GAZETA MATEMATICA

APARE O DATA PE LUNA

ANUL I.

NUMARUL 12.— AUGUST 1896.

SUMARUL

1. Soluțiunile chestiunilor date la concursul înscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Externatul Secundar de Fete din Ploești . . . . . *I. Ionescu*
2. Instrumente logaritmice.—Rigla de calcul. *Z.*
3. Notă de geometrie . . . . . *G. Țițeica*
4. Probleme rezolvite: 63, 67, 68, 73, 74, 78, 79, 80, 81, 91.
5. Probleme propuse.
6. Tabla de materii a Volumului I.
7. Tabloul numelor.

ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

TIPOGRAFIA CURȚII REGALE, F. GÖBL FII, STR. REGALĂ, 19

Redacţia *„Gazetei Matematice“* se compune din următoarele persoane :

Alexandrini Octav, ...	*Inginer.*
Constantinescu Tancred, . . .	»
Cristescu Vasile, ...	»
Davidescu Emanoil, ...	»
Ghibaldan Ioan, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Ioachimescu Andrei, ...	*Inginer*, lic. în mat.
Ionescu Ion, ...	»
Kinbaum Mauriciu, ...	»
Nicolescu Nicolae, ...	»
D-ra Pompilian Constanţa, . .	Lic. în matematici.
Roco Mihail, ...	*Inginer.*
Ţiţeica Gheorghe, ...	*Profesor*, lic. în mat.
Zottu G. Ion, ...	*Inginer.*

Soluțiunile chestiunilor propuse la concursul înscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Externatul secundar de fete din Ploești.

Aritmetica.

Să se afle valoarea actuală a unei rente viagere de 4500 lei noi, constituită pentru două persoane, una în vîrstă de 53 ani, alta de 58 ani, până la moartea amîndorora.

Pentru a rezolva această problemă vom presupune:

1) Că plata rentei se va face anual.

2) Că societatea de asigurare plătește procentul de 4%.

3) Că capitalul depus nu se va restitui.

4) Că valoarea actuală a rentei nu se sporește pentru cheltuelile de administrație, etc. și că poliția de asigurare costă 10 lei.

5) Că renta viageră începe a fi plătită de la finele primului an după depunerea capitalului, și că conform enunciului, ea nu se va transmite persoanei care va supraveți (asigurarea grupului [1]).

Fie A persoana de 53 ani și B persoana de 58 ani. Să însemnăm cu V valoarea actuală a rentei, cu C_1 porțiunea din V care corespunde rentei de 4500 lei plătibilă la finele anului I, cu C_2 porțiunea din V care corespunde rentei de 4500 lei plătibilă la finele anului II, etc. Ne propunem a determina valorile lui C_1, C_2....., cu cari apoi vom determina pe V. Să calculăm de exemplu pe C_{11}. Pentru a putea primi după 11 ani o sumă de 4500 lei, ar trebui să depunem acum o sumă x, care se poate calcula cu formula dobînzei compuse:

$$x(1+0{,}04)^{11}=4500,$$

de unde:

$$x=\frac{4500}{1{,}04^{11}}.$$

Această formulă nu ține însă seama de șansele de mortalitate ale persoanelor asigurate. Pentru a vedea cum putem ține seama și de aceasta să presupunem de o cam dată că renta de 4500 de lei ar fi constituită numai pentru persoana A. In acest caz tabla de mortalitate a lui *Deparcieux* ne arată că din 549 per-

[1]) Dacă renta se transmite complect supraviețuitorului, atunci se poate vedea ușor că capitalul de depus este suma capitalurilor pentru asigurarea rentei de 4500 lei fie-cărei persoane în parte, micșorată cu capitalul pentru asigurarea aceleiași rente grupului celor 2 persoane (până la moartea unei persoane); căci aceasta revine la asigurarea a 2 persoane aparte, dar a nu da renta uneia cît timp trăește cealaltă.

soane de 53 ani, nu rămîn în viață de cît 409 după 11 ani, adică la 64 ani etate. Dacă presupunem deci că Societatea de asigurare ar fi asigurat în același an 549 persoane A, dînsa nu ar avea de plătit (după 11 ani) suma de 4500 lei de cît la 409 persoane. Cum însă beneficiile produse prin mortalitate se repartizează asiguraților rămași în viață, rezultă că Societatea trebue să dea celor 409 persoane în viață o sumă $s > 4500$, ast-fel că să compenseze suma de 4500.549 care ar fi fost datoare să o dea, dacă cele 549 persoane ar fi trăit. Rezultă de aci:

$$549 \times 4500 = s \times 409,$$

de unde:

$$s = 4500 \times \frac{549}{409}.$$

Dar din expresiunea lui x se vede că capitalul depus este proporțional cu suma primită după un număr oare-care de ani. Depunînd capitalul x am văzut că vom lua peste 11 ani suma s. Prin urmare pentru a lua suma de 4500 ani peste 11 ani ar trebui să depunem $4500 \times \frac{x}{s}$. Dar din egalitatea precedentă se deduce că $\frac{4500}{s} = \frac{409}{549}$. Deci capitalul ce trebue depus x' este dat prin relația:

$$x' = 4500 \times \frac{x}{s} = \frac{409}{549} \times x = \frac{409}{549} \times \frac{4500}{1{,}04^{11}}.$$

In cazul problemei noastre însă intervin două persoane, și coeficientul $\frac{409}{549}$ se va modifica, după cum vom vedea. Din cauză că nu avem table de mortalitate pentru grupuri de 2 sau mai multe persoane, ne putem servi tot de tablele lui *Deparcieux* și anume în modul următor. Aceste table ne arată că din 549 persoane de 53 ani și 489 de 58 ani nu rămîn în viață peste 11 ani (adică respectiv la 64 și 69 ani) de cît respectiv 409 și 329 persoane. Pe fie-care din cele 549 dintre persoanele A o putem asocia cu fie-care din cele 489 dintre persoanele B; am putea forma deci 549×489 grupuri de 2 persoane A și B. In același mod cu persoanele rămase în viață peste 11 ani am putea face 409×329 grupuri de persoane A și B. De aci rezultă că dacă Societatea ar asigura pe cele 489×549 grupuri, dînsa nu ar avea de plătit după 11 ani de cît la 409×329 grupuri. De aci rezultă, ca și în cazul unei per-

soane, că suma ce trebue plătită va fi sporită în raportul de $\frac{489 \times 549}{409 \times 329}$, sau că pentru a avea aceiași sumă de primit (4500 lei), ar trebui redus capitalul depus în raportul de $\frac{409 \times 329}{549 \times 489}$. Deci pentru cazul nostru am avea :

$$C_{11} = \frac{409 \times 329}{549 \times 489} \times \frac{4500}{1{,}04^{11}}.$$

In același mod putem găsi și valorile lui C_1, C_2..... Observăm apoi că în tabla lui *Deparcieux*, etatea maximă e 95 ani. Deci după 95—58=37 ani, persoana B va muri de sigur, și atunci urmînd procedeul arătat mai sus, se va găsi că C_{37} și toate celelalte capitaluri C_{38},... sînt nule, căci unul din factorii numărătorului primei fracțiuni din expresiunea lui C devine nul.

Dacă acum observăm că suma tutulor capitalurilor C, împreună cu plata poliței de asigurare, ne dau valoarea lui V, vom avea observînd că toți termenii C au pe $\frac{4500}{549 \times 489}$ ca factor comun:

$$V = \frac{4500}{549.489}\left[\frac{538.476}{1{,}04^1} + \frac{526.463}{1{,}04^2} + \frac{514.450}{1{,}04^3} + \frac{502.437}{1{,}04^4} + \frac{489.423}{1{,}04^5} + \right.$$

$$\frac{476.409}{1{,}04^6} + \frac{463.395}{1{,}04^7} + \frac{450.380}{1{,}04^8} + \frac{437.364}{1{,}04^9} + \frac{423.347}{1{,}04^{10}} +$$

$$\frac{409.329}{1{,}04^{11}} + \frac{395.310}{1{,}04^{12}} + \frac{380.291}{1{,}04^{13}} + \frac{364.271}{1{,}04^{14}} + \frac{347.251}{1{,}04^{15}} +$$

$$\frac{329.231}{1{,}04^{16}} + \frac{310.211}{1{,}04^{17}} + \frac{291.102}{1{,}04^{18}} + \frac{271.173}{1{,}04^{19}} + \frac{251.154}{1{,}04^{20}} +$$

$$\frac{231.136}{1{,}04^{21}} + \frac{211.118}{1{,}04^{22}} + \frac{192.101}{1{,}04^{23}} + \frac{173.85}{1{,}04^{24}} + \frac{154.71}{1{,}04^{25}} +$$

$$\frac{136.59}{1{,}04^{26}} + \frac{118.48}{1{,}04^{27}} + \frac{101.38}{1{,}04^{28}} + \frac{85.29}{1.04^{29}} + \frac{71.22}{1{,}04^{30}} + \frac{59.16}{1{,}04^{31}} +$$

$$\left.\frac{48.11}{1{,}04^{32}} + \frac{38.7}{1{,}04^{33}} + \frac{29.4}{1{,}04^{34}} + \frac{22.2}{1.04^{35}} + \frac{16.1}{1{,}04^{36}} + \frac{11.0}{1{,}04^{37}}\right] + 10.$$

Făcînd calculele obținem:

$$V = \frac{4500}{549.489} \times 2293832{,}40 + 10 = 38459{,}70.$$

Deci valoarea actuală căutată este aproximativ 38460 lei. Depunînd această sumă, cele 2 persoane A și B, ele vor lua la finele fie-cărui an suma de 4500 lei, pînă la moartea uneia din ele [1]).

