza sferei este infinită; condițiunea (3) fiind atunci împlinită pentru conurile asimptote ale hiperboloizilor, se vor putea așeza pe aceste conuri muchiile a unei infinități de triedre tridreptunghie, cari toate vor întîlni hiperboloidul la infinit. Nu există în acest caz alte triedre tridreptunghie ale căror trei muchii să întîlnească hiperboloizii, decît cele după conurile asimptote. Prin urmare, din punct de vedere geometric, condițiunile (4) exprimă că conul asimptot al hiperboloidului considerat trebue, pentru ca sfera să existe, să fie ast-fel ca cele *trei* muchii ale unui triedru tridreptunghiu avînd vîrful în O, să poată fi coprinse în interiorul părței conului în care este situat hiperboloidul.

*c)* Cînd elipsoidul dat devine o sferă avem:

$$a=b=c=r$$

și atunci:

$$p=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

adică: sfera învălită de planul P este înscrisă în toate cuburile înscrise în sfera dată.

B) *Elipsă. In ori-ce elipsă există un cerc de rază constantă, concentric cu elipsa și tangent la ori-ce secantă care trece prin extremitățile a două diametre rectangulare.*

Dacă, prin ajutorul unei a treia variabile $t$ facem omogene ecuațiunile unei elipse:

(1) $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=o$

și a unei drepte D:

(2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$,

și eliminăm apoi pe $t$ între ecuațiunile ast-fel obținute, ecuațiunea găsită, fiind omogenă în $x$ și $y$ și fiind verificată de coordona-

tele punctelor cari verifică în acelaș timp ecuațiunile (1) și (2), va reprezenta cele două drepte duse de la origină la punctele $P_1, P_2$ de intersecție ale elipsei cu dreapta D. Obținem ast-fel ecuațiunea:

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2\frac{(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}{p^2}=0$$

sau:

$$a^2(p^2-b^2\sin^2\alpha)\frac{y^2}{x^2}-2a^2b^2\sin\alpha\cos\alpha\frac{y}{x}+b^2(p^2-a^2\cos^2\alpha)=0,$$

care, considerată ca ecuațiune în $\frac{y}{x}$, dă coeficienții unghiulari ai dreptelor $OP_1$ și $OP_2$. Cînd aceste drepte sunt perpendiculare, avem :

$$\frac{b^2(p^2-a^2\cos^2\alpha)}{a^2(p^2-b^2\sin^2\alpha)}=-1$$

de unde, ținînd seama că $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$p=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

adică că distanța de la O la dreapta D rămîne în acest caz constantă și prin urmare D învălește un cerc de rază $p$ și cu centrul în O.

Acest cerc este tagent laturilor patratului înscris în elipsă și laturilor paralelogramului construit pe vîrfurile elipsei.

**Obervațiuni.** *a)* Și pentru cazul elipsei se poate ușor da o soluțiune analogă cu soluțiunea I dată mai sus pentru elipsoid.

*b)* Proprietatea analoagă există pentru hiperbolă; în acest caz:

$$p=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

și cercul nu este real de cît cînd $b>a$, adică cînd unghiul asimptotelor care coprinde curba este mai mare de $90^0$. Cînd $a=b$ hiperbola este echilateră și raza cercului devine infinită ; asimptotele formează singurul unghiu drept cu vîrful în centru ale cărui ambe laturi întîlnesc curba.

*Soluție dată de D-nul Bogdan Ionescu* (Elev al Școalei Normale Superioare din București). Să începem cu elipsa. Fie ecuația ei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ și (1) } ux+vy=1,$$

ecuațiunea unei secante oare-care, $u,v$ fiind parametri variabili.

Ecuația fasciculului de drepte, ce unește origina coordonatelor cu punctele de intersecție a elipsei cu secanta este:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)-2uvxy=o.$$

Condiția ca acest fascicol să ne reprezinte 2 drepte rectangulare e:

$$(2)\qquad u^2+v^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Chestiunea revine a găsi înfășuratoarea dreptei (1) știind că parametrii $u$ și $v$ sunt legați prin relația (2). Derivînd (1) în raport cu $u$, ținînd seama că $v$ e funcție de $u$ prin relația (2), obținem:

$$(3)\qquad \frac{u}{x}=\frac{v}{y}.$$

Eliminînd pe $u$ și $v$ între (1), (2), (3) se obține circonferința:

$$x^2+y^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}.$$

Vom proceda în mod analog și pentru elipsoid, fie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ și (1) } ux+vy+wz=1$$

ecuațiele elipsoidului și a unui plan secant; $u$, $v$ și $w$ fiind parametri variabili. Ecuația conului ce unește origina cu diferitele puncte de intersecție ale elipsoidului cu (1) este:

$$(1)\ x^2\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-w^2\right)-2(uvxy+vwyz+wuzx)=o.$$

