GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 11.—IULIE 1896.

SUMARUL

1. Un mod de generare a elipsei . . . . . *A. Iliovici*
2. Instrumente logaritmice.—Rigla de calcul. *Z.*
3. Chestiuni date la concursuri în scris.
4. Probleme rezolvite 56, 61, 62, 66, 69, 70, 72, 88.
5. Probleme propuse.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacţia *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanţa, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

UN MOD DE GENERARE A ELIPSEI

I. *Să considerăm două circonferențe cu centrele* o, O *și fie* a, A *punctele care determină distanța minimă între ele. Pe fie-care din cele două circonferențe, plecînd din punctele* a, A *să luăm arcele asemenea* anm, ANM. *Locul punctului* P *care divide dreapta* mM, *într'un raport constant:*

$$\frac{PM}{Pm} = \frac{p}{q}$$

este o elipsă.

Pentru a demonstra această proprietate să luăm mai întâi arcele *anb*, ANB, de cîte 90° și să ducem diametrele BB′, *bb′*. Pe dreptele B*b* și B′*b′* să luăm punctele P′, P′$_1$ așa fel ca:

$$\frac{P'B}{P'b} = \frac{P'_1B'}{P'_1b'} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

Punctele P′, P′$_1$ vor fi două puncte ale locului căutat. Dreapta P′P′$_1$ este paralelă cu BB′ și *bb′* și prin urmare perpendiculară pe O*o*; iar lungimea ei este dată de expresia:

$$P'P'_1 = \frac{2Rq + 2rp}{p+q}, \qquad (a)$$

în care R, *r* sînt razele circonferențelor O, *o* [1]). Dacă punem:

$$P'P'_1 = 2\alpha,$$

---

[1]) Această formulă se poate afla în modul următor. In trapezul BB′*b′b* să ducem diagonalele B*b′*, B′*b* care întretaie dreapta P′P′$_1$ în punctele Q, Q′. In triunghiurile asemenea *b*′QP′$_1$, *b*′BB′ și BQP′ B*b′b* avem:

$$\frac{QP'_1}{BB'} = \frac{P'_1b'}{Bb'}, \text{ și } \frac{QP'}{bb'} = \frac{P'B}{B'b} \qquad (1')$$

Dar din egalitățile (1) scoatem:

$$\frac{P'_1b'}{B'b'} = \frac{q}{p+q}, \quad \frac{P'B}{Bb} = \frac{p}{p+q},$$

și prin urmare egalitățile (1′) ne dau:

$$QP'_1 = \frac{2Rq}{p+q}, \quad QP' = \frac{2rp}{p+q},$$

de unde:
$$P'P'_1 = QP'_1 + QP' = \frac{2Rq+2rp}{p+q}.$$

Avem apoi:
$$Q'P'_1 = QP' = \frac{2rp}{p+q}$$

și deci:
$$QQ' = QP'_1 - Q'P'_1 = \frac{2Rq-2rp}{p+q}.$$

vom avea: $$\alpha=\frac{Rq+rp}{p+q} \qquad (2)$$

Să luăm acuma acele ANA', ana' de cîte 180°. Pe dreptele A'a' și Aa să luăm punctele P'' și P''$_1$ așa fel ca:

$$\frac{P''A'}{P''a'}=\frac{P''_1A}{P''_1a}=\frac{p}{q}. \qquad (3)$$

Punctele P'', P''$_1$ vor fi de asemenea două puncte ale locului căutat. Din egalitățile (3) scoatem:

$$\frac{P''A'}{a'A'}=\frac{P''_1A}{aA}=\frac{p}{p+q},$$

de unde: $$P''A'=\overline{a'A'}\times\frac{p}{p+q};\quad P''_1A=\overline{aA}\times\frac{p}{p+q},$$

și dacă punem: $$Oo=d,$$

avem: $$P''A'=(d+R+r)\frac{p}{p+q};\quad P''_1A=(d-R-r)\frac{p}{p+q}. \qquad (4)$$

Fie O' punctul de intersecție al dreptelor P'P'$_1$ și P''P''$_1$. Observăm după figură că:

$$O'P''=O'A'-P''A'. \qquad (4')$$

Dar $$O'A'=R+OO'$$

și $$\frac{OO'}{Oo}=\frac{BP'}{Bb}=\frac{p}{p+q},$$

de unde: $$OO'=d\times\frac{p}{p+q},$$

și deci: $$O'A'=R+d\times\frac{p}{p+q}.$$

Egalitatea (4') ne va da atunci:

$$O'P''=R+d\times\frac{p}{p+q}-(d+R+r)\times\frac{p}{p+q},$$

sau: $$O'P''=\frac{Rq-rp}{p+q}. \qquad (5)$$

De asemenea observăm că:

$$O'P''_1=OP''_1-OO'=R+P''_1A-OO' \qquad (5')$$

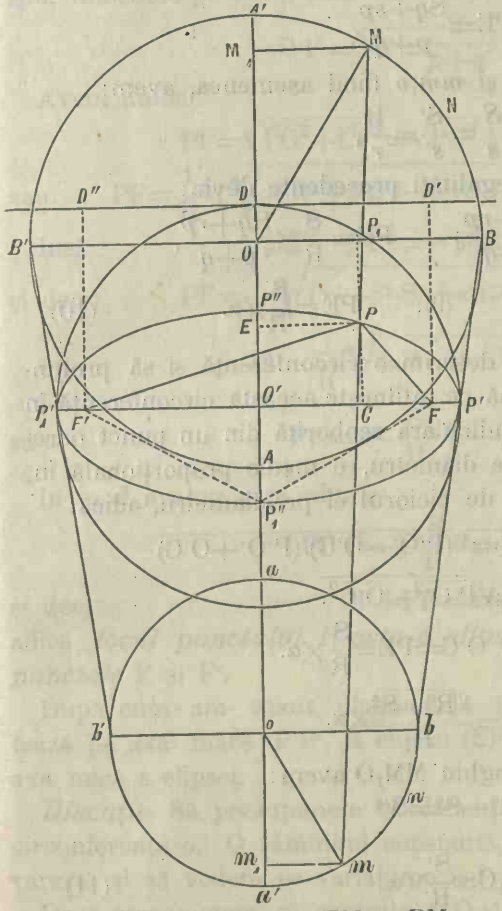
și înlocuind pe P''$_1$A și OO' prin valorile găsite mai sus, obținem:

$$O'P''_1=R+(d-R-r)\frac{p}{p+q}-d\times\frac{p}{p+q},$$

sau $$O'P_1''=\frac{Rq-rp}{p+q}. \qquad (6)$$

Egalitățile (5) și (6) ne arată că $O'P''=O''P_1$, și dacă punem deci:

$$P''P''_1=2\beta,$$



vom avea:

$$\beta=\frac{Rq-rp}{p+q}. \qquad (7)$$

O' este dar mijlocul comun al dreptelor perpendiculare $P'P'_1$ și $P''P''_1$.