Observația I. După cum se vede rezoluția acestei probleme necesită întrebuințarea tablelor de mortalitate. In lipsă de asemenea table ne putem forma o tablă *aproximativă* în modul următor. Știm că dacă populațiunea ar crește regulat, se poate găsi populațiunea după un număr oare-care de ani, cînd cunoaștem populațiunea actuală și sporul anual, prin formula dobînzei compuse. De asemenea dacă asimilăm o populațiune oare-care (de ex. 10000 oameni) cu un capital împrumutat care trebue stins în un număr oare-care de ani, (de ex. 100 ani, limita vîrstei) prin anuități egale, compuse din dobîndă (sporul populației) și din amortismente (cazurile de mortalitate), atunci putem calcula numărul morților pe fie-care an cu formula amortismentelor:

$$m_t = \frac{Cr(1+r)^{t-1}}{(1+r)^{n-1}},$$

în care m_t e amortismentul (numărul morților), C capitalul actual (populațiunea), n numărul de ani în care trebue stins capitalul (limita vieței), r procentul la 1 leu (sporul populațiunei de locuitor, de exemplu 0,003), iar t numărul anului pentru care voim să calculăm amortismentul (numărul morților). De aci reese că numărul morților de la 1 an pînă la t ani este:

$$m_1+m_2+m_3+...+m_t = \frac{Cr}{(1+r)^n-1}[1+(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{t-1}] = \frac{C[(1+r)^t-1]}{(1+r)^n-1}.$$

Deci numărul y al celor rămași în viață la etatea t vor fi:

$$y = C - \frac{C[(1+r)^t-1]}{(1+r)^n-1} = C\frac{(1+r)^n-(1+r)^t}{(1+r)^n-1}.$$

Această formulă poate ține locul tablei de mortalitate. Ast-fel dacă luăm C=1286 (numărul cu care începe tabla lui *Deparcieux*),

[1]) Cele spuse pînă aci rezolvă problema propusă. Lungimea expunerei soluțiunei provine din faptul că s'a căutat a se evita întrebuințarea *calculului probabilităților*, care, ca și studiul *rentelor viagere*, nu face parte din programul școalelor secundare. Observațiunile ce urmează au de obiect de a arăta cum s'ar putea face calculul în lipsa tablelor de mortalitate.

$r=0{,}003$ (adică 3‰ sporul populaţiei), $t=53$, $n=95$ (limita vîrstei în tabla lui *Deparcieux*), vom găsi că la 53 ani mai rămîn în viaţă 603 persoane. Tablele după cum am văzut ne dau 549. Diferenţa e deci destul de sensibilă.

Observaţia II. Putem reduce cazul rentei constituite pentru 2 persoane A, B la cazul rentei constituită pentru o persoană, sau pentru 2 persoane de aceiaşi etate, cu ajutorul formulelor lui *Gompertz* sau *Makeham*. Se numeşte *procent de mortalitate* la o etate t, raportul dintre diferenţa între numărul vieţuitorilor la etăţile t şi $t+1$, şi dintre numărul vieţuitorilor la etatea t. Dacă se admite că acest procent variază de la o etate la alta în progresie geometrică, atunci obţinem formula lui *Gompertz*, iar dacă se admite că acest procent se compune din o constantă şi apoi termeni în progresie geometrică, obţinem formula lui *Makeham*. Aceste formule se întrebuinţează de societăţile de asigurare din Anglia, şi sînt respectiv:

$$V_t=11344\times 0{,}91479^{1{,}03257^{(t-30)}}=am^{n^{t-30}}\ .\ ^{1)}$$

$$V_t=\frac{109949\times 0{,}999052^{1{,}09648^{t}}}{1.006615^{t}}=cp^{q^{t}}\times s^{-t}\ .$$

Pentru a rezolva problema cu aceste formule să înlocuim grupul celor 2 persoane A, B prin una singură, de etate x ast-fel ca coeficienţii de reducere ai diferitelor capitale $C_1, C_2 \ldots$, să nu se schimbe. Va trebui să avem după formula lui *Gompertz* (z fiind ori-care):

$$\frac{v_{53+z}\cdot v_{58+z}}{v_{53}\cdot v_{58}}=\frac{am^{n^{53-30+z}}}{am^{n^{53-30}}}\cdot\frac{am^{n^{58-30+z}}}{am^{n^{58-30}}}=\frac{am^{n^{x-30+z}}}{am^{n^{x-30+z}}}=\frac{v_{x+z}}{v_x},$$

care se reduce la:

$$m^{n^{23+z}-n^{23}+n^{28+z}-n^{28}}=m^{n^{x+z-30}-n^{x-30}},$$

[1]) Această formulă se întrebuinţează numai pentru $t>30$, în care caz ea dă rezultate satisfăcătoare.

de unde: $n^{23+z} - n^{23} + n^{28+z} - n^{28} = n^{x+z-30} - n^{x-30}$,

sau: $(n^{23} + n^{28})(n^{z} - 1) = n^{x-30}(n^{z} - 1)$,

sau în fine: $n^{23} + n^{28} = n^{x-30}$.

Înlocuind pe n prin valoarea sa 1,03257 și rezolvind această ecuațiune exponențială vom găsi:

$$x = 77 \text{ ani.}$$

Putem deci calcula renta viageră pentru o persoană de 77 ani în loc de a calcula'o pentru 2 persoane A și B. Pentru a avea însă rezultate concordante trebue ca în ambele cazuri să presupunem că ne servim de formula lui *Gompertz* în loc de table de mortalitate, și să nu ne fixăm o limită de etate, ci să ne oprim cînd capitalurile C devin neglijabile.

După cum am spus, cu formula lui *Makeham* putem găsi un grup de persoane de etate x fie-care, care să înlocuiască grupul A, B și apoi cu table de mortalitate pentru grupuri de 2 persoane de aceiași etate vom putea rezolva problema. x se va determina prin ecuațiunea:

$$\frac{v_{53+z} \cdot v_{58+z}}{v_{53}\, v_{58}} = \frac{v_{x+z}}{v_x} \cdot \frac{v_{x+z}}{v_x}.$$

Observația III. Dacă dispunem de table de rente viagere, pe cari și le formează fie-care Societate, calculele devin foarte simple. In aceste table sînt calculate odată pentru totdeauna diferitele combinațiuni, admițînd renta de 1 leu sau 100 lei. O simplă proporțiune ne dă apoi valoarea capitalului sau primelor ce trebuesc depuse pentru a obține o rentă viageră oare-care.

Geometria.

In planul unui cerc fix se dă un punct fix P, care se unește cu extremitățile unui diametru mobil AB. Să se găsească locul centrului cercului circumscris triunghiului PAB.

Această problemă fiind un caz particular al problemei 121 propusă în *Gazeta Matematică* No. 10, soluțiunea ei o vom da-o dată cu soluțiunea acestei din urmă probleme.

Algebra.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2}+\dfrac{y^2}{\rho^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\rho^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2}+\dfrac{y^2}{\mu^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\mu^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2}+\dfrac{y^2}{\nu^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\nu^2-c^2}=1. \end{cases}$$

Imulțim prima ecuațiune cu ρ^2, a doua cu μ^2 și le scădem; vom avea:

$$\left(\frac{\rho^2}{\rho^2-b^2}-\frac{\mu^2}{\mu^2-b^2}\right)y^2+\left(\frac{\rho^2}{\rho^2-c^2}-\frac{\mu^2}{\mu^2-c^2}\right)z^2=\rho^2-\mu^2,$$

care se reduce la:

$$\frac{1}{\mu^2-b^2}\cdot\frac{b^2y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{1}{\mu^2-c^2}\cdot\frac{c^2z^2}{\rho^2-c^2}=-1.$$

In același mod găsim:

$$\frac{1}{\nu^2-b^2}\cdot\frac{b^2y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{1}{\nu^2-c^2}\cdot\frac{c^2z^2}{\rho^2-c^2}=-1.$$

Imulțind prima egalitate cu $\frac{1}{\nu^2-c^2}$ și a doua cu $\frac{1}{\mu^2-c^2}$ și scăzîndu-le avem:

$$\left(\frac{1}{\mu^2-b^2}\cdot\frac{1}{\nu^2-c^2}-\frac{1}{\mu^2-c^2}\cdot\frac{1}{\nu^2-b^2}\right)\frac{b^2y^2}{\rho^2-b^2}=\frac{1}{\mu^2-c^2}-\frac{1}{\nu^2-c^2},$$

care se reduce la:

$$\frac{(c^2-b^2)b^2y^2}{\rho^2-b^2}=-(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2),$$

de unde:

$$y^2=\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)(b^2-\rho^2)}{b^2(b^2-c^2)}.$$

In același mod găsim:

$$z^2=\frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)(c^2-\rho^2)}{c^2(b^2-c^2)}.$$

Inlocuind aceste valori în prima din ecuațiile date găsim:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{(b^2-c^2)b^2}-\frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{(b^2-c^2)c^2}=1$$

sau:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{c^2\mu^2\nu^2-b^2c^2\nu^2-b^2c^2\mu^2+b^4c^2-b^2\mu^2\nu^2+b^2c^2\mu^2+b^2c^2\nu^2-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}=1,$$

sau: $$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{(b^2-c^2)(b^2c^2-\mu^2\nu^2)}{(b^2-c^2)b^2c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\rho^2}+1-\frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2}=1,$$

de unde: $$x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2}.$$

(A se vedea și *J. Bertrand*, Algèbre 1889. Deuxième partie p. 356).

I. Ionescu.

INSTRUMENTE LOGARITMICE—RIGLA DE CALCUL

(Urmare)

8). Unghiuri mici.

Unele rigle au înscrise pe dosul lor valorile:

$$\text{arc}1'=\frac{1}{3437,7} \text{ și } \text{arc}1''=\frac{1}{206265},$$

valori care servesc la efectuarea operațiunilor în care intră unghiuri foarte mici.