Insemnăm cu $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ cosinurile directoare a 3 diametre ale elipsoidului. Dacă sînt rectangulare avem relațiunile:

$$(2)\quad \begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\end{cases}\qquad (3)\quad \begin{cases}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=o\\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=o\\ \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=o\end{cases}$$

Punem condiția ca diametrele acestea să satisfacă la ecuația (1) a conului și avem:

$$\alpha_1^2\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+\beta_1^2\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)+\gamma_1^2\left(\frac{1}{c^2}-w^2\right)-2(\alpha_1\beta_1uv+\beta_1\gamma_1uw+wu\gamma_1\alpha_1)=o$$

$$\alpha_2^2\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+\beta_2^2\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)+\gamma_2^2\left(\frac{1}{c^2}-w^2\right)-2(\alpha_2\beta_2uv+\beta_2\gamma_2vw+\gamma_2\alpha_2wu)=o$$

$$\alpha_3^2\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+\beta_3^2\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)+\gamma_3^2\left(\frac{1}{c^2}-w^2\right)-2(\alpha_3\beta_3uv+\beta_3\gamma_3vw+\gamma_3\alpha_3wu)=o.$$

Adunînd aceste 3 relaţiuni şi ţinînd seamă de relaţiunile (2) şi (3), ne rămîne:

$$(4) \qquad u^2+v^2+w^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Prin urmare trebue să determinăm înfăşurătoarea planului (1) aşa că parametrii $u,v,w$ să satisfacă relaţiunei (4).

Derivăm pe (1) considerînd pe $w$ ca funcţie de $u$ şi $v$:

$$x+z\frac{\partial w}{\partial u}=o \qquad u+w\frac{\partial w}{\partial u}=o$$

asemenea pentru (4)

$$y+z\frac{\partial w}{\partial v}=o \qquad v+w\frac{\partial w}{\partial v}=o.$$

Eliminînd între aceste 4 din urmă relaţiuni pe $\frac{\partial w}{\partial u}$ şi $\frac{\partial w}{\partial v}$ obţinem relaţiunile :

$$(5) \qquad \frac{u}{x}=\frac{v}{y}=\frac{w}{z}.$$

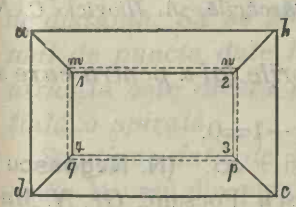
Eliminarea parametrelor $u,v,w$ între (1) (4) şi (5) ne conduce la sfera :

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}.$$

***Problema 55.**— *Un tablou are 68 cm. lungime şi 43 cm. lăţime şi voim a-i pune o ramă care are 75 mm. lăţime şi care acoperă tabloul pe o lăţime de 8 mm. Un metru liniar de ramă întrebuinţată şi aşezată costă 7,35 lei. Cît ne va costa punerea ramei?* **(I. Ionescu.)**

*Soluţiune dată de D-nii Gr. N. Makarie,* (Elev al Scoalei de Poduri şi Şosele) şi *Dumitru G. Ioachimescu* (Ploeşti).

Problema aceasta are două soluţiuni:



(Fig. 1)

I. Dacă profilul ramei nu este simetric în raport cu un plan ce trece prin mijlocul lăţimei ramei şi perpendicular pe planul tabloului, atunci tăerea celor 4 bucăţi din care se compune rama ($ab21$, $bc32$, $cd43$, $da14$) se face după cum indică figura 2. Părţile haşurate se aruncă şi se lipesc bu-

căţile pe părţile cari au acelaşi număr pe figură. Lungimea de ramă întrebuinţată este în acest caz egală cu AB. Dar observînd că îmbinările se fac sub înclinarea de 45° în raport cu muchiile ramei, avem:

$$AB=ab+bc+cd+da=2(ab+bc).$$

Dar după dimensiunile date e uşor de văzut că:

$$ab=(12)+2\times 0,^{m}075=mn-2\times 0,^{m}008+2\times 0,^{m}075=0,^{m}680-2\times 0,^{m}008+2\times 0,^{m}075, \text{ sau } ab=0,814^{m}.$$

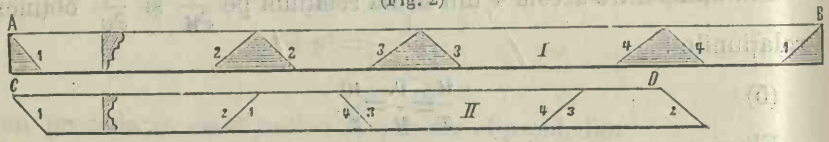
In acelaşi mod găsim: $bc=0,564$.