Acestea fiind stabilite, să luăm acuma arcele asemenea ANM, anm și să considerăm punctul P care împarte dreapta Mm în raportul

$$\frac{PM}{Pm}=\frac{p}{q}.$$

Vom demonstra că locul punctului P este o elipsă care are ca axe dreptele $P'P'_1$, $P''P''_1$. Pentru aceasta să ducem dreptele MM_1, mm_1 și $PE=CO'$ paralele la $P'P'_1$. Notăm apoi $MM_1=S$, $mm_1=s$, $MO_1=S'$, $m_1o=s'$. De pe figură observăm că:

$$PC=EO'=M_1O'-M_1E. \quad (8)$$

Insă

$$M_1O'=M_1O+OO'=S'+d\times\frac{p}{p+q};$$

iar

$$\frac{EM_1}{Em_1}=\frac{PM}{Pm}=\frac{p}{q},$$

de unde

$$EM_1=M_1m_1\times\frac{p}{p+q}=(S'+s'+d)\frac{p}{p+q}.$$

Inlocuind în (8) pe M_1O' și EM_1 prin valorile găsite, obținem:

$$PC=\frac{S'q-s'p}{p+q}.$$

Pentru a obține lungimea dreptei PE, observăm că punctele P

și E împart laturile neparalele ale trapezului MM_1m_1m în raportul $(p:q)$. Lungimea ei va fi dar, după formula (a):

$$PE=\frac{Sq+sp}{p+q}.$$

Insă triunghiurile MM_1O și mm_1o fiind asemenea, avem:

$$\frac{S}{s}=\frac{S'}{s'}=\frac{R}{r},$$

și prin urmare cele două egalități precedente devin:

$$PC=\frac{S'}{R}\times\frac{Rq-rp}{p+q}; \qquad PE=\frac{S}{R}\times\frac{Rq+rp}{p+q},$$

sau: $$PC=\frac{S'}{R}\times\beta \quad (9); \qquad PE=\frac{S}{R}\times\alpha. \quad (10)$$

Pe $P'P'_1$ ca diametru să descrim o circonferență și să prelungim perpendiculara CP până ce întîlnește această circonferență în punctul P_1. Știm că perpendiculara scoborîtă din un punct oarecare a unei circonferențe pe diametru, e medie proporțională între segmentele determinate de piciorul ei pe diametru, adică:

$$P_1C=\sqrt{P'C\times P'_1C}=\sqrt{(P'O'-O'C)\,(P'O'+O'C)}$$

sau $$P_1C=\sqrt{P'O'^2-O'C^2}.$$

Dar $$P'O'=\alpha \text{ și } O'C=PE=\frac{S}{R}\times\alpha.$$

Deci $$P_1C=\frac{\sqrt{R^2-S^2}}{R}\times\alpha.$$

Insă în triunghiul dreptunghiu MM_1O avem:

$$R^2-S^2=S'^2$$

și prin urmare:

$$P_1C=\frac{S'}{R}\times\alpha. \quad (11)$$

Impărțind una prin alta egalitățile (9) și (11), obținem:

$$\frac{PC}{P_1C}=\frac{\beta}{\alpha}=\text{constant}.$$

Deci, după o teoremă cunoscută, *locul punctului P este o elipsă* (Σ) *ale cărei axe sînt* 2α și 2β.

c.c.e.d.d.

Putem stabili această proprietate și în alt mod.

Să luăm pe dreapta $P'P'_1$ două puncte F și F' așa fel ca:

$$O'F=O'F'=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

sau, înlocuind pe α și β prin valorile lor (2) și (7):

$$O'F=O'F'=\frac{2}{p+q}\sqrt{Rrpq}.$$

Avem atunci:

$$PF=\sqrt{PC^2+CF^2}=\sqrt{PC^2+(O'F-O'C)^2}$$

sau $$PF=\frac{1}{R}\times\sqrt{\alpha^2R^2+\beta^2S'^2-\beta^2R^2+S^2\alpha^2-2S\alpha R\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.$$

Insă $$\beta^2S'^2-\beta^2R^2=-\beta^2(R^2-S'^2)=-\beta^2S^2,$$

și deci: $$PF=\frac{1}{R}\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)S^2+\alpha^2R^2-2\alpha RS\sqrt{\alpha^2-\beta^2}},$$

$$PF=\frac{1}{R}\sqrt{(\alpha R-S\sqrt{\alpha^2-\beta^2})^2},$$

sau $$PF=\alpha-\frac{S}{R}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

In mod analog vom obține:

$$PF'=\alpha+\frac{S}{R}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

și deci: $$PF+PF'=2\alpha,$$

adică, *locul punctului P este o elipsă ale cărei focare sînt punctele* F și F'.

După cum am văzut, diagonalele trapezului $BB'b'b$ interceptează pe axa mare $P'P'_1$ a elipsei (Σ) un segment QQ' egal cu axa mică a elipsei.

Discuție. Să presupunem că distanța d a centrelor celor două circonferențe o, O rămînînd constantă, una din raze, r spre ex. variază și să vedem ce variațiune suferă locul geometric aflat.

Dacă presupunem că centrele o, O sînt fixe, atunci și centrul O' al elipsei Σ e fix, căci avem:

$$O'O=d\times\frac{p}{p+q}=\text{Const.}$$

Pentru a ne fixa și mai bine ideile vom presupune că raportul constant $(p:q)$ este mai mic ca unitatea, cum e cazul figurei.

1) Dacă $r=o$, formulele (2) și (7) ne dau:

$$\alpha=\beta=\frac{Rq}{p+q}.$$

Elipsa devine deci o circonferență. In adevăr cazul acesta se reduce la o problemă cunoscută: *Locul geometric al punctelor ce împart dreptele duse din un punct fix, la diferitele puncte ale unei circonferențe, într'un raport constant*, loc care se știe că e o circonferență omotetică cu circonferența dată, centrul de omotetie fiind punctul fix [1]).

2) Dacă $r=R$, atunci avem:

$$\alpha=R, \qquad \beta=R\times\frac{q-p}{p+q}.$$

In acest caz deci axa mare a elipsei este egală cu diametrul circonferențelor.