In adevăr, pentru unghiuri foarte mici se admite egalitatea $\text{tg}\alpha=\text{arc}\alpha=\sin\alpha$ (până la 35′ diferința nu se manifestă de cît la a 6-a zecimală) așa că:

$$\sin 1'=\text{arc}1'=\text{tg}1'=\frac{1}{3437,7}$$

$$\sin 1''=\text{arc}1''=\text{tg}1''=\frac{1}{206265}.$$

Pentru găsirea sinusului sau tangentei unui unghiu mic, se va înmulți prin urmare numărul secundelor și al minutelor cu valorile de mai sus. Așa de exemplu:

$$\sin 0^\circ 17'=17\sin 1'=\frac{17}{3437,7}=0,00495$$

$$20\times\sin 0^\circ 15'=\frac{20\times 15}{3437,7}=0,0873.$$

Operațiunile se efectuează, și numărul cifrelor se determină conform regulelor imulțirei și împărțirei. (Fig. 39 și 40).

In același mod se fac și operațiunile cu secunde. Reciproc, dacă se dă arcul, se poate găsi unghiul, căci:

$$\text{arc sin}a=\frac{a}{1:3437,7}=a\times 3437,7 \text{ minute}$$

$$\text{arc sin}a=\frac{a}{1:026265}=a\times 206265 \text{ secunde}$$

Așa de exemplu:

$$\text{arc sin}0,00497=0,00497\times 3437,7=17',1.$$

De obiceiu lungimile log 3437,7 și log 206265 sînt însemnate cu o trăsătură, pe scara sinuselor, așa că pentru aflarea sinuselor, sau unghiurilor mici, e destul să luăm numerile pe scara superioară a liniei și să citim rezultatul în dreptul acestei trăsături, pentru înmulțire, sau în dreptul indexului stîng al scării sinuselor pentru împărțire.

B. *Logaritmi.*

Pentru aflarea mantizei logaritmului unui număr oare-care, se aduce indexul stîng al liniuței în dreptul numărului dat citit pe scara inferioară a liniei; întorcînd apoi rigla întreagă cu fața în jos, citim mantiza pe scara din mijlocul dosului liniuței, în dreptul indexului de la extremitatea dreaptă a dosului liniei. Se înțelege că caracteristicele logaritmilor se determină conform regulei din algebră. Așa (fig. 41):

$$\log 30=1,477$$
$$\log 0,03=\bar{2},477$$

Cu ajutorul scării logaritmilor se pot calcula exponentialele precum și puterile și rădăcinile care nu se pot face de loc, sau nu destul de exact, după regulile date la puteri și rădăcini.

Așa, de exemplu, pentru a afla $\sqrt[5]{2560}=0,6816$ se caută log2560 $=3,4082$, și pe urmă se face pe scara numerilor operațiunea:

$$\frac{3,4082}{5}=0,6816.$$

Pentru a afla valoarea lui x din ecuațiunea:

$$4^x=9 \text{ adică } x=\frac{\log 9}{\log 4},$$

se caută $\log 9=0,954$ și se însemnează acest număr cu cursorul pe scara inferioară a liniei; apoi după ce se caută și $\log 4=0.602$ se procede la executarea diviziunei:

$$\frac{0.954}{0.602}=1,585$$

Deosebit de cele spuse până aci, cu ajutorul riglei se pot face o sumă de operațiuni combinate, al căror mers se poate lesne determina dupe principiile arătate.

Rigla de calcul, dupe cum s'a văzut, se compune din două scări logaritmice alăturate și trasate pe o linie dreaptă; dar și cercul și helicea bucurîndu-se, ca și linia dreaptă, de proprietatea de a fi aplicabile asupră-le în tot lungul lor, este evident că dacă se vor trasa scări logaritmice pe cercuri sau helice concentrice și de aceiași rază și pas, se vor obține *linii de calcul circulare* sau *helicoidale*.

S'au construit și se construesc o mulțime de aparate de felul acesta, aparate care prezintă în multe cazuri unele avantage asupra *riglelor drepte*.

Așa *liniele helicoidale* sînt capabile de o mai mare dezvoltare a diviziunilor și prin urmare de o exactitate mai mare, pentru aceiași mărime, de cît riglele drepte; (un aparat helicoidal de $0^m,42$ lungime, echivalează cu o riglă de $5^m,40$), iar *liniele circulare* sînt mult mai portative, fiind de forma și mărimea unui ceasornic de buzunar. Cu aceste instrumente toate operațiunile se fac în același mod ca cu rigla de calcul, principiul lor fiind absolut identic.

(Fine)

Z.

NOTĂ DE GEOMETRIE

Definițiune.— Două puncte M, M' se zic *inverse* în raport cu o circonferință de centru O și de rază R, cînd sînt situate pe aceiași rază de aceiași parte a punctului O și dacă :

$$(1) \qquad OM.\ OM'=R^2.$$

1.—*Consider pe o circonferință C două grupuri de cîte n puncte:* A_1, A_2... An *și* $An+_1$, $An+_2$,.... A_2n. *Fie M un punct din planul circonferenței, care satisface la condițiunea:*

$$(2) \qquad \frac{MA_1.MA_2.....MAn}{MAn+_1.MAn+_2....MA_2n}=K$$

Dacă este așa, zic că și inversul M' al punctului M satisface condițiunea (2).

In adevăr, triunghiurile OMA_i și $OM'A_i$ sînt asemeni, căci au unghiul din O comun și laturile adiacente proporționale în virtutea egalității (1), de unde se scoate :

$$\frac{OM}{OA_i}=\frac{OA_i}{OM'}$$

căci $OA_i=R$. Rezultă de aci, că toate laturile sînt proporționale și avem :

$$\frac{OM}{R}=\frac{R}{OM'}=\frac{MA_1}{M'A_1},\ \frac{OM}{R}=\frac{R}{OM'}=\frac{MA_2}{M'A_2},\ \ldots,\ \frac{OM}{R}=\frac{R}{OM'}=\frac{MA_{2n}}{M'A_{2n}}$$

de unde se vede că :

$$\frac{MA_1}{M'A_1}=\frac{MA_2}{M'A_2}=\ldots=\frac{MA_n}{M'A_n}=\frac{MA_{n+1}}{M'A_{n+1}}=\ldots=\frac{MA_{2n}}{M'A_{2n}}$$

și se deduce că :

$$\frac{MA_1.MA_2.\ldots.MA_n}{M'A_1.M'A_2.\ldots.M'A_n}=\frac{MA_{n+1}.MA_{n+2}.\ldots.MA_{2n}}{M'A_{n+1}.M'A_{n+2}.\ldots.M'A_{2n}}$$

sau schimbînd mijlocii acestei proporții avem :

$$K=\frac{MA_1.MA_2.\ldots.MA_n}{MA_{n+1}.MA_{n+2}.\ldots.MA_{2n}}=\frac{M'A_1.M'A_2.\ldots.M'A_n}{M'A_{n+1}.M'A_{n+2}.\ldots.M'A_{2n}}.$$ c. e. d.

2.—Teorema precedentă este evident adevărată și în cazul cînd mai multe din punctele A ar coincide ; va trebui să înlocuim însă distanțele respective ale punctului M cu puteri ale acelor distanțe. Pentru patru puncte spre ex., avem :

$$(3)\qquad \frac{MA_1.MA_2}{MA_3.MA_4}=K.$$

Dacă punctele A_1 și A_2 coincid avem :

$$(4)\qquad \frac{\overline{MA_1}^2}{MA_3.MA_4}=K.$$

Așa că teorema relativă la punctul M' este adevărată nu numai pentru relațiunea (3) dar și pentru (4).

3.—*Lemă.—Dacă* M *și* M' *sînt două puncte inverse în raport cu un cerc* O, *avem între puterile* p *și* p' *ale acelor puncte în raport cu un cerc* C *ortogonal cercului* O, *relațiunea :*

$$(5)\ \ldots\qquad \frac{p}{OM}=\frac{p'}{OM'}$$

Fie N și N' proiecțiele punctelor M și M' pe dreapta OC care unește centrele cercurilor date, R și r razele respective ale acelor cercuri O și C. In triunghiul MOC avem:

$$\overline{MC}^2=\overline{OC}^2+\overline{OM}^2\pm 2OC\times ON,$$

luînd plus dacă $\widehat{MOC}$ este obtus și minus dacă $\widehat{MOC}$ este ascuțit.

Insă:

$$\overline{OC}^2=R^2+r^2$$

deci: $$\overline{MC}^2-r^2=p=R^2+\overline{OM}^2\pm 2OC\times ON.$$

In același mod: $$p'=R^2+\overline{OM'}^2\pm 2OC\times ON'.$$

Din asemănarea triunghiurilor ON'M' și ONM se scoate:

$$\frac{ON'}{ON}=\frac{OM'}{OM} \text{ sau } ON'=ON.\frac{OM'}{OM}.$$

deci:

$$p'=R^2+\overline{OM'}^2\pm 2OC.ON.\frac{OM'}{OM}=\frac{OM'}{OM}\left(R^2.\frac{OM}{OM'}+OM.OM'\pm 2OC.ON\right)$$

sau, ținînd seama de relațiunea (1):

$$p'=\frac{OM'}{OM}(\overline{OM}^2+R^2\pm 2OC.ON)=\frac{OM'}{OM}p,$$

de unde: $$\frac{p}{OM}=\frac{p'}{OM'}.$$

4.—*Generalizare.— Consider 2n cercuri* C_1, C_2,... C_{2n} *avînd un centru radical O, adică un punt care să aibă aceiași putere R în raport cu aceste cercuri. Dacă se ia un punt M în plannl acelor cercuri așa ca între puterile* p_1, p_2,... p_{2n} *ale puntului M în raport cu* C_1, C_2,... C_{2n} *să avem:*

$$\frac{p_1\ p_2\ldots p_n}{p_{n+1}\ p_{n+2}\ldots p_{2n}}=K,$$

aceiași relațiune avem între puterile p'_1, p'_2,... p'_{2n} *ale puntului M' în raport cu aceleași cercuri.*

Intr'adevăr, în virtutea relațiunei (5) avem:

$$p'_1=\frac{OM'}{OM}.p_1\ ,\ p'_2=\frac{OM'}{OM}.p_2,\ldots p'_{2n}=\frac{OM'}{OM}.p_{2n}$$

Așa dar:

$$p'_1\,p'_2\ldots p'_n=\frac{\overline{OM'}^n}{\overline{OM}^n}p_1\,p_2\ldots p_n$$

și $p'_{n+1}p'_{n+2}\ldots p'_{2n} = \frac{\overline{OM}^n}{\overline{OM}^n} p_{n+1}p_{n+2}\ldots p_{2n},$

deci:

$$\frac{p'_1 p'_2 \ldots p_n}{p'_{n+1} p_{n+2} \ldots p'_{2n}} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{p_{n+1} p_{n+2} \ldots p_{2n}} = K.$$

Se aplică aici aceiași observațiune ca la No. 1 relativ la cazul cînd s'ar înlocui mai mulți p printr'o putere a lor.