Deci: $AB=2(0,814+0,564)=2,^{m}756$.

Costul P al punerei ramei va fi prin urmare:

$$P=2^{m},756\times 7,35=20,35 \text{ lei.}$$

(Fig. 2)




(Fig. 3)

II. Dacă profilul ramei este simetric în raport cu un plan ce trece prin mijlocul lăţimei ramei şi perpendicular pe planul tabloului, atunci tăerea se face după cum indică figura 3, şi apoi se lipesc laturile ce poartă acelaşi număr. Lungimea de ramă întrebuinţată în acest caz e mai mică ca în cazul precedent, de oare-ce nu se mai leapădă nimic. Avem în acest caz (fiig. 3):

$$CD=(ab)+(23)+(cd)+(14),$$

sau:

$$CD=2[(ab)+(23)].$$

Inlocuind liniile prin valorile lor numerice avem:

$$CD=2(0,814+0,430-2\times 0,008)=2,456.$$

Costul va fi în acest caz:

$$P'=2,456\times 7,35=18,05 \text{ lei.}$$

Au dat numai ultima soluţiune şi D-nii *A. Bărcăcilă*, *A. Iliovici*, *C. N. Răileanu* şi *G. Iliovici*.

***Problema 57.**—*Să se afle valorile lui $\alpha$ pentru care $x$ din ecuaţia*

$$(2\alpha-1)\sin^{2}x-2(\alpha-1)\sin x+1=0,$$

*are valori reale, $\alpha$ variind între $-\infty$ şi $+\infty$.* (N. Negoescu)

*Soluţie dată de D-nii Ioan P. Rădulescu* (Focşani), *Gr. N. Makarie* (Elev al Şcoalei de Poduri şi Şosele); *A. Iliovici*, *C. Popo-*

*vici* și *C. N. Răileanu* (Elevi în Clasa VII a Liceului din Iași) și *G. Iliovici* (Elev în clasa V a Liceului din Iași).

Rezolvind ecuația dată în raport cu $\sin x$ găsim:

$$\sin x = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 + 2\alpha - 1}}{2\alpha - 1} = \frac{\alpha - 1 \pm \alpha}{2\alpha - 1},$$

de unde: $\sin x' = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha - 1} = 1$, și $\sin x'' = \frac{1}{1 - 2\alpha}$.

Valoarea $x'$ e independentă de $\alpha$ și dată prin relația:

$$x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Valoarea $x''$ nu e reală de cît pentru valorile lui $\alpha$ cari fac ca fracțiunea $\frac{1}{1-2\alpha}$ să fie coprinsă între 1 și $-1$. Se vede ușor că această condiție nu e îndeplinită numai pentru valorile lui $\alpha$ coprinsă între 0 și 1. Să însemnăm cu $\theta$ una din valorile lui $x''$. Vom avea următorul tablou:

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha = -\infty$ | $x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $x'' = k\pi$. |
| $-\infty < \alpha < 0$ | $x' =$ » ». | $x'' = 2k\pi + \theta$ și $x'' = (2k+1)\pi - \theta$. |
| $\alpha = 0$ | $x' =$ » ». | $x'' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. |
| $0 < \alpha < 1$ | $x' =$ » ». | $x''$ imaginar. |
| $\alpha = 1$ | $x' =$ » ». | $x'' = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. |
| $1 < \alpha < +\infty$ | $x' =$ » ». | $x'' = 2k\pi + \theta$ și $x'' = (2k+1)\pi - \theta$. |
| $\alpha = +\infty$ | $x' =$ » ». | $x'' = 2k\pi$. |

**Problema 58.** — *Fiind dat un șir de puncte materiale independente, care la momentul $t=o$ formează o curbă plană continuă, a cărei ecuațiune în raport cu un pol O este: $r_0 = f(\theta_0)$; fie-care punct este atras de O cu o forță funcțiune de distanță. Să se găsească curba pe care o va forma sistemul de puncte date la un moment $t$. Cazul particular cînd atracția este invers proporțională cu distanța și curba inițială o spirală.* **(A. G. Ioachimescu.)**

*Soluțiune dată de D-nul C. Miclescu* (București).