3) Dacă $$r=\frac{Rq}{p}, \text{ sau } \frac{r}{R}=\frac{q}{p},$$

atunci $$\alpha=\frac{2Rq}{p+q} \qquad \beta=o.$$

Elipsa (Σ) se reduce la o linie dreaptă. In adevăr în acest caz formula:

$$PC=\frac{S'}{R}\times\frac{Rq-rp}{p+q},$$

ne arată că PC e necontenit nul, adică punctele P se găsesc toate pe dreapta $P'P'_1$.

4) Dacă $$r>\frac{Rq}{p}, \text{ sau } \frac{r}{R}>\frac{q}{p},$$

atunci formula (7) ne arată că β devine negativ. Acest lucru se explică în modul următor. Cînd $r<\frac{Rq}{p}$ atunci punctul P'' este situat deasupra lui O' și P''_1 dedesuptul lui O', după cum e cazul figurei. Cînd $r=\frac{Rq}{p}$ atunci atît P'' cît și P''_1 se confundă cu O'; iar cînd $r>\frac{Rq}{p}$ atunci punctul P'' trece dedesuptul lui O', iar P''_1 trece deasupra lui O' în cît egalitățile (4') și (5') în acest caz trebuesc scrise:

$$O'P''=P''A-O'A' \text{ și } O'P''_1=OO'-OP''_1$$

care ne dau atunci și una și alta

[1]) Vezi *C. Climescu*, Geometrie elementară, pag. 125, problema 6.

$$\beta = O'P'' = O'P''_1 = \frac{rp - Rq}{p+q},$$

valoare pozitivă.

Aceiași interpretare trebue dată valoarei negative ce-am obține pentru β, în caz cînd presupunem că centrul O e fix precum și punctul a, iar centrul O se îndepărtează sau se apropie o dată cu variația lui r. In acest caz punctul P''_1 e fix, iar punctele P'' și O' variabile. Cînd formula (7) ne dă pentru β o valoare pozitivă, atunci punctele O' și P'' (deci și elipsa) sînt situate deasupra punctului P''_1. Cînd $\beta = o$, cele trei puncte se confundă; iar cînd β devine negativ, punctele O' și P'' (deci și elipsa), sînt dedesuptul lui P''_1, iar formula (7) trebue scrisă în acest caz:

$$\beta = \frac{rp - Rq}{p+q}.$$

Să presupunem acuma că variază distanța d a centrelor celor două circonferențe o, O, iar că razele r, R rămîn constante. Formulele (2) și (7) ne arată că α și β sînt de asemenea constante, de oarece nu depind de d. Prin urmare:

Cînd centrele circonferențelor o, O, *se îndepărtează unul de altul, razele lor însă rămînînd invariabile, elipsa* (Σ) *se deplasează și ea, rămînînd însă necontenit de aceiași mărime.*

Dacă $d = o$, iar $r = R$, adică dacă cele două circonferențe coincid, atunci:

$$\alpha = R, \quad \beta = R \times \frac{q-p}{p+q};$$

axa mare a elipsei e un diametru al circonferenței, iar punctele P sînt niște puncte ce împart coardele perpendiculare pe diametru în părți proporționale cu p și q.

II. *Cînd centrul* O *și punctul* a *sînt fixe și raza* R *constantă, iar raza* r *variază de la* 0 *la* ∞, *locul geometric al focarelor tuturor elipselor* (Σ), *e o paralelă al cărui focar e punctul* P''_1 *și a cărei directrice este tangenta dusă în* D *la circonferența descrisă pe* $P'P'_1$ *ca diametru.*

D fiind punctul unde circonferența descrisă pe $P'P'_1$ ca diametru, întîlnește pe $A'a'$, tangenta în punctul D la această circonferență este paralelă cu $P'P'_1$. Punctele A, a fiind fixe prin ipoteză, urmează că și punctul P''_1 care împarte pe Aa în raportul constant $(p : q)$

este fix. Vom arăta că și tangenta D rămîne fixă, ori cît ar varia r.

In adevăr avem:

$$OD=O'D-OO'=O'P'-OO'.$$

Insă am văzut că:

$$O'P'=\frac{Rq+rp}{p+q},$$

iar

$$OO'=d\times\frac{p}{p+q},$$

sau

$$OO'=(R+r+i)\frac{p}{p+q},$$

i fiind lungimea invariabilă Aa. Inlocuind în expresiunea lui OD pe $O'P'$ și OO' prin valorile lor, obținem:

$$OD=R\times\frac{q-p}{p+q}-i\times\frac{p}{p+q}=\text{Const.}$$

egalitate care ne arată că tangenta în D este fixă, de oare-ce și punctul O e fix.

Fie acum D' piciorul perpendicularei scoborîte din F pe tangentă în D.

Avem:

$$FD'=O'D=O'P'.$$

Insă după o proprietate cunoscută a elipsei, avem:

$$O'P'=FP''_1,$$

și deci

$$FD'=FP''_1.$$

In mod analog vom obține:

$$F'D''=F'P''_1.$$

Focarele F, F' sînt deci egal depărtate de un punct fix și o dreaptă fixă. Locul lor e prin urmare o parabolă..

Observăm apoi că unghiul $P'DP'_1$ este drept și are ca bisectriță pe DA. Prin urmare cînd punctele a și O sînt fixe, R constant iar r variabil, *locul geometric al extremităților axelor mari ale elipselor* (Σ) *se compune din două drepte ce trec prin* D *și fac unghiuri de* 45° *cu dreapta* DA.

A. Iliovici.

INSTRUMENTE LOGARITMICE—RIGLA DE CALCUL

(Urmare)

II. Dosul liniuței.

Pe dosul liniuței sînt trasate diviziunile a trei scări și anume, pe

cele două margini *scara sinuselor* și *scara tangentelor* (însemnate cu S și T) iar la mijloc o scară cu diviziunile egale, care servește la aflarea logaritmilor.

A. *Funcțiunile trigonometrice.*

6). Scara sinuselor.

Se scoate liniuța din culcușul ei și se așează la loc ast-fel ca scara sinuselor de pe dosul ei să coincidă cu partea superioară a liniei. Pentru a găsi sinusul unui unghiu oare-care α, se caută acest unghiu pe scara sinuselor, iar în dreptul lui se citește, pe scara superioară a liniei, valoarea sinusului căutat.

Sinusele unghiurilor coprinse între $0^0 35'$ și $5^0 45'$ se citesc pe întâia scară superioară (0,01—0,10), iar a celor coprinse între $5^0 45'$ și 90^0, pe a doua scară superioară (0,10—1,00).