G. Țițeica.

PROBLEME REZOLVITE [1]

Problema 63. — *Să se găsească maximul volumului unui cilindru înscris într'un sector sferic. Cazul particular cînd unghiul sectorului este de 90°* [2]).

Soluție dată de D-l Gr. N. Makarie (București).

Fie AOBE sectorul considerat FGHI cilindrul înscris, R raza sferei din care face parte sectorul, α jumătatea unghiului AOB; r, h, V raza, înălțimea și volumul cilindrului.

Putem presupune în totdeauna $\alpha < 90°$, adică:

$$\sphericalangle AOB < 180°$$

căci dacă: $\alpha > 90°$ am obține cilindrul FG'I'H circumscris sectorului pentru care unghiul la vîrf ar fi mai mic ca 180°.

$$V = \pi r^2 h$$

Avem, pentru cilindrul: FGIH:

$$h = OD - OC,\quad OD = \sqrt{R^2 - r^2},\quad OC = r\cot g\alpha$$

iar pentru cilindrul FG'I'H:

$$h = OD' + OC,\quad OD' = \sqrt{R^2 - r^2},\quad OC = r\cot g\alpha.$$

Prin urmare:

$$(1)\qquad V = \pi r^2[\sqrt{R^2 - r^2} \mp r\cot g\alpha].$$

Semnul — corespunzînd cilindrului FGIH, iar semnul + cilindrului FG'I'H; $\cot g\alpha$ fiind în totdeauna pozitivă.

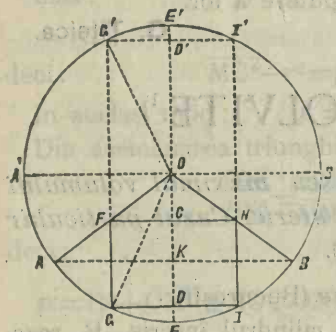
r variind între 0 și $R\sin\alpha$, se vede ușor că volumul cilindrului

[1]) *Problema* 88 a rezolvit-o și D-l *D. Negulescu.*

[2]) D-l *Bogdan Ionescu* ne-a atras atențiunea, că problema de mai sus este deja tratată în cartea: *Problèmes de Géométrie* par F. J. Ne avînd cunoștință de lucrul acesta am propus problema ca nouă, ceea ce nu este în realitate. A. G. I.

FGIH pornește de la zero, pentru a ajunge iarăși la zero, deci el admite neapărat un maximum; pe cînd volumul cilindrului FG'I'H, pornește de la zero pentru a ajunge la: $2R^3 \sin^2\alpha \cos\alpha$, prin urmare în interval el va putea trece, sau nu, printr'unul sau mai multe maxime sau minime.

Pentru a studia mai cu înlesnire variațiunea lui V, pun:



$$\operatorname{cotg}\alpha = a$$

$$\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = u$$

$$\frac{u^2(1 \mp au)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = f(u). \qquad (2)$$

Avem:

$$V = \pi R^3 f(u) \qquad (3)$$

Trebue studiată variațiunea lui $f(u)$. Din (2) deducem:

$$f'(u) = \frac{u[2 \mp 3au - u^2]}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Din formula aceasta se vede că afară de valoarea $u=o$, $f'(u)$ se mai anulează încă pentru două valori ale lui u, dintre care una pozitivă și alta negativă. Valoarea negativă a lui u evident nu convine chestiunei. Fie u_1 rădăcina pozitivă a lui $f'(u)$; se vede ușor descompunînd numărătorul lui $f'(u)$ în factori de gradul întăi că:

$$f'(u-\varepsilon) > o$$

$$f'(u+\varepsilon) < o$$

deci: $f(u_1)$ este un maximum al lui $f(u)$, însă pentru că la această valoare a lui u să corespundă un maximum și pentru V trebue încă:

$$r < R\sin\alpha$$

sau

$$u < \frac{1}{a}.$$

Această condițiune va fi împlinită cînd:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) < o.$$

Or luînd semnul — înaintea lui $3a$, adică considerînd cazul cilindrului FGIH, avem:

$$f'\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a}}{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \cdot \left(-1 - \frac{1}{a^2}\right) < o.$$

Deci pentru:

$$u=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+8}}{2}.$$

FGIH va fi maximum.

Dacă din contră considerăm cilindrul FG'I'H, $f'\left(\frac{1}{a}\right)$ este de semnul lui : $5-\frac{1}{a^2}$, deci:

Pentru: $$a<\sqrt{\frac{1}{5}}$$

FG'I'H admite un maximum corespunzător lui:

$$u=\frac{3a+\sqrt{9a^2+8}}{2}$$

iar dacă $$a>\sqrt{\frac{1}{5}}$$

FG'I'H nu admite nici un maximum.

Avînd valorile lui u, este ușor de a găsi valorile corespunzătoare ale lui r.

Pentru $\alpha=90^0$, adică $\operatorname{cotg}\alpha=a=1$, FG'I'H nu admite nici un maximum, iar FGIH admite un maximum, corespunzător la:

$$u=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

sau $$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{30-6\sqrt{17}}}=\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{12}}.$$

***Problema 67.**—*Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oare-care avem relațiunile:*

$$a\sin B\sin(C-\alpha)-c\sin C\sin\alpha=b\sin C\sin(A-\alpha)-a\sin A\sin\alpha$$
$$=c\sin A\sin(B-\alpha)-b\sin B\sin\alpha$$
$$a\sin C\sin(B-\alpha)-b\sin B\sin\alpha=b\sin A\sin(C-\alpha)-c\sin C\sin\alpha$$
$$=c\sin B\sin(A-\alpha)-a\sin A\sin\alpha$$

α fiind un unghiu oare-care. **(G. Țițeica).**

Soluție dată de D-nii A. Iliovici, (Iași); *C. Mateiescu,* (Elev al Liceului din Craiova) și *G. Iliovici* (Iași).

Să luăm primul grup de formule, să desfacem $\sin(A-\alpha)$,.... și să înlocuim pe a, b, c, cu $2R\sin A$, $2R\sin B$, $2R\sin C$; suprimînd factorul comun $2R$, găsim :

$$\sin A \sin B \sin C \cos\alpha - \sin A \cos B \sin C \sin\alpha - \sin^2 B \sin\alpha$$
$$= \sin A \sin B \sin C \cos\alpha - \cos A \sin B \sin C \sin\alpha - \sin^2 A \sin\alpha$$
$$= \sin A \sin B \sin C \cos\alpha - \sin A \sin B \cos C \sin\alpha - \sin^2 C$$

și se vede că chestiunea va fi demonstrată, dacă vom arăta că:

$$\sin A \cos B \sin C + \sin^2 B = \cos A \sin B \sin C + \sin^2 A = \sin A \sin B \cos C + \sin^2 C$$

Intr'adevăr, avem:

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin C \sin(A-B)$$

sau desvoltînd $\sin(A-B)$ și grupînd:

$$\sin^2 A + \cos A \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin A \cos B \sin C$$

în același mod:

$$\sin^2 A + \cos A \sin B \sin C = \sin^2 C + \sin A \sin B \cos C$$

Al doilea grup de formule, după înlocuirea lui a, b, c ca și mai sus, devine identic cu cel d'întâi.

Problema 68. — *Să se găsească adevărata valoare a expresiunei:*

$$(1) \qquad \cos ax^{(\operatorname{cosec} bx)^2}$$

pentru $x=0$. (N. Nicolescu.)

Soluție fără ajutorul derivatelor dată de D-nul N. Trandafirescu, (Elev al Școalei de Poduri și Șosele).

Inlocuind $\cos ax$ și $\operatorname{cosec} bx$ în funcțiune de $\sin ax$ și $\sin bx$ obținem:

$$(2) \qquad (1-\sin^2 ax)^{\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 bx}}$$

Inmulțind acum numărătorul și numitorul exponentului din (2) prin $-\sin^2 ax$ se obține:

$$(3) \qquad (1-\sin^2 ax)^{\left(-\frac{1}{\sin^2 ax}\right)\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin^2 ax}{\sin^2 bx}\right)}$$

Insă:

$$(4) \qquad \operatorname{Limit}\left[(1-\sin^2 ax)^{-\frac{1}{\sin^2 ax}}\right]_{x=0} = e$$

și

$$(5) \qquad \operatorname{Limit}\left[-\frac{\sin^2 ax}{\sin^2 bx}\right]_{x=0} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Inlocuind valorile date de (4) și (5) în (3) avem:

$$\text{Limit}\left[(\cos ax)^{(\operatorname{cosec} bx)^2}\right]_{x=o} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

Au rezolvit această problemă cu ajutorul derivatelor D-nii: *Bogdan Ionescu*, *Gr. N. Makarie* și *D. Negulescu*.