Fie M unul din punctele date ale cărui coordonate sînt $r_0$ și $\theta_0$, avem:

(1) $$r_0=f(\theta_0);$$

fie $\varphi(r)$ funcțiunea de distanța în chestiune. Ecuațiunea mișcării punctului M este:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\varphi(r),$$

din care deducem:

$$2\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}dt=-2\varphi(r)dr$$

pe care integrînd'o, avem :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=-2\int_0^r\varphi(r)dr+C.$$

Pentru: $r=r_0$, $\frac{dr}{dt}=o$, deci $C=2\int_0^{r_0}\varphi(r)dr$

iar: $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=-2\int_{r_0}^r\varphi(r)dr=\varphi_1(r,r_0).$$

sau: (2) $$\frac{dr}{dt}=-\sqrt{\varphi_1(r,r_0)}=\psi(r,r_0).$$

Am luat radicalul cu—, pentru că punctul M este continuu atras, adică la $dt$ pozitiv corespunde $dr$ negativ.

Din (2) deducem:

$$dt=\frac{dr}{\psi(r,r_0)}.$$

Integrînd de la $r=r_0$ pînă la $r=r$, observînd că pentru $r=r_0$, $t=o$, vom avea:

(3) $$t=\int_{r_0}^r\frac{dr}{\psi(r,r_0)}=\Phi(r,r_0).$$

Fie-care punct al curbei date face în toate pozițiunele succesive, pe care le ocupă, acelaș unghiu cu axa polară, ca și acela pe care 'l face la momentul $t=o$, adică: $\theta=\theta_0$

$$r_0=f(\theta_0)=f(\theta).$$

Prin urmare ecuațiunea curbei căutate la momentul $t$ va fi:

$$t=\Phi[r,f(\theta)]$$

în care $t$ este un parametru.

In cazul particular cînd $\varphi(r)=\frac{k}{r^2}$, avem:

$$\varphi_1(r,r_0)=-2k\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2}=2k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

$$\psi(r,r_0)=-\sqrt{2k}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r^0}}$$

$$\Phi(r,r_0)=-\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}}$$

Pentru a efectua această din urmă integrală, pun:

$$a^2=\frac{1}{r_0},\quad x^2=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0},\quad \text{de unde:}\quad dr=-\frac{2xdx}{(x^2+a^2)^2}$$

și avem:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}}=-2\int_{0}^{x_1}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2};\quad x_1=\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}.$$

Însă integrala din urmă este lesne de calculat:

$$\int_0^{x_1}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left[\text{arc tg}\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}+\sqrt{\frac{r}{r_0}-\frac{r^2}{r_0^2}}\right]$$

iar ecuațiunea curbei căutate va fi:

$$(3)\qquad t=\sqrt{\frac{r_0^3}{2k}}\left[\text{arctg}\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}+\sqrt{\frac{r}{r_0}-\frac{r^2}{r_0^2}}\right]$$

$r_0$ va trebui înlocuit cu $a\theta$, sau cu $ae^{m\theta}$, după cum e vorba de o spirală a lui Archimede sau de o spirală logaritmică.

Ecuațiunea (3) poate fi pusă sub formă mai simplă:

$$(4)\qquad r=r_0\cos^2\left[\sqrt{\frac{2k}{r_0}}.t-\sqrt{\frac{r}{r_0}-\frac{r^2}{r_6^2}}\right].$$

Ecuațiunea aceasta permite a calcula prin aproximații succesive valorile lui $r$ pentru ori-ce valoare a lui $r_0$, în modul următor:

fie: $$\sqrt{\frac{2k}{r_0}}\cdot t=a_0,\quad \frac{r}{r_0}=x$$

$x_0$, $x_1$... $x_n$ aproximațiile succesive ale lui $x$, avem:

$$x_0=\cos^2 a_0,\quad x_1=\cos^2 a_1,\quad x_2=\cos^2 a_2 ... x_n=\cos^2 a_n$$

în care:

$$a_0=\sqrt{\frac{2k}{r_0}}.t,\quad a_1=a_0-\frac{1}{2}\sin 2a_0,...\quad a_n=a_0-\frac{1}{2}\sin 2a_{n-1}.$$

***Problema 59.**— *Să se rezolve ecuațiunea:*

$$x^4-2(a-1)x^3-(5a-1)x^2+2(a^2+1)x-a=0,$$

*și să se arate că ecuațiunea are tot-deauna două rădăcini reale; să se găsească limitele între care trebue să fie cuprins a, pentru ca să aibă numai două rădăcini reale. Să se găsească valoarea lui a pentru care ecuațiunea are numai 2 rădăcini egale și valoarea pentru care toate rădăcinile sînt egale* (G. Țițeica.)