Operațiunile $a \times \sin\alpha = b$ și $a : \sin\alpha = c$ se efectuează cu scara sinuselor (dosul liniuței) ca și înmulțirile și împărțirile simple cu ajutorul feței liniuței, după cum indică figurile 30 și 31 (planșa I din No. 6 al Gazetei). Se înțelege că aci, ca și la operațiunile simple, se întrebuințează indexul drept, ori de câte ori rezultatul ar cădea dincolo de extremitatea liniei, prin întrebuințarea indexului stîng.

Figurile 32 și 33 arată poziționile liniei și liniuței pentru exemplele:

$$4 \times \sin 3^0 = 0{,}209 \text{ și } 62 : \sin 4^0{,}20' = 15{,}88.$$

Pentru determinarea numărului cifrelor rezultatului avem următoarea regulă:

Dacă n este numărul cifrelor numărului a care se înmulțește sau se împarte cu un $\sin\alpha$, atunci produsul va avea:

$n-2$ cifre dacă cade la dreapta numărului dat a și în aceeași scară

$n-1$ » » » » { dreapta » » » » » scara următ.
{ stînga » » » » » scara preced.

n » » » » stînga » » » » » aceeași scară

iar cîtul va avea:

$n+2$ cifre dacă cade la stînga numărului dat a și în aceeași scară

$n+1$ » » » » { stînga » » » » » scara preced.
{ dreapta » » » » » scara următ.

n » » » » dreapta » » » » » aceeași scară.

Exemple.—

1°) $5 \times \sin 1^\circ = 0.0873$; $n-2=-1$

2°) $5 \times \sin 3^\circ = 0.2617$; $n-1=0$

3°) $5 \times \sin 15^\circ = 1.2940$; $n = 1$

4°) $0{,}5 : \sin 2^\circ = 14{,}35$; $n+2=2$

5°) $0{,}5 : \sin 4^\circ = 7{,}17$; $n+1=1$

6°) $0{,}025 : \sin 30^\circ = 0{,}05$; $n = -1$

Ca aplicație directă vom da cîte-va exemple de rezolvire de triunghiuri.

7°) Într'un triunghiu ABC se dă $A=10^\circ$; $B=20^\circ$ și $b=60^m$. Se cere latura a.

$$a = \frac{60 \times \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = 30^m,45$$

Această operațiune se face cu ajutorul riglei, dintr'o singură dată, după cum se vede în figura 34.

Dacă n e numărul cifrelor numărului b, atunci rezultatul a va avea:

n cifre dacă cade pe aceeași scară ca și b

$n+1$ » » » în scara următoare.

$n-1$ » » » » » precedentă.

8°) Într'un triunghiu ABC se dă: $a=30^m$; $b=50^m$ și $A=10^\circ$ se cere unghiul B.

$$\sin B = \frac{\sin 10}{30} \times 50 = \sin 16^\circ 50'$$

Această operațiune se face iarăși dintr'o singură dată, dupe cum se vede în fig. 35.

Alt mod pentru aflarea sinusclor. — Sinusele unghiurilor se pot afla într'alt mod, fără a mai scoate liniuța din culeușul ei, ci numai întrebuințînd indexul ce se află pe dosul liniuței și la extremitatea ei dreaptă.

Pentru aceasta, după ce se întoarce linia cu fața în jos și se deplasează liniuța pînă cînd unghiul (citit pe dosul liniuței) al cărui sinus se caută, vine în dreptul sus numitului index, se reintoarce linia cu fața în sus și se citește sinusul căutat pe una din scările superioare ale liniuței, în dreptul celui de al treilea index al liniei (fig. 38).

Exemplu. $\sin 20^0 = 0.342$

$\sin 4^0 20' = 0.0753.$

Procedînd ast-fel se poate afla și patratul unui sinus ($\sin^2\alpha$), căci pentru aceasta este de ajuns să se caute pe scara superioară a liniei numărul ce a apărut pe liniuță în dreptul celui de al treilea index al liniei; și să se însemneze cu cursorul; este evident că în dreptul lui și pe liniuță se va citi patratul căutat ($\sin^2\alpha$).

Este de observat și aci că sinusele unghiurilor coprinse între $0^0 35'$ și $5^0 45'$ (a căror valoare este de forma $0{,}0n$) apar pe întâia scară a liniuței, iar sinusele unghiurilor coprinse între $5^0 45'$ și 90^0 (a căror valoare este de forma $0{,}n$) apar pe a doua scară.

Pentru calcularea sinuselor și cosinuselor, (mai ales în cazul sinuselor mari și cosinuselor mici) se poate întrebuința în mod foarte rațional valoarea lui $\sin^2$, utilizînd relațiunea:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

7). Scara tangentelor

Cînd liniuța este scoasă din culcușul ei și reașezată după cum s'a explicat la paragraful precedent, scara tangentelor coincide cu partea inferioară (scara numerilor) a liniei [1]). Cu această dispoziție se pot citi direct pe linie tangentele unghiurilor coprinse între $5^0 43'$ și 45^0 (0,1—1).

Tangentele unghiurilor mai mici ca $5^0 43'$ se obțin atunci prin ajutorul scărei sinuselor. Eroarea ce se comite prin această substituție de scări este negligeabilă, față de aproximația ce ne-o dă rigla, această eroare nemanifestîndu-se de cît la a patra cifră zecimală, de oare-ce $\sin 5^0 42' = 0{,}0993...$, iar tang $5^0 42' = 0{,}099813$.

Dacă însă tangentele acestor unghiuri se înmulțesc cu numere mari, atunci, eroarea putînd deveni simțitoare, este bine să se facă

[1]) La unele rigle, liniuța trebue scoasă din nou din culcușul ei și reașezată ast-fel ca scara tangentelor să coincidă cu partea superioară a liniei. Atunci, ca și la sinuse, tangentele se citesc pe partea superioară a liniei și anume: tangentele unghiurilor coprinse între $0^0 34'$ și $5^0 43'$ pe întâia scară (0,01—0,1) iar ale unghiurilor coprinse între $5^0 43'$ și 45^0 pe a doua scară superioară (0,1—1,00).

Cu această dispoziție, de și se pot citi direct tangentele tuturor unghiurilor, aproximația însă e mai mică ca în cazul cel-lalt, de oare-ce diviziunile scărilor superioare sînt pe jumătatea celor ale scărei inferioare.

o corecțiune și anume să se sporească valoarea sinusului cu $^1/_{300}$, cu alte cuvinte să se ia pentru tangenta α valoarea $\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{300}$ și aceasta numai pentru unghiuri cuprinse între 3°30′ și 5°43′, căci pentru unghiuri mai mici ca 3°30′ diferința este negligeabilă. In realitate corecțiunea aceasta ar trebui să fie variabilă cu unghiul, dar valoarea medie $\frac{1}{300}$ e mai mult de cît suficientă pentru operațiunile ce se fac cu rigla și apoi este și lesne de numerotat.