***Problema 73.**— *Să se găsească un număr care divizat pe rînd prin trei numere consecutive întregi, să dea ca resturi numerile 4, 5, 6 și care să fie egal cu suma celor trei numere consecutive plus 1 multiplicată cu suma celor d'întâi două din aceste numere.* (G. Iliovici.)

Soluție dată de D-nii Gr. N. Makarie (Elev al Școalei de Poduri și Șosele), și *C. Popovici* (Iași).

Fie x numărul căutat; $n-1$, n, $n+1$ cele 3 numere consecutive După enunciu avem:

$x=(n-1)p+4=nq+5=(n+1)r+6=(n-1+n+n+1+1)(n-1+n)$, p, q, r fiind numere întregi. De aci deducem:

$$1)\quad x=6n^2-n-1,$$

$$p=\frac{x-4}{n-1}=6n+5, \qquad q=\frac{x-5}{n}=6n-1-\frac{6}{n},$$

$$\text{și} \qquad r=\frac{x-6}{n+1}=6n-7.$$

Se vede de aci că p și r sînt întregi ori-care ar fi n. Pentru ca q să fie întreg trebue ca $\frac{6}{n}$ să fie întreg, și prin urmare n e un divizor al lui 6. Cum însă împărțirea lui x prin n dă ca rest pe 5, rezultă că $n>5$. Dar singurul divizor al lui 6 mai mare ca 5 este 6. Deci:

$$n=6, \qquad x=209.$$

Numărul căutat e deci 209, iar cele trei numere consecutive sînt 5, 6 și 7.

Soluție dată de D-nii D. Ioachimescu (București) și *C. Rădulescu* (Ploești).

Egalitatea 1) de mai sus se poate scrie:

$$x=n(6n-2)+n-1.$$

De aci rezultă că restul diviziunei lui x prin n este $n-1$. Dar acest rest ni s'a dat egal cu 5. Deci avem:

$$n-1=5, \text{ și } x=209.$$

Soluțiune dată de D-l Alexandru Bărcăcilă (Elev al Seminarului Nifon din București).

Din egalitatea 1) se vede că $x=\mathcal{M}n-1$. Dar după enunciu $x=\mathcal{M}n+5$. De aci rezultă imediat că n este egal cu 6 și prin urmare $x=209$.

Soluțiune dată de D-l Marin Mateescu (Elev al Liceului din Turnu-Severin).

Rezolvind cu ajutorul analizei nedeterminate ecuațiunile:

$$x=(n-1)p+4=nq+5=(n+1)r+6,$$

găsim că x trebue să fie de forma:

$$x=n^3t-nt-n+5$$

t fiind un întreg. Se poate verifica ușor că acest număr divizat cu $n-1$, n și $n+1$, ne dă ca resturi numerile 4, 5, 6 ori-care ar fi t. Egalînd pe x din această ecuațiune cu x dat de ecuațiunea 1) avem:

$$n^3t-nt-n+5=6n^2-n-1,$$

de unde: $$\alpha)\ t=\frac{6n^2-6}{n^3-n}=\frac{6(n+1)(n-1)}{n(n+1)(n-1)}=\frac{6}{n}.$$

Deci n trebue să fie un divizor al lui 6, mai mare ca 5, adică $n=6$ și atunci $x=209$.

Soluțiune dată de D-nii A. Iliovici și *C. N. Răileanu* (Iași).

Observăm că numărul $-(n-1)+4=-n+5=-(n+1)+6$ divizat prin numerile $n-1$, n și $n+1$ dă ca resturi numerile 4, 5, 6. Aceste resturi nu se vor schimba dăcă vom aduna lui $-n+5$ un multiplu al celor trei divizori. Vom deosebi următoarele cazuri:

1) n este par. Atunci cel mai mic comun multiplu al divizorilor este $(n-1)(n+1)n$ sau n^3-n. In acest caz putem pune prin urmare:

$$x=k(n^3-n)-n+5=6n^2-n-1.$$

Vedem de aci că valoarea lui k din această ecuațiune este tocmai t din soluțiunea precedentă (α), și prin același raționament găsim soluțiunea $x=209$.

2) n este impar. Atunci cel mai mic comun multiplu al celor trei divizori este $\frac{n^3-n}{2}$. Deci avem:

$$x=\frac{k}{2}(n^3-n)-n+5=6n^2-n-1.$$

Ca și mai sus se va vedea că $n>5$, nu poate fi de cît 6, pentru ca $\frac{k}{2}$ să fie întreg. Dar atunci n e par și prin urmare această ipoteză (2) nu ne dă nici o soluțiune.

Soluțiune dată de D-l Eftihie Floru (Elev în Clasa VI a Seminarului Nifon).

Din egalitatea 1) se vede că dacă luăm pe $6n-1$ ca cît al împărțirei lui x prin n, acest cît este prea mare căci ne lipsește o unitate pentru a-l obține. Deci cîtul diviziunei lui x prin n va fi $6n-2$, iar restul după cum ni s'a dat este 5. Deci avem:

$$x=6n^2-n-1=n(6n-2)+5.$$

Rezolvind această egalitate găsim $n=6$ și prin urmare $x=209$.

Problema 74.— *Să se determine suprafața înfășurătoare a unei familii de sfere mobile, cari trec prin centrul unui elipsoid, și al căror centru se mișcă pe suprafața elipsoidului. Să se găsească trajectoriile ortogonale ale secțiunilor făcute în această suprafață, prin sfere cu raze variabile și al căror centru este în centrul elipsoidului.*

(Constanța Pompilian.)

Soluție dată de D-l Bogdan Ionescu și D. Negulescu.

1) Fie: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ ecuațiunea elipsoidului dat.

$F_1=x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=0$ ecuațiunea familiei de sfere, în care α, β, γ sînt coordonatele centrului.

Avem prin ipoteză:

$$F_2=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1=0.$$

Infășurătoarea căutată se obține eliminînd α, β, γ între F_1 F_2 și relațiile:

$$\frac{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}}=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial F_2}{\partial \beta}}=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial \gamma}}{\frac{\partial F_2}{\partial \gamma}}$$

adică: $$\frac{x}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y}{\frac{\beta}{b^2}}=\frac{z}{\frac{\gamma}{c^2}}=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2},$$

Scoțind din această din urmă relație pe α, β, γ și substituind în F_1, obținem ecuațiunea înfășurătoarei căutate.

$$f=(x^2+y^2+z^2)^2-4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0.$$

2) Fie ρ raza sferei mobile, al cărui centru este în centrul elipsoidului, ecuațiunea ei este:

$$\varphi=x^2+y^2+z^2-\rho^2=0.$$

dx, dy, dz însemnînd diferențialele unui punct al trajectoriilor căutate, iar diferențialele unui punct al curbei (f,φ) fiind proporționale cu :

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avem condițiunea de perpendicularitate:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dy+$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dz=o$$

sau:

$$(b^2-c^2)yzdx+(c^2-a^2)zxdy+(a^2-b^2)xydz=o.$$

Inmulțind cu $\frac{1}{xyz}$ și integrînd, obținem:

$$(b^2-c^2)\log x+(c^2-a^2)\log y+(a^2-b^2)\log z=\log\alpha,$$

α fiind o constantă.

Sau încă:

$$\psi=x^{b^2-c^2}\,.\,y^{c^2-a^2}\,.\,z^{a^2-b^2}-\alpha=o.$$

φ și ψ determină trajectoriile căutate.

Problema 78.— *Se dau trei puncte în spațiu:* $A(x_1, y_1, \lambda)$, $B(x_2, y_2, \mu)$ și $C(x_3, y_3, \nu)$. *Să se exprime aria triunghiului ABC în funcțiune de coordonatele* $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$, *știind că proecțiunile ariei acestui triunghiu pe cele trei plane coordonate (rectangulare) ZOY, XOZ, YOX sînt în progresie geometrică cu rația q.* **(Gr. N. Makarie.)**

Soluție dată de D-nii Bogdan Ionescu și D. Negulescu.

Fie S aria triunghiului ABC și S_x, S_y, S_z, proecțiunile ariei acestui triunghiu pe planele YOZ, XOZ, XOY. Vom avea după enunciu:

$$S_y=qS_x \text{ și } S_z=qS_y=q^2S_x.$$

Ecuațiunea planului ABC este:

$$a) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & \lambda & 1 \\ x_2 & y_2 & \mu & 1 \\ x_3 & y_3 & \nu & 1 \end{vmatrix} = o.$$

Desvoltînd acest determinant după elementele primei linii, și observînd că avem:

$$2S_x=\pm\begin{vmatrix} y_1 & \lambda & 1 \\ y_2 & \mu & 1 \\ y_3 & \nu & 1 \end{vmatrix}, \quad 2S_y=\begin{vmatrix} x_1 & \lambda & 1 \\ x_2 & \mu & 1 \\ x_3 & \nu & 1 \end{vmatrix}, \quad 2S_z=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

vom obține pentru ecuațiunea planului ABC:

$$\pm xS_x\pm yS_y\pm zS_z+H=o,$$

unde H reprezintă jumătatea minorului corespunzător lui 1 din prima linie a determinantului (*a*). Inlocuind în această ecuațiune pe S_y și S_z prin valorile lor vom avea:

$$\pm x\pm qy\pm q^2z+\frac{H}{S_x}=o.$$

Dacă α e unghiul planului ABC cu planul YOX avem:

$$\cos\alpha=\pm\frac{q^2}{\sqrt{1+q^2+q^4}}, \quad S\cos\alpha=S_x.$$

Deci:

$$S=\pm S_x\frac{\sqrt{1+q^2+q^4}}{q^2},$$

sau în fine:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\sqrt{1+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^4}}.$$

***Problema 79.**— *Să se demonstreze că diferența a două cuburi perfecte nu poate fi multiplu de 3 fără a fi și multiplu de 9.* **(I. Ionescu).**

Soluțiune aritmetică dată de D-nii C. Ionescu (Sergent în Regimentul I de Geniu) și *C. Virgiliu* (București).