*Soluțiune dată de D-nii A. Iliovici,* (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași); *I. P. Rădulescu,* (Focșani); *Gr. N. Makarie,* (Elev al Școalei pe Poduri și Șosele) și *G. Iliovici,* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași).

Ecuațiunea dată se poate scrie:

$$2xa^2-(2x^3+5x^2+1)a+x^4+2x^3+x^2+2x=0.$$

Rezolvînd această ecuațiune în raport cu $a$, se găsește:

$$a_1=x^2+2x$$

și

$$a_2=\frac{x^2+1}{2x}$$

In cît rezolvarea ecuației propuse se reduce la rezolvirea ecuațiilor de al doilea grad,

$$x^2+2x-a=0$$

și

$$x^2-2ax+1=0$$

Din prima se scoate:

$$x_1=-1\pm\sqrt{a+1},$$

iar din a doua

$$x_2=a\pm\sqrt{a^2-1}.$$

Din expresiunile lui $x_1$ și $x_2$ se vede că dacă: $1^0$ $a<-1$, $x_1$ dă două valori imaginare, iar $x_2$ două valori reale, $2^0$ $-1<a<1$, $x_1$ dă două valori reale și $x_2$ două imaginare; $3^0$ $x>1$, $x_1$ și $x_2$ valori reale.

Se deduce de aci că pentru ca ecuația să aibă numai 2 rădăcini reale e destul ca

$$a<1$$

și pentru ca toate să fie reale trebue ca $a>1$.

In fine, dacă $a=1$ avem numai două rădăcini egale, iar dacă $a=-1$ toate rădăcinile sînt egale.

**Problema 65.**— *Să se probeze că:*

$$1^p - \frac{n}{1}2^p + \frac{n(n-1)}{1.2}3^p - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}4^p + \ldots\ldots = 0$$

*$n$ și $p$ fiind două numere întregi și $p < n$.*

**(A. G. Ioachimescu.)**

*Soluție dată de D-l Bogdan Ionescu,* (Elev al Școalei Normale Superioare).

Fie : $$(1)\quad f(x) = \frac{x^p}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)},$$

numitorul fiind un polimon de gradul $n+1$, și $p < n$.

Descompunînd pe $f(x)$ în fracțiuni simple avem :

$$f(x) = \frac{a^p}{(x-a)(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + \frac{b^p}{(x-b)(b-a)\ldots(b-l)} + \ldots + \frac{l^p}{(x-l)(l-a)\ldots(l-k)}.$$

Or în $f(x)$ gradul numărătorului fiind cu două unități cel puțin mai mic ca al numitorului, avem:

$$\frac{a^p}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} + \frac{b^p}{(b-a)\ldots(b-l)} + \ldots + \frac{l^p}{(l-a)\ldots(l-k)} = 0.$$

Presupunînd că $a$, $b$..., $l$ formează o progresiune aritmetică, în care primul termen este $a$ și rația $r$, avem:

$$\frac{(-1)^n a^p}{1.2.3\ldots n} + \frac{(-1)^{n-1}(a+r)^p}{1..2.3\ldots(n-1)} + \ldots + \frac{(-1)(a+nr)^p}{n(n-1)\ldots3.2.1} = 0,$$

relațiune în care dînd lui $a$ și $r$ diferite valori obținem diferite identități. In particular făcînd $a=r=1$, obținem identitatea propusă.

# PROBLEME PROPUSE

*116. Se consideră ecuațiunea:

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 = 0,$$

în care presupunem $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 < 0$. Să se demonstreze (prin algebra elementară) că această ecuație nu admite alte valori reale pentru $x$ și $y$ afară de valorile $x=\alpha$, $y=\beta$. (C. Gogu.)