Operațiunile $a\,\mathrm{tg}\alpha$ și $a:\mathrm{tg}\alpha$ se efectuează cu scara inferioară, ca și operațiunile cu sinuse cu cea superioară. Pentru determinarea numărului cifrelor rezultatului avem următoarea regulă:

Dacă n e numărul cifrelor numărului a, care se înmulțește sau se împarte cu $\mathrm{tg}\alpha$, atunci produsul va avea n sau $n-1$ cifre, după cum cade la stînga sau dreapta numărului a; iar cîtul va avea $n+1$ sau n cifre după cum cade la stînga sau dreapta lui a.

Ca aplicație directă vom da un exemplu de rezolvire de triunghiuri. Intr'un triunghiu dreptunghiu se dă cateta $b=500^m$ și unghiul $C=17°40'$; se cere cateta c.

$$c=500\times\mathrm{tg}17°40'=159^m,2$$

Figura 36 arată poziționea liniei și liniuței pentru efectuarea acestei operațiuni.

Se înțelege că pentru unghiuri coprinse între 45° și 90° se ia complementul, așa

$$400\times\mathrm{tg}60°=400:\mathrm{tg}30°=692^m,5$$ (fig. 37).

(Va urma) Z.

Chestiunile propuse la concursul inscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Gimnaziul din Rîmnicul-Vilcei.

(București, Iunie 1896)

Aritmetică.

Dacă suma patratelor a două numere prime între ele este un patrat perfect, produsul lor este divizibil cu 6.

Algebră.

Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$x^2+4xy-2y^2=5(x+y),$$
$$5x^2-xy-y^2=7(x+y).$$

(Timpul acordat pentru fie-care chestiune 3 ore).

Chestiunile propuse la concursul inscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Externatul secundar de fete din Ploești.

(București, Iunie 1896)

Aritmetică.

Să se afle valoarea actuală a unei rente viagere de 4500 lei, constituită pentru două persoane, una în vîrstă de 53 ani, alta de 58, până la moartea amîndorora [1].

Geometrie.

In planul unui cerc fix se dă un punct fix P, care se unește cu extremitățile unui diametru mobil AB. Să se găsească locul centrului cercului circumscris triunghiului PAB.

Algebră.

Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Chestiunile de matematici propuse la examenul inscris de bacalaureat din Iași.

(Sesiunea Iunie 1896)

1) Să se rezolve ecuația

$$x+\frac{1}{x}=2.$$

2) Să se afle suprafața unui triunghiu echilateral, a cărui latură este de 2 metri, cu o aproximație de un decimetru patrat.

PROBLEME REZOLVITE

***Problema 56.**— *Fie H punctul de întîlnire al înălțimilor unui triunghiu ABC și I centrul cercului înscris. Dacă*

[1] Dăm enunciul chestiunei ast-fel cum a fost propusă la concurs. De alt-fel enunciul este incomplect, de oare-ce nu s'a dat procentul și condițiunile de asigurare. Mai mult încă, candidaților nu le-a fost permis a se servi de table de logaritmi, de interese și de mortalitate. (*Nota Redacției.*)

însemnăm cu δ unghiul pe care HI îl face cu latura BC, să se demonstreze că avem:

$$\sin^2\delta=\frac{\left(\cos B\cos C-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}{8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-\cos A\cos B\cos C}.$$

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-l A. Iliovici (Elev în Clasa VII a Liceului din Iași).

Fie D și E piciorul bisectriței și a înălțimei corespunzătoare laturei BC Din punctul I să ducem perpendicularele IK, IM pe dreptele AE, BC. Triunghiul dreptunghiu IHK ne dă:

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{HK}{IK}. \qquad (1)$$

Să calculăm pe HK și IK în funcțiune de elementele triunghiului dat.

Avem: $$HK=HE-KE=HE-IM. \qquad (2)$$

In triunghiul dreptunghiu HBE avem:

$$HE=BE\operatorname{cotg}C.$$

Dar $$BE=c\cos B,$$

și deci $$HE=c\cos B\operatorname{cotg}C. \qquad (3)$$

IM este raza cercului înscris, și știm că

$$IM=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \qquad (4)$$

Dacă înlocuim în (2) pe HE și IM prin valorile lor, obținem.

$$HK=\frac{c}{\sin C}\left(\cos B\cos C-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right). \qquad (5)$$

De altă parte avem:

$$IK=ME=BM-BE.$$

Dar $$BM=IM\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{c\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Deci: $$IK=\frac{c}{\sin C}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos B\sin C\right) \qquad (6)$$

Dacă înlocuim cu egalitatea (1) pe HK și IK prin valorile găsite, obținem:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\cos B\cos C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos B\sin C}. \qquad (7)$$

Pentru a găsi acum pe $\sin^2\delta$ ne servim de formula:

$$\sin^2\delta = \frac{\operatorname{tg}^2\delta}{1+\operatorname{tg}^2\delta},$$

care ne dă:

$$(8)\quad \sin^2\delta = \frac{\left(\cos B\cos C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}{\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos B\sin C\right)^2 + \left(\cos B\cos C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}$$

Dacă efectuăm ridicările la pătrat, și grupăm terminii, numitorul membrului al doilea al acestei egalități, se poate transforma precum urmează:

$$4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right) - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos B\times$$

$$\left(\sin C\cos\frac{B}{2} + \cos C\sin\frac{B}{2}\right) + \cos^2 B\left(\sin^2 C+\cos^2 C\right),$$

sau $$4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos B\sin\left(C+\frac{B}{2}\right) + \cos^2 B. \qquad (\alpha)$$

Dar $$C+\frac{B}{2} = C+\frac{\pi-(A+C)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2},$$

și deci $$\sin\left(C+\frac{B}{2}\right) = \cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

Expresiunea (α) devine atunci:

$$4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2}\left(1-\cos B\right) - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos B + \cos^2 B,$$

sau $$8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \sin A\cos B\sin C + \cos^2 B,$$

sau $$8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cos B(\sin A\sin C - \cos B).$$

Dar $\cos B = -\cos(A+C) = -\cos A \cos C + \sin A \sin C$,

și înlocuind pe cosB din parenteză prin această valoare, găsim că numitorul membrului al doilea al egalității (8) este

$$8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cos A \cos B \cos C,$$

ceia ce demonstră formula căutată.

***Problema 61.**—*Să se rezolve ecuația:*

$$x^5-(a-1)x^4+ax^3-(a^2-a+1)x^2+(a^2-1)x-a=0.$$

(I. Tutuc.)