Să presupunem că am luat două numere, că le-am ridicat pe fie-care la cub și că am făcut diferența acestor cuburi, și să ne închipuim că facem proba prin 9 a tuturor acestor operațiuni. Să facem mai întâi proba ridicărilor la cub. Resturile diviziunei unu, număr prin 9 nu pot fi de cît 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8. Cuburile acestor resturi sînt respectiv 0; 1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512. Resturile diviziunei prin 9 a acestor cuburi vor fi respectiv: 0, 1i 8, 0, 1, 8, 0, 1, 8. Rezultă de aci că restul diviziunei unui cub prin 9 nu poate fi de cît 0, 1 sau 8. Diferența a două cuburi divizată prin 9 nu va putea da ca resturi de cît pe acestea scăzute două cîte două. Cînd scăderea nu se poate face vom spori pe descăzut cu 9. Aceste resturi vor fi prin urmare :

$0+9-1=8$; $0+9-8=1$; $0-0=0$; $1-0=1$; $1+9-8=2$; $1-1=0$;
$8-1=7$; $8-0=8$ și $8-8=0$.

Deci diferența a două cuburi divizată prin 9 nu poate da ca resturi de cît pe 0, 1, 2, 7 sau 8. Pentru ca această diferență să se dividă cu 3, trebue ca restul diviziunei ei prin 9 să fie 0 sau un multiplu de 3. Dar dintre resturile găsite numai 0 îndeplinește această condiție. Dar în acest caz diferența cuburilor e divizibilă și cu 9. Prin urmare diferența cuburilor a două numere nu poate fi divizibilă cu 3 fără a fi divizibilă și cu 9, c, c. e. d. d.

Soluțiune dată de D-l C. Popovici (Iași) și *Lazăr I. Rădulescu* (Ploești).

Ori-ce număr este de una din următoarele forme: $\mathscr{M}3$ și $\mathscr{M}\pm1$.

Cuburile acestor numere vor fi de forma $\mathscr{M}9$ și $\mathscr{M}9\pm1$. Diferența a două numere de una din aceste forme nu poate fi de cît de una din următoarele forme : $\mathscr{M}9$, $\mathscr{M}9\pm1$ și $\mathscr{M}9\pm2$. Dintre aceste trei feluri de numere numai primul e divizibil cu 3. Dar acesta e divizibil și cu 9, c.c.e.d.d.

Soluțiune dată de D-l I. Moscuna (București); *Gr. N. Makarie* (Elev al Școalei de Poduri și Șosele din București) și *A. Iliovici* (Iași).

Fie a și b două numere. Vom avea:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Pentru ca a^3-b^3 să fie divizibil prin 3 trebue ca unul din factori să fie divizibil prin 3. Dar dacă punem pe al doilea factor sub

forma: $(a—b)^2+3ab$ se vede că dacă primul factor $a—b$ e divizibil cu 3, atunci și al doilea e divizibil cu 3, și că pentru ca factorul al doilea să fie divizibil cu 3 trebue ca $a—b$, adică primul factor să fie divizibil cu 3. De aci rezultă că dacă unul din factori se divide cu 3, atunci și celalt se divide cu 3, și prin urmare produsul lor se va divide cu 9, c.c.e.d.e.

Problema 80. — *Să se determine centrul de greutate al volumului unei jumătăți de sferă neomogenă, a cărei densitate variază proporțional cu a n^a putere a distanței de la centrul sferei la elementul considerat. Să se arate că ori-care ar fi legea dupe care variază densitatea, funcțiune numai de distanță, distanța centrului de greutate la centrul sferei este în totdeauna mai mică ca jumătatea razei.*

(A. G. Ioachimescu.)

Soluțiune dată de D-l Bogdan Ionescu, licențiat în matematici; și *D. Negulescu*, Student.

Fie x_1, y_1, z_1 coordonatele centrului de greutate căutat. Luînd axul Oz perpendicular pe planul cercului, care limitează jumătatea de sferă, el va fi un ax de simetrie al corpului considerat, deci:

$$x_1=0, \quad y_1=0,$$

iar z_1 este dat prin formula:

$$z_1=\frac{\int_0^R \rho^{n+3}d\rho \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^{\pi} \sin\psi d\psi}{\int_0^R \rho^{n+2}d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\psi}=\frac{n+3}{n+4}\times\frac{R}{2}$$

Fie $D=f(\rho)$ densitatea unui element, ρ fiind distanța sa la centrul sferei; avem evident:

$$2z_1=\frac{\int_0^R f(\rho)\rho^3 d\rho}{\int_0^R f(\rho)\rho^2 d\rho}$$

sau

$$\int_0^R f(\rho)\rho^2\left(\frac{\rho}{2}-z_1\right)d\rho=0.$$

Or factorul:

$$f(\rho)\rho^2$$

este în totdeauna pozitiv, iar

$$0 \leq \frac{\rho}{2} \leq \frac{R}{2}$$

deci pentru ca integrala precedentă să poată fi nulă, trebue ca z_1 să fie coprins între aceleași limite ca și ρ, adică:

$$z_1 < \frac{R}{2}.$$

***Problema 81.**— *Să se rezolve ecuația:*

$$\alpha(x^2-px+q)^2+\beta(x+px+q)^2=x^2 \quad \text{(I. P. Rădulescu).}$$

Soluție dată de D-nii Gr. N. Makarie, I. Moscuna și *A. Iliovici.*

1°. Observăm că rădăcina $x=o$ nu convine de cît atunci cînd $q(\alpha+\beta)=o$, adică cînd $q=o$, sau $\alpha+\beta=o$. In aceste cazuri ecuația propusă se poate pune respectiv sub formele:

$$x^2[(\alpha+\beta)x^2-2p(\alpha-\beta)x+p^2(\alpha+\beta)-1]=0;$$

$$x[4p\alpha x^2+x+4pq\alpha]=0,$$

și rezolvirea ei se reduce dar la rezolvirea unei ecuații de gradul al doilea, iar două sau una din rădăcini este nulă.

2°. Cînd $q(\alpha+\beta)\neq o$, atunci și $x\neq o$ și deci putem împărți ambii membri ai ecuației propuse prin x^2, ceia ce ne dă:

$$\alpha\left(x+\frac{q}{x}-p\right)^2+\beta\left(x+\frac{q}{x}+p\right)^2-1=0. \qquad (1)$$

Punînd

$$x+\frac{q}{x}=y, \qquad (2)$$

ecuația (1) devine:

$$\alpha(y-p)^2+\beta(y+p)^2-1=0,$$

sau

$$(\alpha+\beta)y^2-2(\alpha-\beta)py+(\alpha+\beta)p^2-1=0. \qquad (3)$$

Valorile aflate pentru y din această ecuație, înlocuite în ecuația (2), dau pentru x patru valori, reale sau imaginare.

Condițiele de realitate sînt:

$$\alpha+\beta \geq 4\alpha\beta p^2 \quad \text{și} \quad y^2 \geq 4q,$$

prima inegalitate fiind dedusă din ecuația (3), iar ultima din ecuația (2). In acaastă ultimă inegalitate va trebui dar să înlocuim pe y prin valorile scoase din (3).

***Problema 91.**— *Pe baza* AB *a unui triunghiu oare-*

care ABC *se ia un punct* P. *Se unește punctul* P *cu vîrful opus* C *și se ia mijlocul* N *al dreptei* CP. *Prin punctele* A *și* B *se duc paralele la dreptele* BN, AN. *Se cere a se găsi locul punctului de intersecție al acestor două paralele.*

(V. Cristescu.)

Soluție dată de D-nii: Bogdan Ionescu; *A. Iliovici* (Iași); *I. Moscuna* (București); *Gr. N. Makarie* (Elev al Școalei de Poduri); *C. Popovici* (Iași); *Eftihie Florn* (Elev în Clasa VI de la Seminarul Nîfon din București); *I. Penescu* (Elev al Școalei Comerciale din București); *D. Negulescu* (Student, București) și *G. Iliovici* (Iași).

Fie M un punct al locului căutat. Locul punctelor N este paralela Δ dusă la AB prin mijlocul laturei CA sau CB. Figura BNCM fiind un paralelogram, triunghiurile BNA, AMB sînt egale și prin urmare și înălțimile corespunzătoare bazei lor comune AB vor fi egale. Locul punctului M este dar o paralelă Δ' la AB și simetrică cu Δ în raport cu AB.

Notă. D-l *I. Anastasiadi* a rezolvit problema cu ajutorul geometriei analitice. O soluțiune analitică a fost dată și de D-nii *D. Negulescu* și *Gr. N. Makarie.*

PROBLEME PROPUSE

132. Să se determine curba pe care se mișcă: 1) Găleata unui puț cu cumpănă; 2) O lampă electrică atîrnată în mod mobil pe o sîrmă care trece prin extremitățile a doi stîlpi de înălțimi diferite, cînd lungimea sîrmei variază. (C. Lupu.)

*133. Să se afle locul geometric al punctului de întîlnire al diagonalelor patrulaterelor a căror două laturi opuse trec printr'un punct fix, iar vîrfurile lor se mișcă pe patru drepte concurente date. Să se afle asemenea locul intersecțiunei celor două laturi opuse. (I. Moscuna.)

*134 Să se probeze că expresiunea:

$$\left(a^{2}+1\right)^{m}\left(a^{2}+1\right)^{m-1}\left(a^{2}+1\right)^{m-2}\left(a^{2}+1\right)^{3}\ldots\ldots\ldots\left(a^{2}+1\right)^{m-n}\left(a^{2}+1\right)^{n+1}$$

se poate pune sub forma unui produs de sume de termini în progresie geometrică. (C. Popovici.)

*135. Să se construească un pseudo-patrat ABCD cunoscîndu-se laturile AB, BC și unghiul BCD.

Pseudo-patrat este patrulaterul care are diagonalele egale și perpendiculare. (I. IONESCU.)