117. Să se rezolve ecuațiunea:

$$(x+a)(x+a+b)(x+a+b+c)(x+a+b+c+2d)(x+a+b+2c+2d)\times$$
$$(x+a+2b+2c+2d)=(b+c+d)^2(c+d)^2d^2.$$

(Constanța Pompilian.)

*118. Fie A′, B′, C′ picioarele bisectriţelor interioare ale unui triunghiu ABC; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ lungimile bisectriţelor AA′, BB′, CC′; $a$, $b$, $c$ laturile triunghiului; R, $r$ raza cercului circumscris și a cercului înscris, S aria triunghiului ABC și S′ aria triunghiului A′B′C′. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha a^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta b^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma c^2}=\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\times\frac{S'}{S}.$$

(V. Cristescu.)

119. Să se probeze că produsul

$$\frac{2^3+2+1}{2^3-2}\times\frac{3^3+3+1}{3^3-3}\times\ldots\ldots\ldots\times\frac{n^3+n+1}{n^3-n}$$

este convergent și cînd $n$ tinde către $\infty$, valoarea sa tinde către o limită finită mai mică ca $e^{\frac{7}{4}}$, $e$ fiind baza logaritmilor neperieni.

(Bogdan Ionescu.)

*120. Să se găsească, în mod elementar, valorile maxime și minime ale produsului: $(x-3)(2x+1)(3x-1)$. (C. Miclescu)

*121. Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris unui triunghiu al cărui vîrf A este fix, iar latura opusă BC trece printr'un punct fix, vîrfurile B și C rămînînd pe o circonferenţă dată. (I. Moscuna.)

*122. Să se transforme expresiunea:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{3(1-\sqrt{5})}}$$

într'o alta calculabilă prin logaritmi. (Gr. N. Makarie.)

Problemele însemnate cu * se pot rezolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior :

1) Articolul trimes de D-l *A. Iliovici.*

2) Probleme propuse de D-nii *C. Lupu, Gr. N. Makarie, C. Miclescu* și *I. Moscuna.*

3) Probleme rezolvite de D-nii: *I. Anastasiadi* (91, 93); *A. Bărcăcilă* (73); *A. Iliovici* (56, 61, 67, 70, 72, 73, 75, 79, 82, 86, 89, 91, 92, 93); *G. Iliovici* (61) ; *D. Ioachimescu* (73, 89, 93); *Alex. Ionescu* (72, 93); *Bogdan Ionescu* (68, 71, 74, 78, 80, 91); *C. Ionescu* (79, 89); *C. Lupu* (88, 96, 102); *Gr. N. Makarie* (61, 63, 68, 69, 71, 73, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 93, 95, 99, 101, 102, 103); *M. Mateescu* (69, 73, 82); *C. Mateiescu* (67, 69, 70, 72, 82, 83, 89); *I. Moscuna* (71, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 98, 102, 104, 105, 107, 109, 112, 114); *N. Negoescu* (61); *I. Negretzu* (102, 115); *D. Negulescu* (68, 71, 78); *B. Paraschivescu* (66, 69, 72, 83, 89, 93, 99); *I. Penescu* (91, 93); *D. Poenaru* (83); *C. Popescu* (61, 66, 69, 70, 83, 87); *C. Popovici* (66, 70, 72, 73, 79, 86, 89, 93); *C. Rădulescu* (73); *L. I. Rădulescu* (79); *C. N. Răileanu* (61, 73) ; *T. Săvulescu* (89, 93); *L. Scherer* (75); *I. Stroescu* (62); *N. Trandafirescu* (68, 70, 72); *C. Virgiliu* (79, 89).

Probleme nerezolvite: 22, 23, 24, 76, 77, 84, 85, 97, 100, 106, 108, 110, 111, 113.

**Erata.** La *problema 97* strecurîndu-se o eroare de tipar, dăm din nou enunțul său:

*97. *Să se arate că numărul*

$$2^{8n+3}\cdot 3^{3n}\cdot 5^{2n+3}+2^{n+1}\cdot 3^{n}\cdot 7^{n}+127\cdot 3^{n+1}\cdot 5^{n+2}-2^{4n}\cdot 3^{2n}\cdot 5^{2n+1}$$

*este totdeauna divizibil prin* 1896. *Numărul întreg n nu poate fi egal cu zero.*

# SPRE STIINTA

*Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București, sau D-lui G. Țițeica, Profesor, Calea Rahovei, 46, București.*

*Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.*

*De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.*

*Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.*

*Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariținne se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.*

---

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.