Soluție dată de D-nii A. Iliovici și *C. N. Răileanu* (Elevi în clasa VII a Liceului din Iași), *N. Negoescu* (R.-Vîlcei), *Gr. N. Makarie* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele; *G. Iliovici* (Elev în Clasa V a Liceului din Iași) și *C. Popescu* (Elev în Clasa IV a Școalei Normale de institutori).

Așezînd termenii după puterile lui a, avem:

$$(x-x^2)a^2-(x^4-x^3-x^2+1)a+x^5+x^4-x^2-x=0$$

de unde

$$a_1 = -x^2-x$$

și

$$a_2 = \frac{x^3-1}{x^2-x}.$$

Deci rezolvarea ecuației propuse se reduce la rezolvarea celor două ecuațiuni:

$$x^2+x+a=0$$

și

$$x^3-ax^2+ax-1=0.$$

Din prima se scoate:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-a}.$$

Din a doua:

$$x^3-ax^2+ax-1=(x-1)[x^2+(1-a)x+1]$$

deci

$$x_2=1$$

și

$$x_3 = \frac{a-1\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2}.$$

Discuție.—1° $a<-1$. Toate rădăcinile sînt reale; 2° $-1<a<\frac{1}{4}$, 3 răd. reale și 2 imaginare (x_3); 3° $\frac{1}{4}<a<3$, o singură rădăcină reală $x_2=1$; 4° $a>3$, 3 rădăcini reale și 2 imaginare (x_2).

Problema 62.— *Să se probeze că:*

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{4n^4}+\frac{1}{6n^6}-\ldots=\frac{1}{2n^2+1}+\frac{1}{3(2n^2+1)^3}+\frac{1}{5(2n^2+1)^5}+\ldots$$

(Constanța Pompilian.)

Soluție dată de D-l I. Stroescu (București).

Primul membru al identității de mai sus este desvoltarea lui: $\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. Pe de altă parte avem:

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots,$$

făcînd în această egalitate $x=\frac{1}{2n^2+1}$, avem:

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{2n^2+2}{2n^2}=1+\frac{1}{n^2};$$

iar membrul al doilea, devine membrul al doilea al identității propuse.

***Problema 66.**—*Să se împartă un patrat dat în medie și extremă rațiune printr'un patrat construit pe două din laturile sale adiacente și avînd un unghiu comun cu primul patrat.* **(A. Iliovici.)**

Soluție dată de D-nul C. Popovici (Elev în Clasa VII a Liceului Național din Iași).

Insemnînd cu a latura patratului dat și cu x latura patratului căutat, va trebui să avem proporția:

$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{x^2}{a^2-x^2},$$

de unde obținem ecuația:

$$x^4+a^2x^2-a^4=0, \qquad (\alpha)$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$x^2_1=\frac{1}{2}a^2(\sqrt{5}-1), \qquad (1)$$

$$x^2_2=-\frac{1}{2}a^2(\sqrt{5}+1).$$

Prima rădăcină, care e pozitivă, este singură admisibilă. Ea ne dă ca latură a patratului căutat:

$$x_1 = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Se poate însă interpreta și rădăcina negativă. Această rădăcină luată cu semn schimbat, adică:

$$\frac{1}{2}a^2(\sqrt{5}+1)$$

corespunde următoarei chestiuni:

Să se construească pe prelungirile a două din laturile adiacente ale unui patrat dat un alt patrat, care să aibă un unghiu comun cu primul și ast-fel ca patratul din nou construit să fie împărțit în medie și extremă rație de către patratul dat.

In adevăr în acest caz vom avea:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2}{x^2-a^2}$$

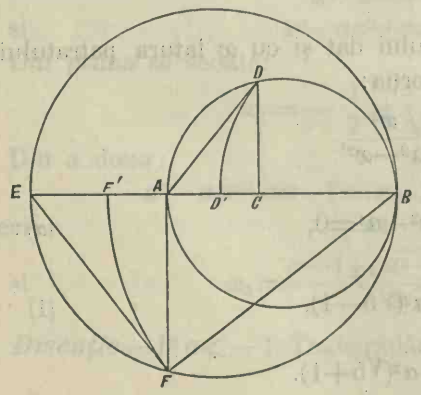
de unde:

$$x^4 - a^2x^2 - a^4 = 0, \qquad (\beta)$$

care ecuație are o singură rădăcină admisibilă:

$$x^2 = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{5}+1). \qquad (2)$$

Construcția rădăcinilor ecuațiilor (α) *și* (β). Fie $AB=a$ latura patratului dat, și C punctul situat pe dreapta AB care împarte pe AB în medie și extremă rație.



Vom avea atunci:

$$\overline{BC}^2 = AB \times AC,$$

sau $$BC = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1). \qquad (3)$$

In punctul C ridic o perpendiculară care întîlnește în punctul D circonferența descrisă pe AB ca diametru. Din punctul B ca centru și cu o rază egală cu BD descriu un arc de cerc ce întîlnește pe AB în D'. Segmentul BD' corespunde rădăcinei (1) a ecuației (α). In adevăr după o teoremă cunoscută avem:

$$\overline{BD}^2 = AB \times BC.$$

Insă $AB = a$ și înlocuind și pe BC prin valoarea sa (3), obținem:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BD'}^2 = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{5}-1).$$

Patratul construit pe BD' va fi deci cel căutat.

In mod analog putem construi patratul corespunzător rădăcinei (2) a ecuației (β). Fie pentru aceasta C' punctul situat pe prelungirea dreptei AB, (la dreapta lui B), care împarte dreapta AB în medie și extrema rație [1]) adică așa fel că:

$$\overline{BC'}^2 = AB \times C'A,$$

sau

$$BC' = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1).$$

Luăm lungimea BC' în compas și o punem din punctul B spre A pînă în E, adică luăm:

$$BE = BC' = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1).$$

In punctul A ridicăm o perpendiculară pănă ce întîlnește în punctul F circonferența descrisă pe BE ca diametru. Din B ca centru, cu BF ca rază, descrim un arc de cerc ce întîlnește pe BE în F'. Atunci BF' va fi rădăcina (2) a ecuației (β), adică latura patratului ce e împărțit în medie și extrema rație de către patratul dat. In adevăr avem:

$$\overline{BF}^2 = BE \times AB = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1) \times a$$

sau

$$\overline{BF'}^2 = \overline{BF}^2 = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{5}+1).$$

Notă. Au rezolvit aceiași chestiune D-nii: *C. Popescu* și *B. Paraschivescu.*

***Problema 69.**— *Intr'un triunghiu oare-care să se exprime* $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, *laturile, perimetrul, înălțimile și suprafața sa în funcțiune de razele cercurilor ex-înscrise.*

(N. Negoescu).