136. Să se probeze că expresiunea:

$$A=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}$$

tinde către o limită determinată cînd numărul radicalelor suprapuse tinde către infinit, a fiind un număr pozitiv dat. Pentru ce valori a lui a limita precedentă este rațională și întreagă? Cînd a tinde către zero, A tinde către unitatea. (A. G. IOACHIMESCU.)

*137. Să se afle înălțimea AB și laturile paralele AC, BD ale unui trapez dreptunghiu ABCD, cunoscîndu-se aria trapezului și volumul născut prin rotațiunea sa în jurul laturei oblice CD. (TR. RIPIANU.)

*138. Să se găsească numărul de patru cifre de forma $aabb$ care să fie un patrat perfect. (GR. N. MAKARIE.)

*139. Prin vîrful B a unui triunghiu ABC se duce o paralelă la latura AC. Pe această paralelă se ia o lungime BD egală cu latura AB. De asemenea prin C se duce o paralelă la latura AB, pe care se ia o lungime CE egală cu AC. Dreptele CD, BE se întretaie în punctul O și întîlnesc respectiv laturile AB, AC în punctele P, N; iar dreapta AO întîlnește latura BC în punctul S. Să se demonstreze că între ariele triunghiurilor ce s'au format, avem următoarele relațiuni:

1) Triunghiurile ABN, BCP sînt echivalente; de asemenea triunghiurile ACP, CBN sînt echivalente.

2) Dacă b, c sînt lungimile laturilor AC, AB avem:

$$\frac{APC}{ANB}=\frac{b}{c};\qquad \frac{ASC}{ASB}=\left(\frac{b}{c}\right)^2;\qquad \frac{NOC}{POB}=\left(\frac{b}{c}\right)^3$$

(V. CRISTESCU.)

140. Două dreptunghiuri ABCD, $abcd$ au bazele lor AB, ab egale și pe aceiași dreaptă, iar laturile AD, ad fixe în mărime și poziție. Se cere locul geometric al intersecției diagonalelor acestor dreptunghiuri, luate două cîte două, cînd lungimea laturilor egale AB, ab variază. (I. ANASTASIADI.)

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

Aritmetică.

		Pagina
I. Ionescu.	O chestie de dobîndă	7
I. Ionescu.	Operaţiuni cu fracţiuni zecimale periodice . . .	28, 52

Geometrie.

A. G. Ioachimescu.	Suprafaţa şi volumul produs prin rotaţia unui cerc sau poligon regulat, ce se învirteşte în jurul unei drepte oare-care din planul său .	2, 17, 41
I. Ionescu.	Teorema lui Pitagora	13
G. Ţiţeica.	Relaţiuni între elementele unui tetraedru . . .	45
***	Chestiuni de maximum şi minimum rezolvite geometriceşte	75
A. Iliovici.	O demonstraţie a teoremei lui Pitagora . . .	76
I. N. Neculcea.	Despre parcelarea poligoanelor prin drepte paralele	96
***	Chestiuni algebrice demonstrate geometriceşte .	148
A. Iliovici.	Media şi extroma raţie	168
***	O demonstraţie a teoremei lui Pitagora . . .	170
A. Jijie.	O proprietate a cercurilor ortogonale	192
I. Ionescu.	Sofismă matematică	214
A. Iliovici.	Un mod de generare a elipsei	233
G. Ţiţeica.	Notă de geometrie	266

Algebră.

V. Cristescu.	Maximul şi minimul fracţiunei $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ . .	10
N. Nicolescu.	Adevărata valoare a expresiunilor de forma $\frac{P+\sqrt[m]{M}+\sqrt[n]{N}}{Q+\sqrt{R}}$	48
G. Ţiţeica.	O clasă de ecuaţiuni elementare	89
D. Emmanuel.	Asupra cantităţilor complexe	185

Trigonometrie.

		Pagina
V. Cristescu.	Înălțimile, bisectrițele și medianele unui triunghiu sferic	24
I. Ionescu.	Formula fundamentală a trigonometriei plane .	124

Geometrie analitică.

T. Constantinescu.	Cîte-va proprietăți ale normalelor la parabolă .	65
Bogdan Ionescu.	Cîte-va proprietăți ale triunghiului de arie maximă înscris într'o elipsă	113, 137

Analiză.

I. Ghibaldan.	Asupra numărului π	69
Constanța Pompilian.	Chestiunea 665 din l'Intermédiaire des Mathématiciens	70

Mecanică.

Al. Proca.	Despre lănțișorul sferic.	139
A. G. Ioachimescu.	Asupra echilibrului indiferent	209

Diverse.

	Introducere	1
I. Ionescu.	Valoarea lui π cu 707 zecimale	57
Z.	Simplificarea calculului. — Instrumente logaritmice. Rigla de calcul . . . 92, 116, 143, 188, 240, 264	

B. CHESTIUNI DE EXAMEN

	Bacalaureat București, Septembre 1895 . . .	32
	Școala de Poduri, Anul preparator (1895) . .	33
	Școala de Poduri, Anul I Secția inginerilor (1895)	34
	Școala Normală Superioară, București (1895) .	55
	Concurs înscris pentru catedrele de matematici de la Liceul din Galați și Gimnaziele din Caracal, Tîrgoviște și Tulcea	149
G. Țițeica.	Soluțiunile chestiunilor date la concursul pentru ocuparea catedrelor de matematici de la Liceul din Galati și Gimnaziele din Caracal etc. .	161
	Concurs înscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Gimnaziul din Rîmnicul-Vîlcei .	244
	Concurs înscris pentru ocuparea catedrei de matematici de la Externatul Secundar de fete din Ploești	245
	Bacalaureat Iași, sesiunea Iunie 1896	245
I. Ionescu.	Soluțiunile chestiunilor date la coucursul pentru ocuparea catedrei de matematici de la Externatul Secundar de fete din Ploești . .	257

C. PROBLEME PROPUSE

a) Indicarea paginei unde au fost propuse sau rezolvite [1])

Numărul problemei	*Pagina la care a fost:* propusă	rezolvită	Numărul problemei	*Pagina la care a fost:* propusă	rezolvită
1	15	36	46	88	181
2	15	57	47	88	201
3	15	58	48	88	203
4	15	60	49	110	204
5	15	37	50	110	205
6	15	38	51	110	216
7	15	170	52	111	217
8	15	61	53	111	218
9	16	78	54	111	219
10	16	100	55	111	225
11	16	125	56	111	245
12	16	38	57	111	226
13	16	101	58	112	227
14	39	81	59	112	230
15	39	82	60	112	206
16	39	194	61	112	248
17	39	84	62	112	249
18	40	103	63	112	269
19	40	150	64	134	207
20	40	85	65	134	231
21	40	151	66	134	249
22	40	NR	67	134	271
23	40	NR	68	135	272
24	63	NR	69	135	251
25	63	104, 127	70	135	253
26	63	127	71	135	
27	63	128	72	135	254
28	64	129	73	135	273
29	64	131	74	135	275
30	64	152, 171	75	135	
31	64	105	76	136	NR
32	64	132	77	136	NR
33	64	108	78	136	276
34	64	108, 133	79	158	277
35	86	154	80	158	279
36	86	174	81	159	280
37	86	155, 176	82	159	
38	86	166	83	159	
39	87	178	84	159	NR
40	87	196	85	159	NR
41	87	198	86	159	
42	87	133	87	160	
43	87	157	88	160	254
44	87	179	89	160	
45	87	200	90	160	

[1]) Redacția posedă soluțiuni bune la toate problemele afară de cele însemnate cu literile NR (ne rezolvite), asupra cărora rugăm pe colaboratorii noștri de a'și îndrepta atențiunea.

Numărul problemei	Pagina la care a fost: propusă	rezolvită	Numărul problemei	Pagina la care a fost: propusă	rezolvită
91	160	280	116	231	
92	160		117	232	NR
93	160		118	232	NR
94	182		119	232	NR
95	182		120	232	
96	183		121	232	NR
97	183		122	232	NR
98	183		123	255	NR
99	183		124	255	
100	183	NR	125	256	
101	183		126	256	
102	183		127	256	NR
103	184		128	256	NR
104	184		129	256	
105	184		130	256	
106	184	NR	131	256	
107	184		132	281	NR
108	207	NR	133	281	NR
109	207		134	281	NR
110	207	NR	135	282	NR
111	208		136	282	NR
112	208		137	282	NR
113	208	NR	138	282	NR
114	208		139	282	NR
115	208		140	282	NR

b) Repartiția problemelor propuse după materii.

Aritmetică. Problemele: 8, 17, 18, 19, 20, 24, 34, 41, 42, 55, 79, 97.

Geometrie elementară. Problemele: 2, 3, 4, 29, 30, 32, 35, 36, 39, 44, 51, 52, 66, 70, 71, 77, 87, 89 91, 92, 94, 103, 109, 112, 114, 115, 121, 126, 129, 131, 133, 135, 139.

Algebră elementară. Problemele: 6, 15, 25, 28, 37, 38, 45, 47, 59, 61, 64, 72, 76, 81, 82, 86, 90, 98, 104, 116, 120, 124, 128, 134, 137.

Trigonometrie. Problemele: 5, 12, 21, 33, 43, 50, 53, 56, 57, 60, 67, 69, 83, 105, 110, 118, 122, 130.

Geometrie analitică. Problemele: 10, 46, 54, 78, 88, 96, 102, 132, 140.

Algebră (matem. speciale). Problemele: 7 9, 11, 13, 23, 26, 27, 63, 65, 68, 85, 117.

Analiză nedeterminată și teoria numerilor. Probemele: 1, 14, 49, 73, 75, 95, 99, 100, 101, 107, 125, 138.

Analiză. Problemele: 16, 22, 31, 40, 62, 74, 84, 106, 108, 111, 113, 119, 123, 136.

Mecanică. Problemele: 58, 80, 127.