Soluție dată de D-nii C. Mateiescu, (Elev în Clasa VI de la Liceul din Craiova); *C. Popescu,* (Elev în Clasa IV de la Școala

[1]) Acest punct nu e cuprins în figură.

Normală de Institutori, București) ; *B. Paraschivescu*, (Elev în Clasa VI de la Liceul din Ploești) ; *Marin Mateescu*, (Elev în Clasa VI de la Liceul din Turnu-Severin) și *Gr. N. Makaric*.

Să însemnăm cu α, β, γ razele cercurilor ex-înscrise în unghiurile A, B, C; prin $2p$, S, h_1, h_2, h_3, perimetrul, suprafața și înălțimele corespunzătoare laturilor a, b, c ale triunghiului.

Se știe că avem :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \frac{S}{p-a}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}} = \frac{S}{p-b}, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} = \frac{S}{p-c}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dacă înmulțim două cîte două egalitățile (1) și adunăm apoi produsele ast-fel căpătate, obținem :

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = p[(p-c)+(p-a)+(p-b)] = p^2,$$

de unde :

$$p = \sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}. \quad (2)$$

Dacă înmulțim membru cu membru egalităței (1), avem :

$$\alpha\beta\gamma = pS,$$

de unde scoatem dacă înlocuim pe p prin valoarea găsită :

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}. \quad (3)$$

Dacă acum înlocuim în egalitățile (1) pe S și p prin valorile lor (3) și (2), și rezolvim apoi în raport cu a, b și c egalitățile ast fel obținute, avem :

$$a = \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}, \quad b = \frac{\beta(\gamma+\alpha)}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}, \quad c = \frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}. \quad (4)$$

Pentru a afla înălțimile ne servim de egalitățile :

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2S ;$$

S, a, b, c fiind cunoscuți, obținem :

$$h_1 = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}, \quad h_2 = \frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}, \quad h_3 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \quad (5)$$

Se știe că :

$$\alpha = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad \beta = p \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad \gamma = p \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

și dacă înlocuim pe p prin valoarea sa (2), avem :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}. \quad (6)$$

Dacă ne servim apoi de formulele :

$$\sin\theta=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}},\qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}},$$

care ne dau sinusul și cosinul în funcțiune de tangentă, obținem ușor :

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}},\ \sin\frac{B}{2}=\frac{\beta}{\sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}},\ \sin\frac{C}{2}=\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}}; \quad (7)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}},\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}},\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\alpha\beta+\beta\gamma\times\gamma\alpha}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}}. \quad (8)$$

Dacă R, r sînt razele cercului circumscris și a cercului înscris triunghiului, se știe că :

$$R=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-r);\qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

Ultima ne dă: $$r=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}, \quad (9)$$

și înlocuind în prima obținem :

$$R=\frac{1}{4}\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right).\ ^{1}) \quad (10)$$

***Problema 70.**— *Să se construiască un triunghiu T cunoscîndu-se picioarele înălțimilor triunghiului T care are ca vîrfuri mijlocul laturilor triunghiului T.* (I. Ionescu).

Soluțiune dată de D-nii N. Trandafirescu, (Elev al Anului Preparator al Școalei de Poduri și Șosele); *A. Iliovici* și *C. Popovici,* (Elevi în Clasa VII a Liceului din Iași), *C. Mateiescu,* (Elev în Clasa VI a Liceului din Craiova) și *C. Popescu,* (Elev în Anul IV al Școalei de Institutori, București).

Fie T″ triunghiul format unind punctele date. Se știe că bisectriţele triunghiului T″ sînt înălțimile triunghiului T′, și că triunghiurile T și T′ au laturile paralele. De aci rezultă următoarea construcțiune :

---

[1]) Un articol intitulat *Relațiuni între elementele unui triunghiu* și tratînd chestiunea 69, a fost publicat de Autorul chestiunei în No. 4 al *Buletinului Societății „Amicii Științelor Matematice“.* (N.R).

Ducem bisectriţele triunghiului T″ şi prin vîrfurile triunghiului T″ ducem perpendiculare pe bisectriţele aceluiaşi triunghiu. Aceste perpendiculare formează, prin intersecţia lor, triunghiul T′. Prin vîrfurile lui T′ ducem paralele cu laturile opuse, cari paralele vor determina, prin intersecţiunea lor, triunghiul căutat T.

***Problema 72.** — *Să se verifice identitatea:*

$$\frac{(b+c)\,bc}{(b-a)\,(c-a)}+\frac{(c+a)\,ca}{(c-b)\,(a-b)}+\frac{(a+b)\,ab}{(a-c)\,(b-c)}=a+b+c.$$

(I. P. Rădulescu.)

Soluţie dată de D-nii N. Trandafirescu, (Elev în Anul preparator al Şcoalei de Poduri şi Şosele): *A. Iliovici* şi *C. Popovici*, (Elevi în Clasa VII a Liceului din Iaşi); *Alex. Ionescu*, (Elev în Clasa IV de la Gimnaziul Cantemir din Bucureşti); *B. Paraschivescu*, (Elev în Clasa VI de la Liceul din Ploeşti) şi *C. Mateiescu*, (Elev în Clasa VI de la Liceul din Craiova).

Dacă înmulţim numărătorii şi numitorii fracţiunilor din primul membru, respectiv cu $(c-b)$, $(a-c)$, $(b-a)$, obţinem:

$$\frac{(c^2-b^2)cb+(a^2-c^2)ac+(b^2-a^2)ba}{(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}=a+b+c. \qquad (1)$$

Numărătorul fracţiunei din membrul întăi al egalităţei (1):

$$(c^2-b^2)cb+(a^2-c^2)ac+(b^2-a^2)ba \qquad (2)$$

se anulează dacă înlocuim pe rînd pe a prin b, pe b prin c şi pe c prin a şi prin urmare el este divizibil prin produsul $(a-b)\times(b-c)\,(c-a)$. Separaţiunea factorilor se poate face lesne, dacă punem expresia (2) succesiv sub formele ce urmează:

$$\begin{aligned}&c(a^3-b^3)-ab(a^2-b^2)-c^3(a-b,\\&(a-b)[c(b^2-c^2)-a(a+b)(b-c)],\\&(a-b)(b-c)[c^2-a^2+b(c-a)]\\&(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\end{aligned} \qquad (3)$$

Dacă înlocuim acum în egalitatea (1) expresia (2) prin (3), obţinem o identitate.

Problema 88. — *Într'un triedru tridreptunghiu se înscriu o serie de sfere. Să se găsească suprafaţa născută de curba de contact a sferelor cu conurile circumscrise lor şi avînd ca vîrf, vîrful triedrului.* (Gr. N. Makarie.)

Soluţie dată de D-nul C. Lupu (Bucureşti).

Luăm ca planuri coordonate feţele triedrului tridreptunghiu dat. Centrul unei sfere tangente la aceste feţe fiind la o distanţă de la fie-care din ele egală cu raza, ecuaţiunea generală a sferelor considerate va fi:

(1) $$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2-r^2=0$$

sau: $$x^2+y^2+z^2-2r(x+y+z)+2r^2=0.$$

Dacă printr'un punct oare-care $P(x'y'z')$ se duc tangente la una din sferele (1), curba de contact este dată prin intersecţiunea sferei cu planul polar al punctului P; ecuaţiunea acestui plan este:

$$(x-r)(x'-r)+(y-r)(y'-r)+(z-r)(z'-r)-r^2=0.$$

Cînd punctul P coincide cu origina O, avem:

$$x'=y'=z'=0$$

şi ecuaţiunea planului devine:

(2) $$x+y+z-2r=0.$$

Eliminînd parametrul variabil r între (1) şi (2) obţinem ecuaţiunea suprafeţei care este locul geometric al curbelor de contact considerate:

$$2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=o$$

Se vede imediat că această suprafaţă este un con cu vîrful în O şi de revoluţie împrejurul dreptei:

$$x=y=z$$

perpendiculară pe planul $x+y+z=0$; această dreaptă este intersecţia comună a planurilor bisectoare ale diedrelor pozitive ale coordonatelor şi locul geometric al centrelor sferelor (1). Conul este tangent planurilor coordonate de-a lungul bisectriţelor unghiurilor xoy, yoz şi zox.

PROBLEME PROPUSE

123. Să se găsească suprafaţa a cărei podară în raport cu un punct fix dat să fie o sferă dată.—Chestiunea analoagă pentru un punct şi un cerc date într'un plan. (C. Lupu.)

*124. Două circonferenţe cu centrele C şi C' se taie în punctele A şi B. Prin A se duce o secantă variabilă ce întîlneşte circonferenţa C în M şi circonferenţa C' în N. Dreptele MC, NC' se întretaie în punctul P. Se cere a se găsi maximul ariei triunghiului PCC'. (V. Cristescu.)

*125. Se dă trinomul ax^2+bx+c și se cere: 1) Să se determine a, b și c astfel ca trinomul să aibă aceiași valoare pentru $x=a$, $x=b$ și $x=c$. 2) In aceste condițiuni să se afle rădăcinele trinomului. (I. IONESCU.)

*126. Fie P un plan fix și ABCD un dreptunghiu în acest plan. Se unesc punctele A, B, C, D cu un punct S mobil în spațiu și se determină astfel o piramidă. Fie SA' proecțiunea muchiei SA pe muchea opusă SC; SB' proecțiunea muchiei SB pe muchea opusă SD, etc. Se cere locul punctelor A', B', C', D' cînd punctul S variază. (I NEGRETZU.)

127. Un fir flexibil și inextensibil este atîrnat cu o extremitate într'un punct A, după aceia trecut peste un scripete infinit mic B, așezat la același nivel cu A. Pe partea firului între A și B se află o greutate P, care se poate mișca pe fir; iar la cealaltă extremitate a firului se află o masă M, de greutate p, atrasă de un punct C situat pe aceiași verticală cu B, cu o forță funcțiune de distanță. Să se determine această funcțiune, așa că sistemul să fie în echilibru în toate pozițiunile pe care el poate să le ocupe, rămînînd însă în același plan vertical. (A. G. IOACHIMESCU.)

*128. Se dă relațiunea:

$$a^2\log(\log\alpha)^2+2ab\log(\log\alpha.\log\beta)+b^2\log\log\beta)^2=c$$

în care a, b, c sînt niște numere date, iar α, β două cantități variabile. Se cere a se calcula cea mai mică valoare a expresiunei:

$$m=\log(\alpha.\beta).$$ (GR. N. MAKARIE.)

*129. Intr'un cerc, produsul distanțelor extremităților unei coarde la o altă coardă, este egal cu produsul distanțelor extremităților acestei din urmă coarde la cea dintăi. (I. MOSCUNA)

*130. Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu avem relația:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)$$

triunghiul este isoscel. (N. TRANDAFIRESCU.)

*131. Peste un riu rectiliniu cu lățime constantă de 30 metri se află un pod, așezat normal pe direcțiunea curentului. Care sînt punctele de unde podul pare cel mai lung, cînd îl privim de la o depărtare de 24 de metri de la mal? (I. IONESCU.)

Problemele însemnate cu * se pot rezolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior :

1) Probleme propuse de D-nii *C. Lupu, Gr. N. Makarie, C. Miclescu, I. Moscuna* și *B. Paraschivescu.*

2) Probleme rezolvite de D-nii: *I. Anastasiadi* (91, 93); *A. Bărcăcilă* (73); *A. Iliovici* (67, 73, 75, 79, 82, 86, 89, 91, 92, 93); *D. Ioachimescu* (73, 89, 93); *Alex. Ionescu* (93); *Bogdan Ionescu* (68, 71, 74, 78, 80, 91); *C. Ionescu* (79, 89); *C. Lupu* (96, 102); *Gr. N. Makarie* (63, 68, 71, 73, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 93, 95, 99, 101, 102, 103, 120); *M. Mateescu* (73, 82); *C. Mateiescu* (67, 82, 83, 89); *I. Moscuna* (71, 75, 79, 81, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 98, 102, 104, 105, 107, 109, 112, 114); *I. Negretzu* (102, 115); *D. Negulescu* (68, 71, 78, 111); *B. Paraschivescu* (83, 89, 93, 99, 104); *I. Penescu* (91, 93); *D. Poenaru* (83); *C. Popescu* (83, 87); *C. Popovici* (73, 79, 86, 89, 93); *C. Rădulescu* (73); *L. I. Rădulescu* (79); *C. N. Răileanu* (73) ; *T. Săvulescu* (89, 93) ; *L. Scherer* (75) ; *N. Trandafirescu* (68); *C. Virgiliu* (79, 89).

Probleme nerezolvite: 22, 23, 24, 76, 77, 84, 85, 97, 100, 106, 108, 110, 111, 113, 116, 117, 118, 119, 121, 122.

Erata. Pagina 216 rîndul 9 de sus. A se șterge cuvintele „*va urma*".

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București, sau D-lui G. Țițeica, Profesor, Calea Rahovei, 46, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După apariție se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese d-lui I. G. Zottu, Inginer, Strada Rotari, 23, București.