Fizică. Problemele: 48, 93.

TABLOUL NUMELOR.

Alexandrini O., 208.
Anastasiadi I., 281, 282.
Apollonius., 66.
Bărcăcilă Al., 133, 152, 180, 203, 226, 274.
Barisien E. N., 90 91.
Belidor, 213.
Bénézech L., 47.
Bollée L., 92.
Brewster., 139.
BucurescuI., 79, 80, 85, 101, 108 110, 127, 129, 131, 132, 133, 156, 178, 179.
Catalan E., 10.
Cauchy, 74, 195, 197.
Constantinescu T., 69.
Cristescu I., 104, 108.
Cristescu V., 13, 15, 16, 28, 37, 39, 40, 58, 60, 63, 64, 70 78, 81, 82, 86, 100, 104, 111, 129, 135, 151, 154, 159, 160, 182 184, 232, 246, 255, 281, 282.
Davidescu Em., 207.
Delambre, 151.
Deparcieux, 257, 258, 259, 260, 261.
Descartes, 213.
Dewar T., 142.
Dirichlet L., 209.
Emmanuel D., 187.
Erbiceanu C., 105.
Euler, 211.
Fermat, 134.
Floru Eftihie, 275, 281.
Galileu, 139.
Gauss, 187.
Ghibaldan I., 70, 86, 111, 112, 156, 206, 218.
Gogu C., 231.
Gompertz, 261, 262.
Greenhil A. G., 139, 141, 142.
Guldin, 17, 23, 42.
Iliovici A., 78, 81, 85, 104, 110, 129, 131, 132, 133, 134, 150, 151 152, 154, 157, 160, 169, 174, 178, 179, 180, 199, 200, 202, 203, 206, 217, 226, 230, 240, 246 248, 249, 253, 254, 271, 274, 278, 280, 281.
Iliovici G., 81, 83, 85, 104, 110, 130, 132, 133, 135, 155, 175, 178, 180, 199, 200 203 206, 226, 227 230, 248, 271, 273, 281.
Ioachimescu A. G., 7, 16, 23, 39, 44, 64, 84, 87, 88, 101, 112, 134, 136, 152, 159, 160, 174, 194, 196, 201, 201, 208 214, 227 231, 256, 269, 279, 282.
Ioachimescu D., 85, 198 225, 273.
Ioachimsthal, 67.
Ionescu A., 254.
Ionescu B., 78, 80, 85, 88, 101, 111, 116, 127, 139, 155, 156, 160 181, 183, 196, 204, 205, 207, 217, 223, 231, 232, 269, 273, 275, 276, 279, 281.
Ionescu C., 57, 63, 82, 85, 88 103, 108, 179, 200, 277.
Ionescu I., 10, 14, 15, 16, 32, 36, 38, 39, 40, 55, 57, 62, 63, 64 81, 85, 87, 88, 103, 108, 111, 125, 131 135 136, 150 158, 160, 168, 170, 183 199, 203, 208, 216, 225, 253, 256, 264, 277, 282.
Ionescu P., 63, 128.
Jijie A., 193.
Lagrange, 209.
Lupu C., 219 254, 255, 281.
Makarie Gr. N., 136, 156, 157, 160, 170, 176, 178, 179, 180, 183, 184 200, 202, 203, 204, 205, 206, 216, 219, 225, 226, 230, 232, 248, 252, 254, 256, 269, 273, 276, 278, 280, 281, 282.
Makeham, 261, 262.
Mateescu M. 252, 274.
Mateiescu C. 82, 104, 133, 134, 158, 180, 203, 206, 251, 253, 254, 271.
Menelaus, 180.
Miclescu C., 184, 227, 232.
Moivre, 171.
Moscuna I., 183, 184, 208, 232, 256, 278, 280, 281.
Neculcea I. N., 99.
Negoescu N., 84, 104, 108, 110, 111, 129, 132, 134, 135, 154, 156, 157, 175, 179, 202, 204, 206, 217, 219, 226, 248, 251.
Negretzu I, 256.
Negulescu D., 100, 104, 111, 128, 181, 198, 204, 206, 219, 269, 273, 275, 276, 279, 281.
Neper, 94.
Newton, 126.
Nicolescu Matilda, 104, 108.
Nicolescu N., 52, 63, 87, 110, 127, 135, 157, 205, 272.
Odhner W. T., 92.
Oughtred, 199.
Paraschivescu B., 203 251, 252, 254.
Pascal 213.

Penescu I., 83, 180, 281.
Pitagora, 13, 76, 125, 170.
Pompiliau Constanța., 40, 64, 75, 86, 105, 112, 135, 155, 159, 184, 232, 249, 276.
Pompilian Gr., 38.
Popescu C., 179, 180, 200, 206, 248, 251, 253.
Popovici C., 36, 38, 58, 62, 85, 104, 110, 129, 131, 133, 179, 183, 200, 226, 249, 253, 254, 273, 278, 281.
Popovici G., 57, 59.
Proca Al., 142.
Ptolomeu, 133.
Rădulescu C., 85, 273.
Rădulescu I. P., 125, 127, 128, 129, 134, 135, 157, 159, 160, 180, 202, 204, 206, 207, 219, 226, 230, 254, 280.
Rădulescu, L. I., 278.
Răileanu C. N., 155, 179, 199, 200, 203, 226, 227, 248, 274.
Ripianu Tr., 282.
Siacci F., 209.
Stănulescu C. S., 36, 38, 57, 82, 83, 85, 86, 104, 108, 152, 154, 156, 159, 174, 179, 206.
Stroescu I., 194, 195, 196, 249.
Taylor, 206.
Thomson 33.
Țițeica G., 37, 48, 61, 64, 87, 91, 110, 112, 132, 134, 136, 159, 168, 178, 179, 183, 184, 207, 208, 216, 230, 269, 271.
Trandafirescu N., 104, 108, 110, 134, 156, 179, 180, 205, 207, 253, 254, 256, 272.
Tutuc I., 64, 82, 83, 87, 104, 108, 110, 112, 129, 130, 155, 156, 180, 248,
Virgiliu C., 57, 63, 82, 85, 88, 103, 108, 179, 200, 277.
Walis, 69.
Weierstrass, 187.

BIBLIOTECA
UNIVERSITĂȚII
- IAȘI -

Problemele însemnate cu * se pot rezolvi cu ajutorul matematicilor elementare (cursul de liceu).

Se vor publica ulterior :

1) Articolul trimes de D-l *C. Popovici.*

2) Probleme propuse de D-nii: *Bogdan Ionescu, Gr. N. Makarie* și *I. Moscuna.*

3) Probleme rezolvite de D-nii: *I. Anastasiadi* (93, 112, 114); *G. Dragu* (129); *Eftihie Floru* (93); *A. Iliovici* (75, 82, 83, 86, 89, 92, 93, 94, 95, 99, 102, 103, 104, 112, 114, 115, 116, 126, 130); *G. Iliovici* (82, 83, 86, 89, 95, 99, 104, 130); *D. Ioachimescu* (89, 93, 129); *Alex. Ionescu* (93); *Bogdan Ionescu* (71, 111, 116, 120); *C. Ionescu* (89); *C. Lupu* (96, 102); *Gr. N. Makarie* (82, 83, 86, 87, 89, 90, 93, 95, 97, 99, 101, 102, 103, 115, 116, 120, 125, 130); *M. Mateescu* (82); *C. Mateiescu* (82, 83, 89); *I. Moscuna* (71, 75, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 92, 93, 94, 96, 98, 102, 104, 105, 107, 109, 112, 114, 124, 131); *I. Negretzu* (102, 115); *D. Negulescu* (71, 102, 111); *B. Paraschivescu* (83, 89, 93, 99, 104, 120, 129, 130); *I. Penescu* (93); *D. Poenaru* (83); *C. Popescu* (83, 87); *C. Popovici* (75, 82, 86, 87, 89, 90, 93, 94, 98, 104, 112, 126, 128, 129, 130); *T. Săvulescu* (89, 93, 99); *L. Scherer* (75); *C. Virgiliu* (89).

Probleme nerezolvite : 22, 23, 24, 76, 77, 84, 85, 100, 106, 108, 110, 113, 117, 118, 119, 121, 122, 123, 127.

Erata. Pagina 239, rîndul 7 de jos. In loc de: *paralelă*, a se ceti: *parabolă.*

1986

SPRE STIINTA

Soluțiile problemelor propuse trebuesc să fie adresate franco D-lui V. Cristescu, Inginer, Strada Eminescu, 38, București, D-lui A. G. Ioachimescu, Inginer, Calea Rahovei 66, București, D-lui I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei, 19, București, sau D-lui G. Țițeica, Profesor, Calea Rahovei, 46, București.

Ele trebue să fie scrise citeț și pe o singură parte a foilor. Fie care problemă trebue să fie scrisă deosebit și să fie precedată de enunțul său. Figurile trebuesc să fie desemnate cu îngrijire, în formatul gazetei, pe foi de hîrtie separate.

De asemenea articolele destinate Gazetei Matematice trebuesc să fie scrise pe o singură parte a foaei. Autorii problemelor de propus, sînt rugați de a da o dată cu enunțurile și o schiță a soluțiunilor.

Articole și chestiuni iscălite cu pseudonime, sau cu inițiale, nu se vor publica de cît dacă redacția va cunoaște numele adevărat și adresa trimițătorului.

Se vor primi soluțiuni la problemele propuse, pănă la apariția soluțiunei în corpul gazetei, cu toate că unele din ele vor fi fost trecute pe copertă ca rezolvite. După aparițiune se vor primi numai soluțiuni mai simple, sau mai elegante, de cît cele deja publicate.

Gazeta Matematică apare la 15 ale fie cărei luni. Abonamentul este de 6 lei pe an și se plătește înainte. Abonamentele trebuesc trimese D-lui **I. Ionescu, Inginer, Strada Călușei 19**, București.